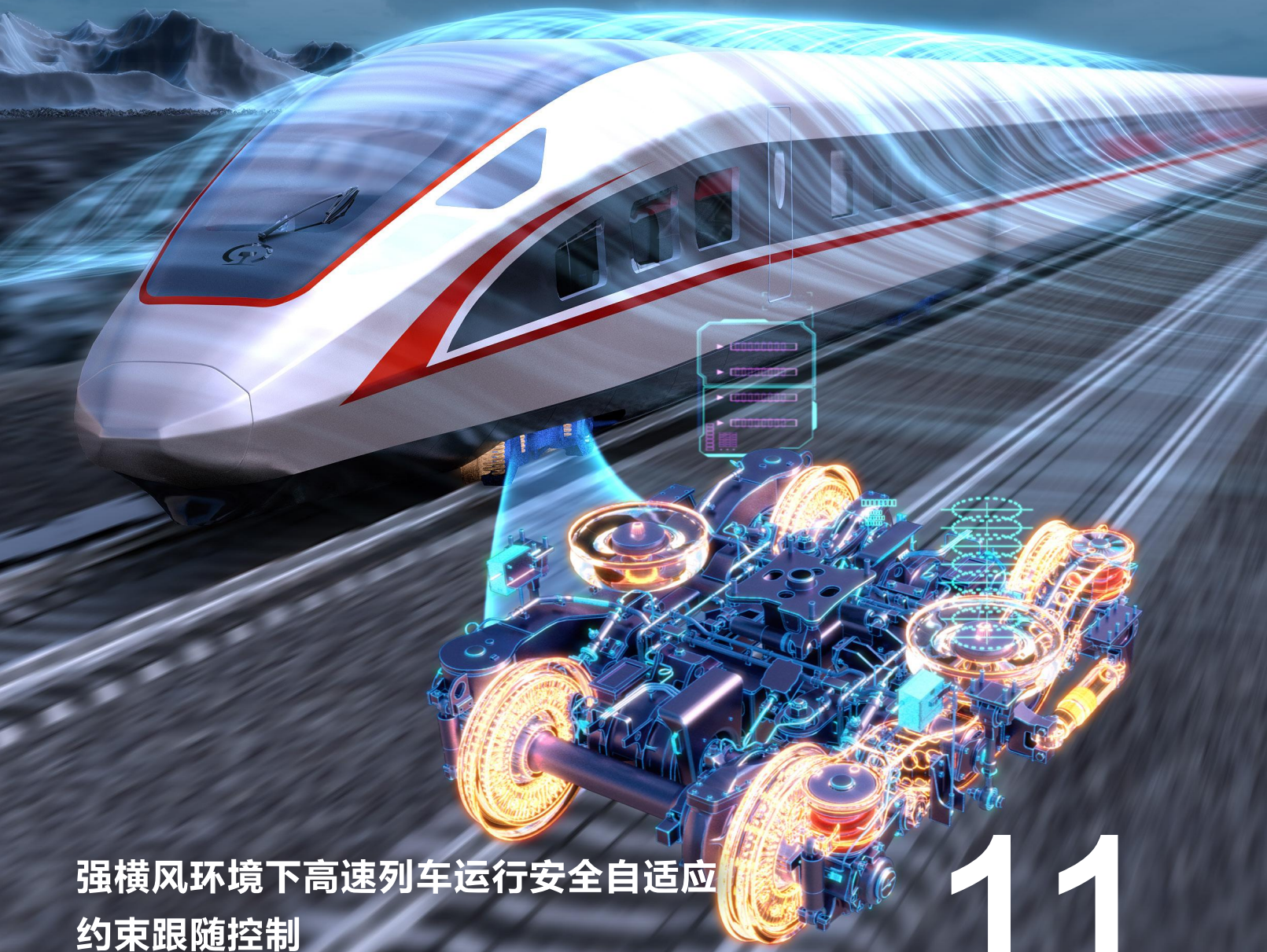
中国振动工程学会
Chinese Society for Vibration Engineering

ISSN 1004—4523
CN 32-1349/TB

振动工程学报

JOURNAL OF VIBRATION ENGINEERING



强横风环境下高速列车运行安全自适应约束跟随控制

凌亮　赵靖宇　谈春波　余浩伟　王开云　翟婉明

11
2025 / Vol.38

《振动工程学报》编辑委员会

主　　编：翟婉明

副 主 编：裘进浩（常务）　李　惠　杨智春　陈建兵　陈雪峰

编　　委：（89 人）

丁　虎　于开平　马小飞　马文勇　马　辉　王立峰　王　军　王　浩
王　琳　王曙光　龙志强　冯志鹏　冯青松　吕西林　朱志辉　朱宏平
任尊松　华旭刚　伊廷华　刘小川　刘文光　刘利琴　刘战强　刘章军
汤宝平　杜修力　杜敬利　李天匀　李　书　李永乐　李志农　李鸿光
李　惠　李　鹤　李巍华　杨建中　杨建刚　杨晓东　杨铁军　杨智春
吴九汇　吴应雄　邱信明　邱　毅　何旭辉　何　欢　何柏岩　张文明
张亚辉　张志飞　张建民　张春巍　张　嘎　陈云敏　陈文礼　陈伟球
陈克安　陈宗平　陈建兵　陈雪峰　范宣华　林　京　欧进萍　季　辰
季宏丽　周加喜　周进雄　周　瑾　赵春发　费庆国　贺文宇　徐赵东
高金吉　郭安薪　郭　彤　郭　瑜　黄　锐　彭志科　彭勇波　温广瑞
靳艳飞　裘进浩　雷亚国　雷　鹰　廖昌荣　谭　平　翟婉明　黎　胜
瞿叶高

青 年 编 委：（35 人）

王延庆　王　亮　王健菲　王　睿　石先杰　叶肖伟　代胡亮　冯　凯
吕　辉　刘　迟　刘英想　孙加亮　杨志勃　吴　昊　何清波　张大羽
张业伟　张兴武　张晓天　陈　提　林旭川　国　巍　金　洌　金晓航
周生喜　赵海峰　姜金辉　翁　顺　黄　永　曹宏瑞　曹彦鹏　曹鸿猷
鲍跃全　裴　斌　颜建伟

历 任 主 编：胡海昌　闻邦椿　刘人怀　苏义脑　胡海岩

编辑部主任：郭　欣

编　　辑：宋　晴　张晨凯　吴永鑫　张　田

英 文 编 辑：王　单　孙加亮　姜金辉　宿　柱　李　健　陶宇轩　孙　周

（本期责任编辑：郭　欣　吴永鑫）

振 动 工 程 学 报

2025 年 11 月 **第 38 卷第 11 期**

目　　次

“NVTA2025”专刊序言 …… (2463)
强横风环境下高速列车运行安全自适应约束跟随控制 …… 凌　亮，赵靖宇，谈春波，等(2464)
车载数据驱动下重载列车纵向力实时预测方法 …… 熊　芯，何　闻，常崇义，等(2474)
车辆惯容悬架等效阻抗特性分析及频域调控实现 …… 刘昌宁，冯修杰，杨　艺，等(2486)
外附装配式框架-支撑减震加固体系高效数值模拟方法
　与动力灾变响应分析 …… 曹徐阳，王　谆，冀　昆，等(2495)
考虑冲刷的海上风电单桩-海床-结构地震响应分析 …… 王天鹏，王志平，刘振标，等(2507)
不同返包型式加筋黄土边坡振动台模型试验研究 …… 赵志成，蔡晓光，李思汉，等(2519)
阈值优化的自适应双向压缩变换及其在碰摩故障特征提取中的应用 …… 贺　雅，陈焱锜，柯艺波，等(2529)
面向机械振动信号的自主信号处理大语言模型智能体 …… 李　奇，张昕然，胡文扬，等(2543)
面向不同标签与域配置的统一跨域故障诊断方法 …… 张宇腾，吕宇璠，孔　运，等(2557)
IGBT 自激电磁振动信号的压电薄膜传感与检测 …… 何赟泽，张　杰，李祺颖，等(2569)
连杆铰链型非线性能量阱设计及试验研究 …… 柴　凯，初嘉文，楼京俊，等(2579)
非线性振动控制恢复力辨识方法研究进展 …… 刘清华，曹军义，金　睿，等(2586)
融合显式 Newmark-β 法与迭代正则化的动载荷识别 …… 李鸿秋，姜金辉，陈国平(2600)
磁悬浮柔性转子无试重不平衡量分布优化方法 …… 张仁坤，徐园平，姚润晖，等(2609)
具有粒子群-禁忌搜索算法的高速磁浮悬浮系统加速度反馈控制 …… 徐俊起，易芷涵，陈　琛，等(2619)
磁气混合隔振电磁结构分析与输出特性研究 …… 江友亮，宋春生，江　洋(2632)
耦合曲轴振动的柴油机翻边轴瓦润滑性能分析 …… 施佳皓，赵　滨，徐含章，等(2641)
考虑球缺陷的全陶瓷角接触球轴承打滑及非线性振动特性研究 …… 王　展，赵　瑞，王子男，等(2654)
基于叶尖定时的低转速动叶片裂纹在线识别方法 …… 杨斯骞，段礼祥，张继旺，等(2673)
电动汽车驱动电机轴承碰撞动力学建模及其油膜支承力分析 …… 李学军，肖展宏，石常志，等(2682)
水声吸声超材料拓扑优化设计 …… 郑周甫，杨海滨，王　洋，等(2690)
面向大型结构振动抑制的小型轻质低功耗压电半主动实时控制系统 …… 何军峰，袁　权，吴义鹏，等(2704)
核主泵磁流变半主动隔振及试验验证 …… 张家明，邹冬林，廖国江，等(2713)
粒子群优化的车内模糊主动噪声控制方法 …… 张恩来，彭智龙，杜加福，等(2721)
考虑压电智能结构内部正反馈的改进 Youla-Kučera 参数化
　前馈鲁棒自适应振动主动控制 …… 欧阳珊，徐童欣，朱晓锦，等(2733)
基底激励下杠杆型非线性能量阱减振系统的强调制响应分析 …… 罗一帆，郜健博，彭　剑，等(2743)
充液流动管道低频带隙特性与振动控制 …… 刘明利，肖文宇，罗　宇，等(2754)
多因素影响陶俑修复品包装系统动力学特性研究 …… 李国志，陈佳怡，雒波波，等(2763)
考虑非线性与不确定性的货物-包装-车辆耦合系统建模与优化 …… 郑益谦，肖庚宇，王志伟，等(2772)
结构动响应的自启动单解时域积分器优化 …… 李金泽，刘耀坤，于开平，等(2781)
脉冲子结构与模态子结构混合空间子结构综合法 …… 王虎寅，丁　晟，王博曦，等(2790)
大倾角靠背汽车座椅振动传递特性及舒适性研究 …… 粟芷馨，林泽峰，尹玮倓，等(2798)
融合特征降维与人工神经网络的坐姿人体头部振动特性研究 …… 张筱璐，陈相玉，段远飞，等(2810)
多轴振动对坐姿人体视在质量的影响研究 …… 匡　昊，邱　毅，刘　迟，等(2818)
层合圆锥壳及组合壳的受迫与自由振动特性分析 …… 吴江海，段　勇，尹志勇(2825)
应变梯度双层微梁的动力学建模与振动特性研究 …… 黄宁川，张　波，文鹏军，等(2836)

期刊基本参数：CN32-1349/TB * 1987 * m * A4 * 384 * zh * P * ￥50.00 * 1000 * 37 * 2025-11

JOURNAL OF VIBRATION ENGINEERING

Nov. 2025 **Vol. 38 No. 11**

CONTENTS

Preface ····· (2463)
Adaptive constraint following control for high-speed train operation safety under strong crosswind
····· LING Liang, ZHAO Jingyu, TAN Chunbo, et al (2464)
Real-time prediction method of longitudinal forces in heavy-haul trains driven by vehicle-carried data
····· XIONG Xin, HE Wen, CHANG Chongyi, et al (2474)
Analysis of equivalent impedance characteristics and frequency control of vehicle inertial suspension
····· LIU Changning, FENG Xiujie, YANG Yi, et al (2486)
Efficient numerical simulation method and dynamic disaster response analysis of an externally-attached braced-frame seismic reinforcement system ····· CAO Xuyang, WANG Zhun, JI Kun, et al (2495)
Seismic responses of monopile-supported offshore wind turbines considering post-scour conditions
····· WANG Tianpeng, WANG Zhiping, LIU Zhenbiao, et al (2507)
Shaking table test study on loess slopes reinforced with different wrap-around facing types
····· ZHAO Zhicheng, CAI Xiaoguang, LI Sihan, et al (2519)
Adaptive bi-directional maximal squeezing transform based on threshold optimization and its application in the feature extraction of rub-impact fault ····· HE Ya, CHEN Yanqi, KE Yibo, et al (2529)
An LLM-based agent for autonomous signal processing of mechanical vibration signals
····· LI Qi, ZHANG Xinran, HU Wenyang, et al (2543)
Unified cross-domain fault diagnosis method towards different label and domain configurations
····· ZHANG Yuteng, LYU Yufan, KONG Yun, et al (2557)
Experimental study on the detection of IGBT self-excited electromagnetic vibration signal using a piezoelectric film sensor ····· HE Yunze, ZHANG Jie, LI Qiying, et al (2569)
Design and experimental study of connecting rod hinge type nonlinear energy sink
····· CHAI Kai, CHU Jiawen, LOU Jingjun, et al (2579)
Research progress on restoring forces identification in nonlinear vibration control
····· LIU Qinghua, CAO Junyi, JIN Rui, et al (2586)
Dynamic load identification using the explicit Newmark-β method combined with iterative regularization
····· LI Hongqiu, JIANG Jinhui, CHEN Guoping (2600)
Optimization of unbalance distribution in magnetic levitation flexible rotor system without trial weights
····· ZHANG Renkun, XU Yuanping, YAO Runhui, et al (2609)
Acceleration feedback control of high-speed maglev suspension system with PSO-TS algorithm
····· XU Junqi, YI Zhihan, CHEN Chen, et al (2619)
Electromagnetic structure analysis and output characteristics of magnetic-air hybrid vibration isolation
····· JIANG Youliang, SONG Chunsheng, JIANG Yang (2632)
Analysis of lubrication performance for journal-thrust coupled bearings in diesel engines with coupled crankshaft vibration ····· SHI Jiahao, ZHAO Bin, XU Hanzhang, et al (2641)
Slipping and nonlinear vibration characteristics of full ceramic angular contact ball bearing considering ball defects
····· WANG Zhan, ZHAO Rui, WANG Zinan, et al (2654)
Online identification method for cracks in low-speed rotating blades based on tip-timing technique
····· YANG Siqian, DUAN Lixiang, ZHANG Jiwang, et al (2673)
Collision dynamics modelling of electric vehicle drive motor bearing and its oil film supporting force analysis
····· LI Xuejun, XIAO Zhanhong, SHI Changzhi, et al (2682)
Topology optimization design of hydroacoustic metamaterials for sound absorption
····· ZHENG Zhoufu, YANG Haibin, WANG Yang, et al (2690)
Compact and low-power piezoelectric semi-active real-time control system for vibration suppression in large-scale structures ····· HE Junfeng, YUAN Quan, WU Yipeng, et al (2704)
Magnetorheological semi-active vibration isolation and experimental verification for reactor coolant pump
····· ZHANG Jiaming, ZOU Donglin, LIAO Guojiang, et al (2713)
A method for vehicle interior fuzzy active noise control using particle swarm optimization
····· ZHANG Enlai, PENG Zhilong, DU Jiafu, et al (2721)
Youla-Kučera parameterization feedforward robust adaptive active vibration control of piezoelectric smart structures with internal positive feedback ····· OUYANG Shan, XU Tongxin, ZHU Xiaojin, et al (2733)
Strongly modulated response analysis of a lever-type nonlinear energy sink vibration reduction system under base excitation ····· LUO Yifan, GAO Jianbo, PENG Jian, et al (2743)
Low-frequency bandgap characteristics and vibration control of fluid-conveying pipelines
····· LIU Mingli, XIAO Wenyu, LUO Yu, et al (2754)
Dynamic characteristics of packaging systems for repaired warrior figurines under multiple factors
····· LI Guozhi, CHEN Jiayi, LUO Bobo, et al (2763)
Modeling and optimization of cargo-packaging-vehicle coupled systems incorporating nonlinearities and uncertainties
····· ZHENG Yiqian, XIAO Gengyu, WANG Zhiwei, et al (2772)
Optimizations on self-starting single-solve time integrators for structural dynamical responses
····· LI Jinze, LIU Yaokun, YU Kaiping, et al (2781)
Hybrid coordinates synthesis method of impulse-based substructure and component mode substructure
····· WANG Huyin, DING Sheng, WANG Boxi, et al (2790)
Vibration transmissibility and comfort of large-backrest-angle automotive seats
····· SU Zhixin, LIN Zefeng, YIN Weitan, et al (2798)
Modeling of the seat-to-head transmissibility based on the artificial neural network and the feature dimensionality reduction method ····· ZHANG Xiaolu, CHEN Xiangyu, DUAN Yuanfei, et al (2810)
Effect of multi-axis vibration on the apparent mass of seated human body ··· KUANG Hao, QIU Yi, LIU Chi, et al (2818)
Analysis of forced and free vibration characteristics of laminated conical shells and combined shell structures
····· WU Jianghai, DUAN Yong, YIN Zhiyong (2825)
Dynamic modeling and vibration characteristics of strain gradient double-layered microbeam
····· HUANG Ningchuan, ZHANG Bo, WEN Pengjun, et al (2836)

“NVTA2025”专刊序言

振动在工程世界中无处不在。从高速列车的平稳行驶到航空发动机的振动抑制，从精密仪器的微振动隔离到大型结构的抗风抗震设计，振动理论的研究与工程实践已深度融入车辆系统动力学、转子动力学、非线性振动、智能材料与结构、故障诊断与预测、振动噪声控制、人因工程等多个前沿领域。它既是制约高端装备性能与可靠性的关键难题，也蕴藏着揭示系统动态行为规律的深层密钥。如何有效驾驭振动，从被动防护迈向主动智能控制，已成为拓展从国之重器到民用精工性能边界的核心课题。

当前，我国正处于“十四五”规划收官、系统谋划“十五五”新征程的关键时期。在此背景下，学科体系化发展与协同创新的需求日益凸显。为此，中国振动工程学会精心组织了第十六届全国振动理论及应用学术会议（NVTA2025）。本次盛会汇聚了国内顶尖专家学者与创新团队，围绕从基础理论到产业应用中的关键科学问题展开深入研讨，旨在系统梳理学科进展，前瞻布局未来五年发展方向，为构建新时代振动工程科技创新体系注入强劲动力。

值此盛会之际，《振动工程学报》特别策划出版“NVTA2025”专刊，集中刊发了来自 30 余所双一流高校及科研院所的 36 项创新成果。这些研究或深刻揭示系统内在机理，或实现智能算法的重要突破，或精准验证于重大工程实践，充分展现了我国振动工程研究的广度和深度。成果广泛涵盖空天探索、能源安全、智慧交通与智能系统等国家战略前沿领域，是基础理论研究与国家重大需求深度融合的集中体现。我们期望本期专刊能够成为广大科研工作者交流思想、碰撞智慧的平台，启迪更多创新灵感。更期待振动工程领域的同仁以此为契机，深化合作、协同攻关，共同致力于解决国家重大工程中的振动问题，为推动我国工程领域高质量发展谱写新的篇章！



中国振动工程学会理事长

第十六届全国振动理论及应用学术会议主席

强横风环境下高速列车运行安全自适应约束跟随控制

凌 亮，赵靖宇，谈春波，余浩伟，王开云，翟婉明

（西南交通大学轨道交通运载系统全国重点实验室，四川 成都 610031）

摘要：随着高速列车运行速度、里程以及运营范围的不断增大，复杂多变的运行环境给高速列车安全平稳运行带来了巨大的挑战。传统的高铁转向架被动悬挂系统难以有效保证高速列车在强横风等复杂环境中安全舒适运行，开展基于主动悬挂系统的高速列车主动安全控制技术研究，对于保障强横风作用下高速列车安全平稳运行具有重要意义。本文针对强横风环境下高速列车的动态特性，提出了一种适应于高速列车仿生主动悬挂系统的自适应鲁棒位移不等式约束跟随控制方法，仿真验证了主动控制策略对随机横风环境下高速列车运行安全性的控制效果。结果表明，该主动控制策略可有效提升随机横风环境下高速列车的运行安全性，可为复杂环境下高速列车主动悬挂控制技术研发提供理论依据。

关键词：高速列车；随机横风；主动控制；安全性；平稳性

中图分类号：U270 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202509042

Adaptive constraint following control for high-speed train operation safety under strong crosswind

LING Liang, ZHAO Jingyu, TAN Chunbo, YU Haowei, WANG Kaiyun, ZHAI Wanming

（State Key Laboratory of Rail Transit Vehicle System，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China）

Abstract: With the continuous increase in the running speed，mileage，and operational range of high-speed trains，the complex and changeable operating environment poses significant challenges to the safe and stable operation of high-speed trains. The traditional passive suspension system of high-speed train bogies is difficult to effectively ensure the safe and comfortable operation of high-speed trains in strong crosswind environments. Therefore，conducting research on active safety control technology for high-speed trains based on active suspension systems is of great significance for improving the operational stability and safety of high-speed trains under strong crosswinds. This paper proposes an adaptive robust displacement inequality constraint following control method suitable for the active suspension system of high-speed trains in response to the dynamic characteristics of high-speed trains in crosswind environments. Simulations verify the control effect of the active control strategy on the operational safety of high-speed trains in random crosswind environments. The results show that the proposed active control strategy can effectively improve the operational safety of high-speed trains under random crosswind conditions. It can provide a theoretical basis for the research and development of active suspension control technology for high-speed trains in complex environments.

Keywords: high-speed train; random crosswind; active control; operational safety; operational stability

随着高速列车运行速度的不断提高，线路环境气动载荷对高铁车辆运行的影响日益凸显，尤其是强横风环境下高速列车动力学性能急剧恶化，甚至引发脱轨倾覆安全事故。因此国内外诸多专家学者开展了高速列车横风安全性研究[1-7]，探究横风对列车运行状态的影响以及应对策略。

COOPER[1]针对移动铁道车辆建立了湍流风的随机模型，考虑了垂直于车辆运动方向的湍流分量在空间和时间上的变化，计算出了随机风的功率谱密度、互相关、平方根相干性和相位滞后函数的数值结果。THOMAS 等[2]通过建立非定常气动载荷作用下的高速列车动力学模型，分析了横风对高速铁路车辆通过曲线的影响。NETO 等[3]通过建立横风数值模型探究了横风作用下风速和风向对列车运行安全性的影响，并得出风速和风向对车辆安全性的影响占主导地位，车速的影响相对较小的结论。毛军等[4]基于三维定常可压缩流动的 NS 方程分析了侧风风场特征对高速列车运行安全性的影响。崔涛

收稿日期：2025-09-16；**修订日期：**2025-10-09

基金项目：国家自然科学基金资助项目（52388102，U2268210）；四川省重大科技专项（2023ZDZX0008）

等[5]基于流固耦合方法对高速列车在侧风环境下高速通过站台以及高速交会时的运行安全性进行了研究。薛蕊等[6]构建了基于 COOPER 理论的非稳态风谱作用下货运动车组车体-集装器耦合动力学模型，研究了非稳态横风对货运动车组系统横向振动特性的影响。朱剑月等[7]运用涡声理论和声类比方法，研究了转向架舱外安装裙板对高速列车头车空气动力与气动噪声特性的影响。

随着高速列车运行范围的不断扩大，高速列车服役环境愈加复杂，传统被动悬挂系统难以保证强横风等复杂环境下高速列车保持优异动力学性能。因此，在高速列车横风安全性以及半主动/主动悬挂控制技术研究[8-14]基础上，世界各国学者广泛研究了横风条件下高速列车运行安全主动控制措施。HECKMANN 等[8]讨论了利用主动悬挂控制技术提升列车横风稳定性的各种方法。THOMAS 等[9]研究提出了利用主动二系悬挂提升高速列车横风稳定性的技术策略。陈春俊等[10]基于天棚阻尼理论提出了一种虚拟惯性阻尼控制算法，通过对车体横向振动进行半主动控制，可抑制轨道不平顺和气动载荷引起的横向振动，从而提升列车横向平稳性。李德仓等[11]设计了一种滑模自适应鲁棒控制器，以实现不同风速下高速列车对给定安全运行速度的高精度跟踪控制。张恒等[13]提出了一种基于线性轨道涡流制动系统的主动控制策略，为高速列车的风致安全性主动控制提供了思路。ZHANG 等[14]以抑制高速列车车体横向、摇摆和侧滚运动姿态为目标，基于扰动观测器和滑模控制理论提出了一种提升高速列车在强侧风下的运行稳定性和安全性的控制方法。

本文针对随机强横风作用下高速列车动力学性能恶化问题，利用计算流体软件获得了不同偏转角度下高速列车的气动系数，基于 COOPER 理论建立了高速列车随机横风载荷模型，最终构建了考虑横风效应的高速列车主动悬挂控制模型。探究了自适应鲁棒位移不等式约束跟随控制策略驱动的仿生主动悬挂系统（AICFC-BIS）对强横风环境下高速列车运行平稳性和安全性的提升效果，并分析了关键控制参数对主动悬挂控制效果的影响机制。

1　高速列车主动悬挂控制模型

横风环境下高速列车主动悬挂控制分析模型如图 1 所示，图中 H 为高速列车的高度。首先，基于车辆-轨道耦合动力学理论建立了高速列车动力学模型，采用流体动力学软件计算获得了气动载荷系

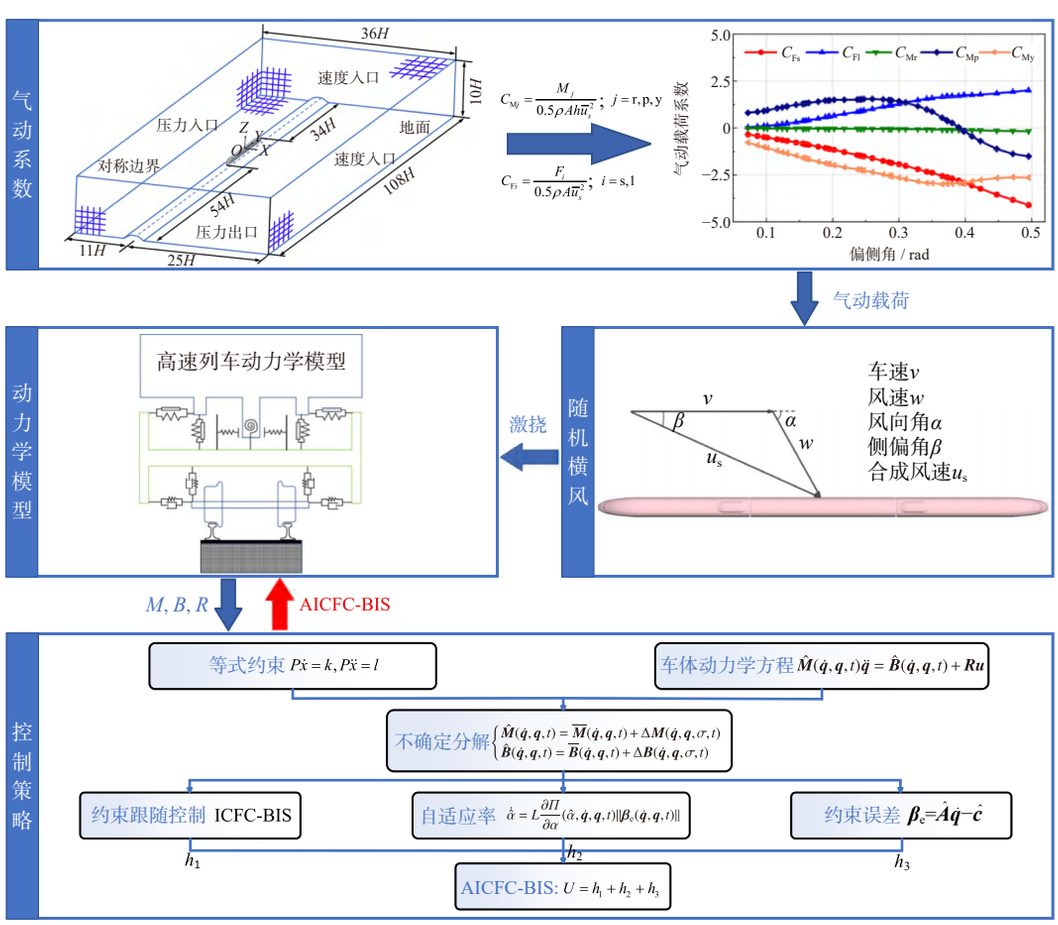


图 1　横风环境下高速列车主动悬挂控制分析模型

Fig. 1　Analysis model of active suspension control for high-speed train under crosswind

数。其次，基于气动载荷系数得到定常气动载荷及非定常气动载荷，构建了随机横风载荷的数值模型。在此基础上，构建了启发于鸟腿形状的仿生悬挂系统结构，基于约束跟随控制理论设计了适应于仿生主动悬挂系统的位移不等式约束跟随控制策略。最后，考虑到高速列车系统的不确定性，引入了自适应控制策略，保证了约束误差的有界一致性，从而提升系统参数不确定条件下高速列车动力学性能的稳定性。

1.1 横风模型

自然界中的随机风致使高速列车受到频率丰富的非定常气动载荷扰动，如何建立随机横风数值模型则是研究的重点之一。本节基于高速列车气动系数、随机风的功率谱密度、COOPER 理论以及谐波叠加方法[1]，建立随机横风的数值模型，进而建立高速列车非定常气动载荷数值模型。车速、风速、风向角以及侧偏角之间的关系如下式所示：

$$\overline{u}=\sqrt{v^2+\overline{w}^2+2v\overline{w}\cos\alpha} \tag{1}$$

$$\beta=\arccos[(v^2+\overline{u}^2-\overline{w}^2)/2v\overline{u}] \tag{2}$$

式中，$\overline{w}$表示平均风速；v和α分别表示车速和风向角；$\overline{u}$表示平均合成风速；β表示侧偏角。

结合 COOPER 理论中车辆在横风中运动时的 VON KARMAN 频谱，得出自然界中脉动风的功率谱密度：

$$\frac{fS_{\mathrm{W}}}{\sigma_{\mathrm{W}}^2}=\left\{\left(\frac{\overline{w}}{\overline{u}}\right)^2+\left[1-\left(\frac{\overline{w}}{\overline{u}}\right)^2\right]\frac{0.5+94.44(fL'/\overline{u})^2}{1+70.8(fL'/\overline{u})^2}\right\}\cdot\frac{4(fL'/\overline{u})}{[1+70.8(fL'/\overline{u})^2]^{5/6}} \tag{3}$$

$$L'=L_{\mathrm{W}}^x\left\{\left(\frac{\overline{w}}{\overline{u}}\right)^2+4\left(\frac{L_{\mathrm{W}}^y}{L_{\mathrm{W}}^x}\right)^2\left[1-\left(\frac{\overline{w}}{\overline{u}}\right)^2\right]\right\}^{0.5} \tag{4}$$

式中，f表示频率；S_{W}表示功率谱密度；σ_{W}^2表示波动风速的标准差；L_{W}^x和L_{W}^y分别表示纵向尺度和横向尺度。

根据谐波叠加法得出频率丰富的脉动风表达式[13]：

$$w'(t)=\sum_j[2S_{\mathrm{W}}(f_j)\Delta f_j]^{0.5}\sin(2\pi f_j t+2\pi r_j) \tag{5}$$

式中，Δf_j为频率积分补充；f_j为第j个离散频率；r_j为0~1之间的随机数。

当风向角为90°时，气动载荷对高速列车的安全性影响最大[15]，因此本文考虑风向角为90°。速度为5、10、15和20 m/s的随机横风的时程曲线如图2所示。

结合气动系数以及气动载荷计算公式可得不同自由度的定常气动载荷：

$$M_j=0.5\rho Ahu_{\mathrm{s}}^2C_{\mathrm{M}j};\quad j=\mathrm{r,p,y} \tag{6}$$

式中，$M_j(j=\mathrm{r,p,y})$表示高速列车的侧滚力矩、点头力矩、摇头力矩；ρ表示空气密度，取值为1.225 kg/m^3；A表示参考面积，取值为10 m^2；h表示参考高度，取值为3 m；u_{s}表示合成风速，$u_{\mathrm{s}}=\overline{u}+u'$，其中$u'$表示脉动随机风速；$C_{\mathrm{M}j}$表示定常气动载荷系数。

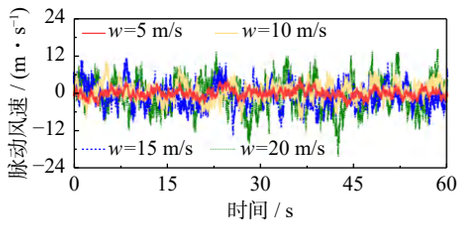


图 2 脉动风速时程曲线

Fig. 2 Time-history curve of random wind profiles

高速列车的非定常气动载荷由平均值和脉动值叠加组成：

$$F=\overline{F}+F'=0.5\rho A(\overline{u}+u')^2C_{\mathrm{F}}(\beta) \tag{7}$$

式中，C_{F}表示非定常气动载荷系数。

非定常气动载荷平均值的计算公式为：

$$\overline{F}=0.5\rho A\overline{C}_{\mathrm{F}}\overline{u}^2 \tag{8}$$

式中，$\overline{C}_{\mathrm{F}}$表示$C_{\mathrm{F}}(\beta)$在侧偏角的平均值$\beta$处的取值。

对于侧向力、升力和侧滚力矩，由于来流中的小尺度漩涡与列车附近的流场并不完全相关，因此气动载荷的波动与风速的波动并不完全一致。气动载荷波动与脉动风速波动之间的关系可以通过空气动力加权函数来确定[16]。

气动载荷的脉动值表达式为：

$$F'=\rho A\overline{C}_{\mathrm{F}}\overline{u}\int_0^{\infty}h_{\mathrm{F}}(\tau)w'(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

$$h_{\mathrm{F}}(\tau)=(2\pi\overline{n}'\overline{\omega}/L_{\mathrm{c}})\tau\ \exp[(-2\pi\overline{n}'\overline{\omega}/L_{\mathrm{c}})\tau] \tag{10}$$

式中，w'；τ为积分变量；L_{c}表示车长；$\overline{n}'=\lambda\sin\beta$，其中$\lambda$为常数，对于侧力和侧滚力矩，$\lambda$=2，对于升力，$\lambda$=2.5。

高速列车的非定常气动载荷包括侧力、升力、侧滚力矩、点头力矩和摇头力矩，非定常气动载荷均作用于车身重心。由于阻力对高速列车的垂向和横向响应影响极小，因此在本文中不予考虑。此外为避免突然加载非定常气动载荷对车辆系统的瞬态瞬时冲击，非定常气动载荷在从零开始线性增加。

1.2 高速列车动力学模型

基于车辆-轨道耦合动力学理论，构建了由三节车组成的高速列车动力学模型。图3为高速列车的单节车动力学模型的正视图，每个车辆子模型都被视为一个多刚体系统。头车和尾车作为动车，皆由1个车体、2个构架、4个轮对、8个轴箱、2个枕梁、2个电机单元、一系悬挂和二系悬挂组成。中间车作为拖车，除了没有电机悬挂装置，拥有和头、尾车一样的装置。其中，车体、构架、轮对以及电机单元均有6个自由度，轴箱转臂仅考虑点头自由度。

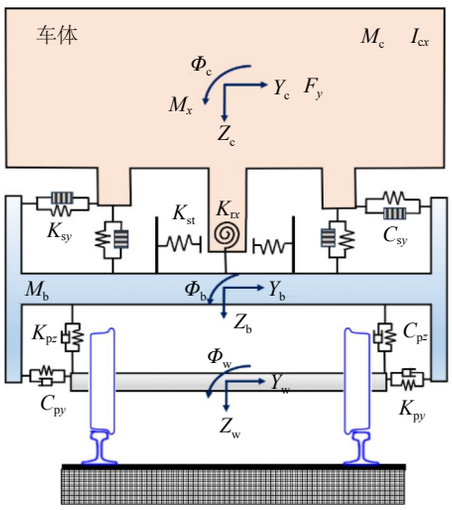


图 3　高速列车动力学模型

Fig. 3　High-speed train dynamics model

高速列车的车体和构架通过二系悬挂相互连接，构架和轮对通过一系悬挂连接，高速列车的一系悬挂以及二系悬挂具体形式在图中一一展现。一系悬挂包含垂向减振器、垂向弹簧等悬挂原件；二系悬挂包含垂向弹簧、垂向减振器、横向弹簧、横向减振器、纵向弹簧、抗蛇行减振器、横向止挡、抗侧滚扭杆等悬挂原件。图 3 中各变量具体含义参考文献 [17]。

1.3　自适应鲁棒位移不等式约束跟随控制模型

高速运行的列车受复杂多变的环境影响，不仅存在气动载荷对车辆动力学性能的扰动影响，关键悬挂参数的不可预测变化同样导致高速列车的动力学性能恶化，威胁行车安全。传统的被动悬挂无法保证复杂环境下高速列车的运行平稳性和运行安全性，而仿生结构（BIS）的有益非线性与约束跟随控制的优异性为高速列车的主动控制提供了思路。基于此，本文构建了启发于鸟腿形状[18]的高速列车仿生悬挂系统结构（如图 4 所示，图中相关符号说明参见文献 [18]），此结构不仅能在大位移运动时实现极低的共振频率，保持高稳定的同时也具有良好的承载能力，可以有效地隔离从转向架传递至车体的振动。

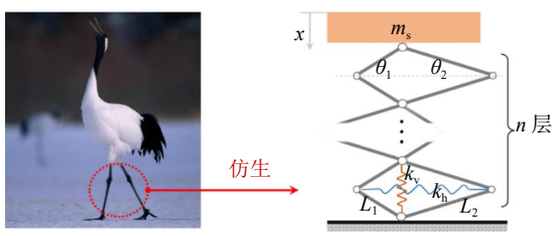


图 4　仿生结构

Fig. 4　Biomimetic structure

高速列车车体垂向和横向振动加速度是评价高速列车运行平稳性的关键指标，因此本文将 BIS 替换原高速列车二系悬挂系统中的垂向弹簧和横向弹簧，安装 BIS 的高速列车新型悬挂以及主动悬挂示意图如图 5 所示。

基于约束跟随控制理论以及仿生结构原理，并将配备 BIS 的高速列车作为控制目标，构建仿生悬挂结构为参考目标的 AICFC-BIS 主动悬挂控制策略[17-18]，通过安装在高速列车二系悬挂系统的作动器实现高速列车稳定性控制，有效解决高速列车紧凑悬挂空间无法安装隔振效果良好但体积庞大的仿生结构这一问题。针对横风环境下高速列车的动态特征，在设计控制器时重点考虑了系统的不确定性。

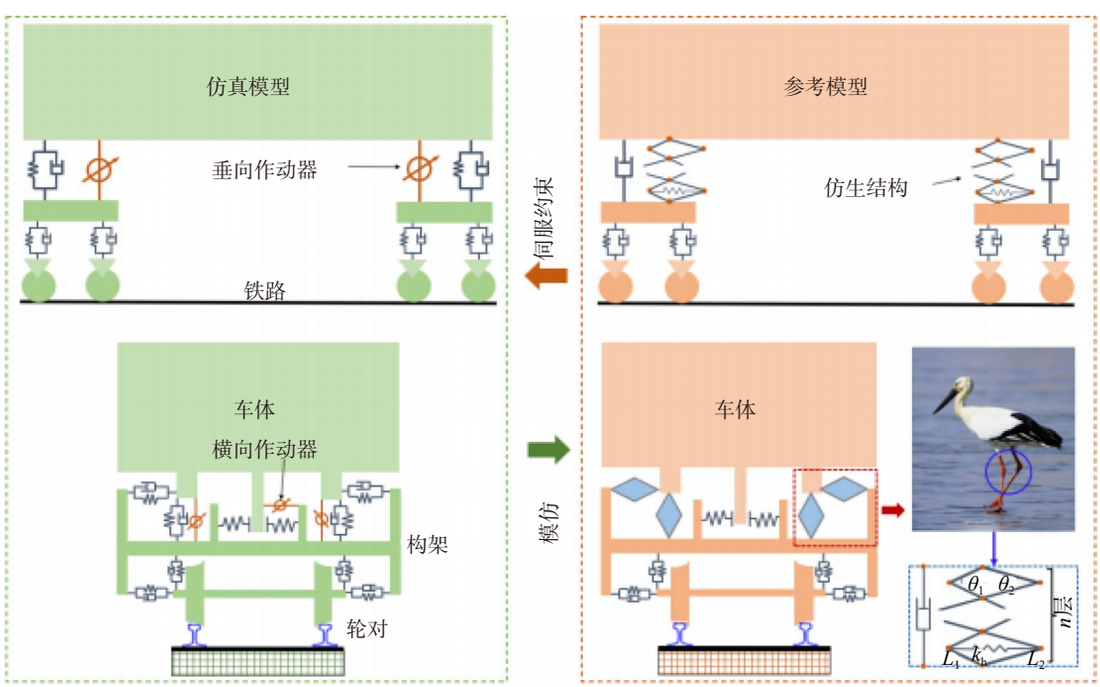


图 5　基于仿生结构的高速列车主动悬挂系统控制策略

Fig. 5　Control strategy of biomimetic active suspension system for high-speed train

包含主动悬挂的高速列车车体动力学方程可以表示为[19]:

$$\hat{\boldsymbol{M}}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)\ddot{\boldsymbol{q}}=\hat{\boldsymbol{B}}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)+\boldsymbol{R}\boldsymbol{u} \tag{11}$$

式中, $\boldsymbol{q}$ 为车体位移; t 为时间; $\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}$ 为控制力向量。

基于不确定分解,首先将式(11)中的 $\hat{\boldsymbol{M}}$、$\hat{\boldsymbol{B}}$ 分解如下:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{M}}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)=\overline{\boldsymbol{M}}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)+\Delta\boldsymbol{M}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},\sigma,t)\\ \hat{\boldsymbol{B}}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)=\overline{\boldsymbol{B}}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)+\Delta\boldsymbol{B}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},\sigma,t)\end{cases} \tag{12}$$

式中, $\overline{\boldsymbol{M}}$、$\overline{\boldsymbol{B}}$ 表示名义部分; $\Delta\boldsymbol{M}$、$\Delta\boldsymbol{B}$ 表示不确定部分; σ 为不确定参数。变量上方加“-”为名义部分,变量上方加“^”为微分同胚后的形式。

本文中, $\hat{\boldsymbol{A}}\ddot{\boldsymbol{q}}=\hat{\boldsymbol{b}}$ 二阶约束等号左边满秩,这代表 $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$ 可逆。主动悬挂中无不确定性和初始条件满足等式约束条件时,利用约束跟随控制设计主动悬挂中控制力的第一部分:

$$h_1=\overline{\boldsymbol{M}}^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{M}}^{-1})+(\hat{\boldsymbol{b}}-\hat{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{M}}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}) \tag{13}$$

式中, $\hat{\boldsymbol{A}}$ 表示对角矩阵,用于将车体运动转换为约束形式; $\hat{\boldsymbol{b}}$ 表示二阶约束等式的另一端,由非二阶变量构成,具体形式见文献[17]。

当车辆系统中不存在不确定性和扰动,且主动悬挂的初始条件不能满足等式约束的条件时,结合稳定性理论设计的第二部分控制力如下式所示:

$$h_2=-K\hat{\boldsymbol{M}}\hat{\boldsymbol{A}}\left(\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{A}}\dot{\boldsymbol{q}}-\hat{\boldsymbol{c}}\right) \tag{14}$$

式中, $\hat{\boldsymbol{M}}$ 为车体的惯性矩阵; $\boldsymbol{H}$ 仅用于将矩阵配齐可用于计算,无其他额外取值; $\hat{\boldsymbol{c}}$ 表示运动方程的一阶约束等式的另一端,一阶约束形式,可参考文献[17]; K 为控制力计算参数, K 为正值且在适当范围内,本文中 K=100。

由于高速列车二系悬挂的非线性以及非定常气动载荷的不确定性,高速列车主动悬挂系统与参考模型之间会不可避免地产生误差,因此设计主动悬挂的控制力的第三部分 h_3 为:

$$h_3=-[\hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}P]\gamma\mu\Pi \tag{15}$$

其中:

$$\gamma(\hat{\alpha},\hat{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\mu}(\hat{\alpha},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)\|}, & \|\boldsymbol{\mu}(\hat{\alpha},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)\|>\varepsilon\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & \|\boldsymbol{\mu}(\hat{\alpha},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)\|\leqslant\varepsilon\end{cases} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\mu}(\hat{\alpha},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)\Pi(\hat{\alpha},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t) \tag{17}$$

$$\dot{\varepsilon}(t)=-l\varepsilon(t) \tag{18}$$

式中, $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{e}}$ 表示微分同胚后的一阶约束误差, $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{e}}=\hat{\boldsymbol{A}}\dot{\boldsymbol{q}}-\hat{\boldsymbol{c}}$; ε 为正常数,用于调控收敛范围,本文中取值为0.1; l 为正常数,用于调控自适应率的变化程度。通过选择 $\Pi(\alpha,\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)$ 作为不确定边界, $\hat{\alpha}$ 作为自适应率, P 仅用于将矩阵配齐可用于计算,无其他额外取值。

$$\Pi(\alpha,\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)=a(\|\dot{\boldsymbol{q}}\|+1)^2 \tag{19}$$

式中, a 为正常数的控制参数,可用于调控不确定边界的范围。

$$\dot{\hat{\alpha}}=L\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}(\hat{\alpha},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)\|\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)\| \tag{20}$$

式中, L 为自适应率构成参数。

自适应鲁棒位移不等式约束跟随控制输入可得出:

$$U=h_1+h_2+h_3 \tag{21}$$

本文提出的自适应鲁棒位移不等式约束跟随控制(AICFC-BIS)的控制力可以确保主动悬挂系统在有限时间内满足完整或非完整等式约束,即使系统的初始条件不能够满足等式约束或者系统中存在不确定性[18]。

1.4 模型验证

高速列车头车的侧力系数 C_{Fs}、升力系数 C_{Fl}、侧滚力矩系数 C_{Mr}、点头力矩系数 C_{Mp} 以及摇头力矩系数 C_{My} 随侧偏角而变化,基于此本文通过多项式函数对计算出的散点进行拟合,最终通过4阶多项式拟合得到气动系数与侧偏角 β 之间的表达式如下:

$$\begin{cases}C_{\mathrm{Fs}}=-7.24\beta^4-1.92\beta^3-4.28\beta^2-4.98\beta+0.04\\ C_{\mathrm{Fl}}=98.4\beta^4-150\beta^3+71.7\beta^2-7.25\beta+0.26\\ C_{\mathrm{Mr}}=22.8\beta^4-26.6\beta^3+9.75\beta^2-1.52\beta+0.06\\ C_{\mathrm{Mp}}=797\beta^4-892\beta^3+298\beta^2-32.9\beta+2.05\\ C_{\mathrm{My}}=10.3\beta^4+30.9\beta^3-11.4\beta^2-7.9\beta-0.19\end{cases} \tag{22}$$

准确的高速列车空气动力学模型是计算高速列车气动系数的基础,因此,本文通过对比高速列车三节车辆的阻力系数计算结果与风洞试验测试结果[20],验证本文建立的高速列车空气动力学模型的正确性,如图6所示,图中,蓝色部分为实测数据,红色部分为本文的计算结果。

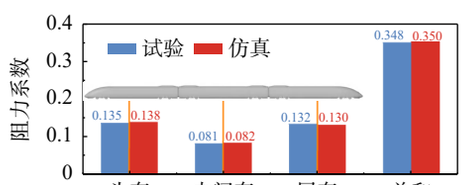


图6 高速列车空气动力学模型验证

Fig. 6 Validation of high-speed train aerodynamic model

从图6中可以看出,通过计算得到的高速列车的头车、中间车和尾车的阻力系数分别为0.138、0.082和0.130,三节车的阻力系数之和为0.350。通过试验测得的高速列车的三节车的阻力系数分别为0.135、0.081和0.132,三节车的实测阻力系数之和为0.348。仿真计算和实测的阻力系数的对比结果证明二者之间存在1%的误差,在可接受的范围内,验证了本文建立的高速列车空气动力学模型的正确性。

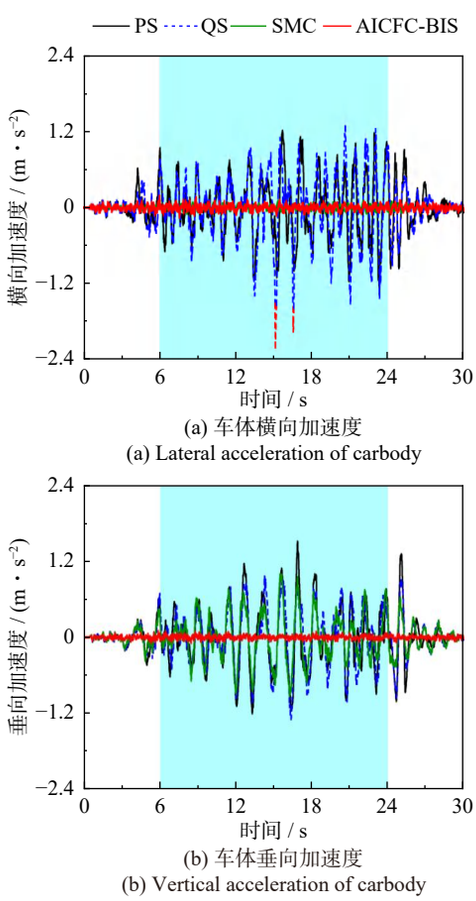
2　主动控制效果分析

2.1　运行平稳性

当车速为 300 km/h、风速为 25 m/s 时，不同悬挂作用下的车体一位端振动加速度时域计算结果如图 7 所示。图 7 中，PS 表示被动悬挂系统，QS 表示采用准静态控制策略的主动悬挂系统，SMC 表示采用滑膜控制策略的主动悬挂系统，AICFC-BIS 表示采用自适应鲁棒位移不等式约束跟随控制策略的主动悬挂系统。

在被动悬挂、QS、SMC 以及 AICFC-BIS 主动悬挂作用下，高速列车的车体前端横向加速度最大值分别为 1.38、1.62、0.13、0.14 m/s^2，车体后端的横向加速度最大值分别为 1.56、1.38、0.13、0.12 m/s^2。高速列车的车体前端垂向加速度最大值分别为 1.46、1.33、1.33、0.26 m/s^2，车体后端的垂向加速度最大值分别为 1.26、1.19、1.18、0.18 m/s^2。不难看出，相较于被动悬挂以及文献中提出的主动控制策略，本文所提出的主动控制策略能够更加有效地提升随机横风环境下高速列车的运行平稳性。

为进一步探究横风环境下不同控制策略对高速列车运行平稳性的影响，高速列车车体前、后端以及不同方向上的平稳性指标[21]统计结果如图 8 所示。



(a) 车体横向加速度
(a) Lateral acceleration of carbody

(b) 车体垂向加速度
(b) Vertical acceleration of carbody

图 7　不同控制策略下的车体振动加速度

Fig. 7　Vibration accelerations of carbody under different control strategies

图 8 横坐标表示在车体前后端两个测点测得的车体不同方向上的振动加速度，再根据相关标准计算得到不同位置以及不同方向上的平稳性指标。从图 8 中能够直观地看出，相较于其他被动以及主动控制策略，本文所提出的主动控制策略能够有效地、更全面地提升高速列车的横向以及垂向运行平稳性。

在 AICFC-BIS 主动悬挂系统作用下，随机横风环境下高速列车的垂向 Sperling 指标和横向 Sperling 指标分别降低了 42.7% 和 44.4%。图 9 展示了不同

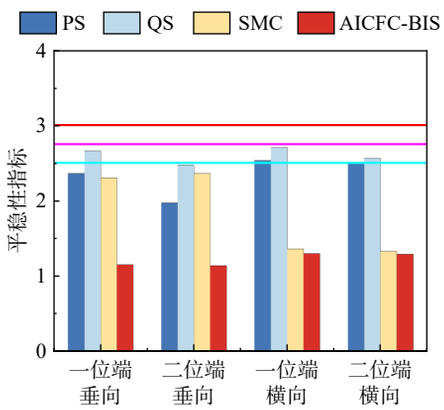
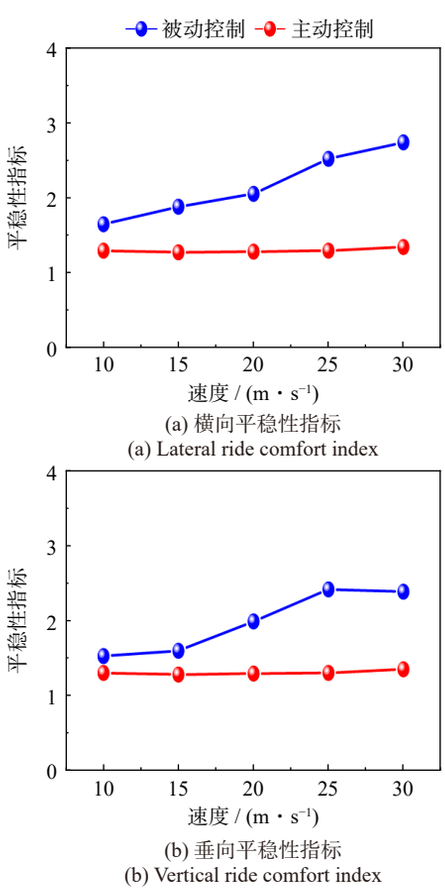


图 8　不同控制策略下的平稳性指标

Fig. 8　Ride comfort indices under different control strategies



(a) 横向平稳性指标
(a) Lateral ride comfort index

(b) 垂向平稳性指标
(b) Vertical ride comfort index

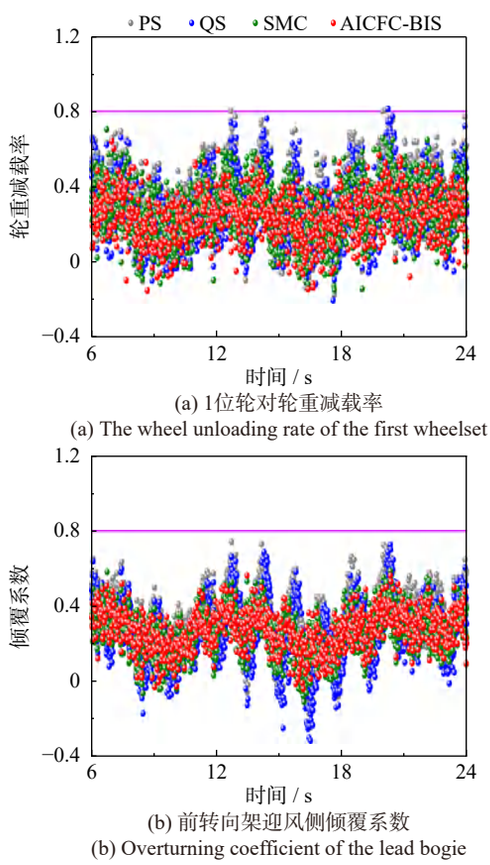
图 9　不同风速下的平稳性指标

Fig. 9　Ride comfort indices under different wind speeds

风速下被动控制和主动控制的平稳性指标计算结果。从图 9 中可以看出，风速越大，AICFC-BIS 主动悬挂提升高速列车运行平稳性的效果越明显。

2.2 运行安全性

为探究随机横风环境下不同控制策略对高速列车运行安全性的影响，图 10 展示了车速为 300 km/h、风速为 25 m/s 的工况下，高速列车 1 位轮对轮重减载率以及前转向架迎风侧倾覆系数的时域计算结果。结果表明，在不同主动控制策略下，高速列车的运行安全性能得到不同程度的改善。相较于其他主动控制策略，本文提出的 AICFC-BIS 主动控制策略能够有效减小车辆倾覆系数和轮重减载率指标，在更加有效地提升高速列车运行平稳性的同时，有效提升高速列车的运行安全性。



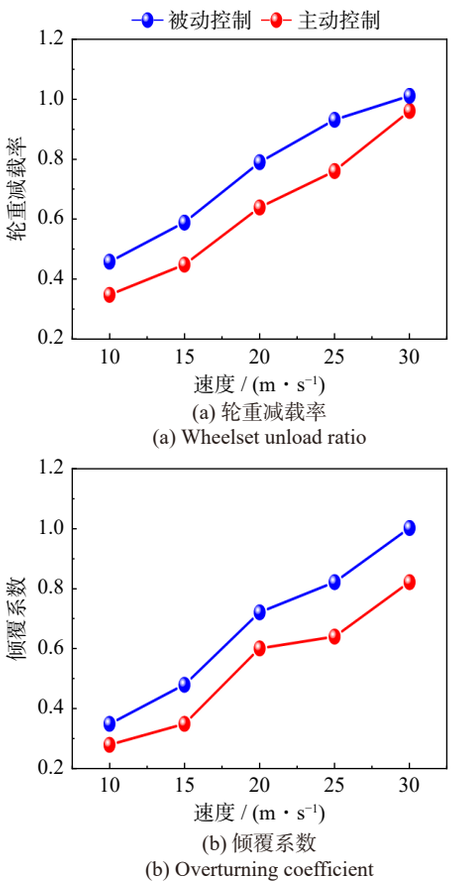
(a) 1位轮对轮重减载率
(a) The wheel unloading rate of the first wheelset

(b) 前转向架迎风侧倾覆系数
(b) Overturning coefficient of the lead bogie

图 10 不同控制策略下的安全性指标

Fig. 10 Safety indices under different control strategies

从图 10 中可以看出，在风速 25 m/s 的随机横风作用下，高速列车的倾覆系数、轮重减载率超过了安全限值。在不同的悬挂系统作用下，高速列车的一位轮对的轮重减载率最大幅值分别 0.92、0.91、0.82、0.79；高速列车的四位轮对的轮重减载率最大幅值分别为 0.89、0.85、0.77、0.68；高速列车的前转向架迎风侧倾覆系数最大幅值分别为 0.83、0.83、0.67、0.65；后转向架迎风侧倾覆系数最大幅值分别为 0.79、0.79、0.62、0.59，在 AICFC-BIS 主动悬挂作用下，高速列车的轮重减载率和倾覆系数分别降低了 23.6% 和 25.3%。从图 11 中可以进一步看出，本文所提出的主动控制方法可以有效降低高速列车轮重减载率和倾覆系数，进而提升强横风环境下高速列车的运行安全性。



(a) 轮重减载率
(a) Wheelset unload ratio

(b) 倾覆系数
(b) Overturning coefficient

图 11 不同风速下的安全性指标

Fig. 11 Safety indices under different wind speeds

3 主动控制参数敏感度分析

分析主动安全悬挂系统关键控制参数对控制效果的影响规律有益于主动控制策略优化设计[18]，进而提升横风环境下高速列车动力学性能的控制效果。本节探究关键控制参数对 AICFC-BIS 主动悬挂系统控制效果的影响。本文提出的自适应鲁棒位移不等式约束跟随控制策略关键参数主要涉及文献 [18] 中的位移收敛参数 β_{ij}、式(20)中的自适应率构成参数 L 以及式(14)中的控制力计算参数 K。

3.1 控制参数 $\boldsymbol{\beta_{ij}}$ 的影响分析

首先探究位移收敛参数 β_{ij} 对控制效果的影响，不同参数 β_{ij} 下的车体位移时域图如图 12 所示。从图 12 中可以看出，β_{ij} 从 0.1 增大至 100 时，横风环境下

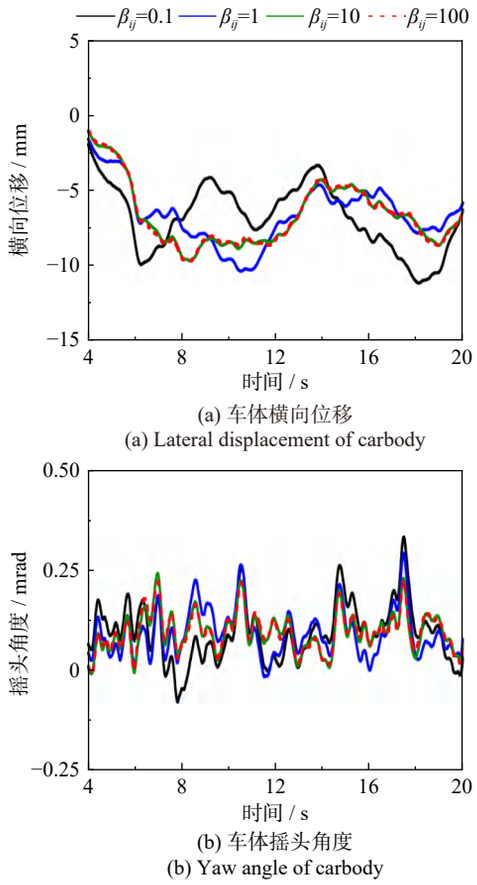


图 12　不同参数 β_{ij} 下的车体位移

Fig. 12　Carbody displacements under different parameter β_{ij}

车体的最大横向位移从 11.15 mm 减小至 9.67 mm; 车体垂向位移从 4.70 mm 减小至 4.22 mm; 车体点头角度从 0.64 mrad 减小至 0.44 mrad; 摇头角度从 0.33 mrad 减小至 0.22 mrad。在一定范围内增大 β_{ij} 能够更加有效地增强主动悬挂抑制横风环境中高速列车的位移的作用效果。

不同参数 β_{ij} 下的高速列车横向振动加速度时域计算结果如图 13 所示。由图 13 可知，适当增大 β_{ij} 能够更加有效地增强主动悬挂抑制横风环境中高速列车的振动作用效果。

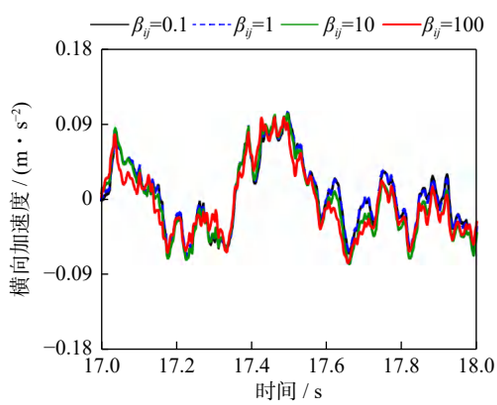


图 13　不同参数 β_{ij} 下的车体横向振动加速度

Fig. 13　Lateral vibration accelerations of carbody under different parameter β_{ij}

3.2　控制参数 L 的影响分析

自适应率组成参数 L 的选取影响主动控制策略的控制效果，本节计算了不同参数 L 下的高速列车五个自由度的约束误差，结果如图 14 所示。约束误差是衡量控制效果的评价标准之一，约束误差越小，代表被控对象越接近约束形式。

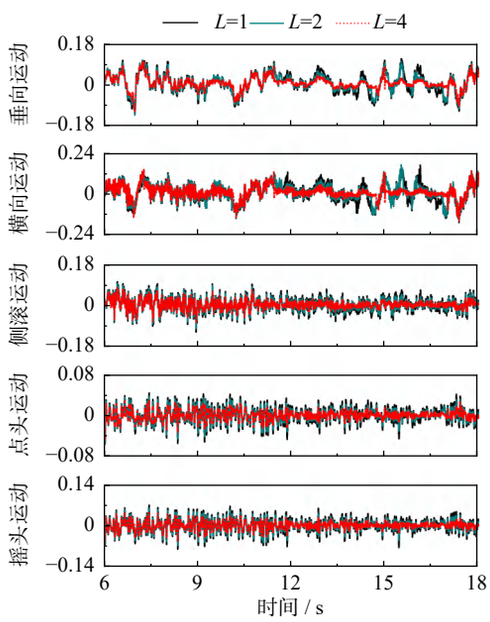


图 14　不同参数 L 下的约束误差

Fig. 14　Constraint errors under different parameter L

从图 14 中可以看出，在一定范围内随着 L 的增大，五个自由的二阶约束误差逐渐小，且垂向和横向运动两个自由的约束误差变化最为明显，这表明适当增大 L 能够提升主动控制抑制车体振动加速度的控制效果。但是过大的 L 会导致系统震颤。

3.3　控制参数 K 的影响分析

为了探究控制力 H_2 包含的常数 K 对控制效果的影响，本节计算了不同参数 K 下的高速列车五个自由度的约束误差，结果如图 15 所示。由图 15 可知，在一定范围内随着 K 的增大，车体五个自由度的二阶约束误差逐渐小，且垂向和横向运动两个自由度的约束误差变化最为明显，这表明适当增大 K 能够有效减小约束误差，进而提升主动控制效果。

3.4　作动器响应灵敏度分析

作动器的响应在工程应用中至关重要。为分析作动器响应时间对控制效果的影响，将作动器考虑为一个时间常数为 T_c 的一阶系统。在风速为 22.5 m/s 的随机横风作用下，不同参数 T_c 下的高速列车动力学响应如图 16 所示。其中，图 16(a)表示高速列车前、后转向架二系悬挂中的垂向作动器的输出时程，图 16(b)表示高速列车前、后转向架横向作动器

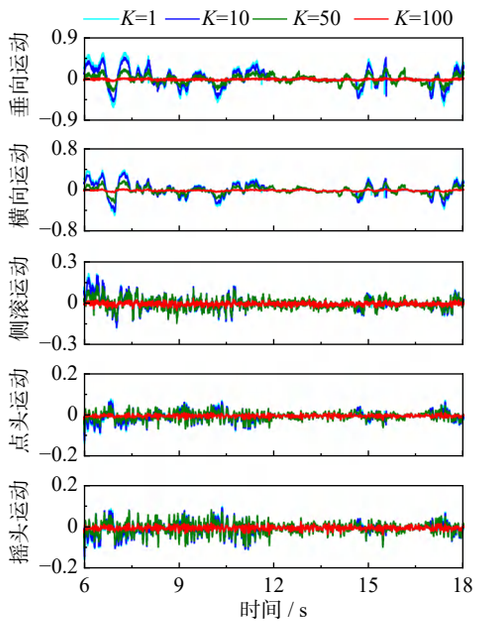
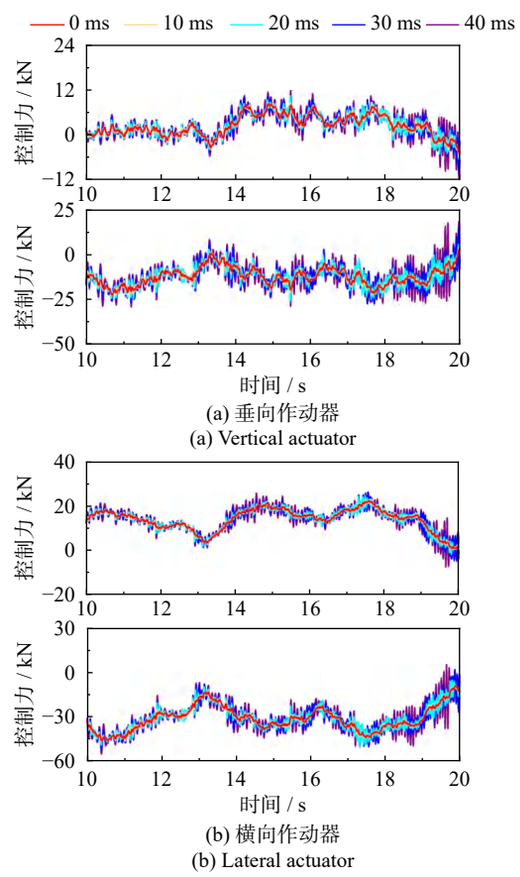


图 15 不同参数 K 下的约束误差

Fig. 15 Constraint errors under different parameter K



(a) 垂向作动器
(a) Vertical actuator

(b) 横向作动器
(b) Lateral actuator

图 16 不同作动器响应时间控制力时程曲线

Fig. 16 Time-history curves of control force of response time for different actuators

的输出时程。

从图 16 中可看出，随着时间常数的增大，即作动器延时效果愈加显著，作动器输出的控制力会产生波动，且横向作动器的控制力波动幅度相较于垂向作动器更加明显。当作动器的延时效应小于 10 ms 时，此时作动器的输出与无延时的作动器的输出差别很小；当作动器的延时效应大于 30 ms 时，此时作动器的控制力波动较为强烈。因此，需要将作动器的延迟时间控制在 30 ms 以内，才能保证主动悬挂系统的控制效果。

4 结 论

中国高速铁路列车在运行速度、运行里程以及运营范围等方面不断取得突破，然而复杂的运行环境给高速列车安全平稳运行带来了巨大的挑战。本文以传统被动悬挂系统难以保障复杂山区铁路随机横风环境下高速列车的安全平稳运行为研究背景，提出一种能够提升随机横风环境下高速列车运行平稳性和安全性的主动悬挂控制方法，仿真验证了所提出的自适应约束跟随控制策略的有效性。本文主要结论如下：

(1)在复杂横风环境下，传统高铁转向架被动悬挂系统无法保证复杂环境下高速列车的运行平稳性和运行安全性，而采用先进控制策略的主动悬挂系统能够大幅度提升高速列车的运行安全性和运行平稳性。

(2)相较于 QS(准静态控制策略)、SMC(滑膜控制策略)，本文提出的 AICFC-BIS 主动控制策略能够更加有效地提升高速列车运行平稳性与运行安全性。对于车速 300 km/h，随机风速 25 m/s 工况，在 AICFC-BIS 主动悬挂作用下，高速列车的垂向 Sperling 指标和横向 Sperling 指标分别降低了 42.7% 和 44.4%；轮重减载率和倾覆系数分别降低了 23.6% 和 25.3%。

(3)AICFC-BIS 控制策略中位移收敛参数 β_{ij}、自适应率构成参数 L 以及控制力计算参数 K 均对主动悬挂系统控制效果产生重要影响，适当增大相关控制参数取值，能够有效减小约束误差，进而提升自适应约束跟随主动控制悬挂系统的控制效果。

参考文献：

[1] COOPER R K. Atmospheric turbulence with respect to moving ground vehicles[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics，1984，17(2)：215-238.

[2] THOMAS D，DIEDRICHS B，BERG M，et al. Dynamics of a high-speed rail vehicle negotiating curves at unsteady crosswind[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers，Part F：Journal of Rail and Rapid Transit，2010，224(6)：567-579.

[3] NETO J，MONTENEGRO P A，VALE C，et al. Evaluation of the train running safety under crosswinds-a numerical study on the influence of the wind speed and orientation

considering the normative Chinese Hat Model[J]. International Journal of Rail Transportation，2021，9(3)：204-231.

[4] 毛军，郗艳红，杨国伟. 侧风风场特征对高速列车气动性能作用的研究 [J]. 铁道学报，2011，33(4)：22-30.
MAO Jun，XI Yanhong，YANG Guowei. Research on influence of characteristics of cross wind field on aerodynamic performance of a high-speed train[J]. Journal of the China Railway Society，2011，33(4)：22-30.

[5] 崔涛. 高速列车流固耦合振动及运行安全性研究 [D]. 成都：西南交通大学，2012.
CUI Tao. Study on fluid-solid coupling vibration and running safety of high-speed trains[D]. Chengdu：Southwest Jiaotong University，2012.

[6] 薛蕊，任尊松，查浩，等. 非稳态横风对货运动车组车体-集装器系统横向振动特性的影响 [J]. 振动工程学报，2020，33(3)：540-549.
XUE Rui，REN Zunsong，ZHA Hao，et al. The lateral vibration characteristic of the carbody-container coupled model of high-speed freight EMU under unsteady crosswind[J]. Journal of Vibration Engineering，2020，33(3)：540-549.

[7] 朱剑月，徐凡斐，朱颖谋，等. 高速列车头车安装裙板后流场与气动噪声特性仿真分析 [J]. 振动工程学报，2021，34(5)：1036-1044.
ZHU Jianyue，XU Fanfei，ZHU Yingmou，et al. Numerical investigation on flow and flow-induced noise behaviour of simplified high-speed train leading car with bogie fairing[J]. Journal of Vibration Engineering，2021，34(5)：1036-1044.

[8] HECKMANN A，KURZECK B，BÜNTE T，et al. Considerations on active control of crosswind stability of railway vehicles[J]. Vehicle System Dynamics，2014，52(6)：759-775.

[9] THOMAS D，BERG M，STICHEL S，et al. Rail vehicle response to lateral carbody excitations imitating crosswind[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers，Part F：Journal of Rail and Rapid Transit，2015，229(1)：34-47.

[10] 陈春俊，何洪阳，闫中奎. 气动载荷作用下高速列车横向振动虚拟惯性阻尼半主动控制研究 [J]. 振动与冲击，2016，35(20)：60-64.
CHEN Chunjun，HE Hongyang，YAN Zhongkui. Virtual inertial damping semi-active control for high-speed-train lateral vibration under aerodynamic loads[J]. Journal of Vibration and Shock，2016，35(20)：60-64.

[11] 李德仓，孟建军，胥如迅，等. 强风下高速列车滑膜自适应鲁棒 H_∞ 控制方法 [J]. 铁道学报，2018，40(7)：67-73.
LI Decang，MENG Jianjun，XU Ruxun，et al. Sliding mode adaptive robust H_∞ control method for high-speed train under strong wind conditions[J]. Journal of the China Railway Society，2018，40(7)：67-73.

[12] 金天贺，刘志明，任尊松，等. 高速列车半主动悬挂可变刚度和阻尼减振器适应性研究 [J]. 振动工程学报，2020，33 (4)：772-783.
JIN Tianhe，LIU Zhiming，REN Zunsong，et al. Adaptability of variable stiffness and damping shock absorber for semi-active suspension of high speed train[J]. Journal of Vibration Engineering，2020，33(4)：772-783.

[13] 张恒，凌亮，昌超，等. 基于线性轨道涡流制动器的高速列车风致安全主动控制研究 [J]. 机械工程学报，2022，58(8)：195-203.
ZHANG Heng，LING Liang，CHANG Chao，et al. Active control of crosswind safety of high-speed trains with linear track eddy current brake system[J]. Journal of Mechanical Engineering，2022，58(8)：195-203.

[14] ZHANG H，LING L，ZHAI W M，et al. An active suspension system for enhancing running safety of high-speed trains under strong crosswind[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers，Part F：Journal of Rail and Rapid Transit，2024，238(5)：544-558.

[15] SUN Z，DAI H Y，GAO H，et al. Dynamic performance of high-speed train passing windbreak breach under unsteady crosswind[J]. Vehicle System Dynamics，2019，57(3)：408-424.

[16] BAKER C J. The simulation of unsteady aerodynamic cross wind forces on trains[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics，2010，98(2)：88-99.

[17] ZHAO J Y，ZHANG H，LING L，et al. Bio-inspired structure constraints following control for enhancing hunting stability of high-speed trains[J]. IET Control Theory & Applications，2024，18(3)：316-334.

[18] LING L，ZHAO J Y，ZHANG H，et al. Adaptive robust constraint-following control method for improving carbody hunting stability of high-speed trains[J/OL]. Vehicle System Dynamics，1-22(2024-10-31)[2025-10-09]. https://doi.org/10.1080/00423114.2024.2421407.

[19] CHEN Y H. Approximate constraint-following of mechanical systems under uncertainty[J]. Nonlinear Dynamics and Systems Theory，2008，8(4)：329-337.

[20] 熊小慧，汪欣然，张洁，等. 升力翼对高速列车列车风与尾流特性的影响 [J]. 交通运输工程学报，2023，23(3)：148-161.
XIONG Xiaohui，WANG Xinran，ZHANG Jie，et al. Influence of lifting wing on train-induced wind and wake characteristics of high-speed train[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering，2023，23(3)：148-161.

[21] 马辉，牛留斌，俞志豪，等. 基于 EN 12299：2009 的中国高铁乘坐舒适性评价研究 [J]. 振动工程学报，2025，38(10)：2270-2275.
MA Hui，NIU Liubin，YU Zhihao，et al. Ride comfort evaluation of Chinese high-speed trains based on EN 12299：2009[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(10)：2270-2275.

通信作者：凌　亮(1986—)，男，博士，研究员。
E-mail：liangling@swjtu.edu.cn

车载数据驱动下重载列车纵向力实时预测方法

熊 芯[1], 何 闻[2], 常崇义[2], 张天婴[1]

（1. 中国铁道科学研究院集团有限公司机车车辆研究所, 北京 100081;
2. 中国铁道科学研究院集团有限公司铁道科学技术研究发展中心, 北京 100081）

摘要: 为实现兼顾计算精度与速度的列车纵向力实时预测, 本文建立基于车载与试验数据的重载列车纵向力实时计算精确方法, 其中机车牵引力/电制力通过车载监测数据更新, 列车基本运行阻力系数实现针对性自适应调整, 进一步比选空气制动系统的经验模型与流体模型, 同时建立高精度平衡迭代法以求解列车纵向动力学方程。为提高计算效率, 建立使用 Duhamel 积分求解振动响应的列车纵向力简化计算方法。以重载列车−9‰~−12‰典型长大下坡区段为算例, 精确方法在列车运行速度计算中的最大误差为 3.72 km/h, 并对缓冲器相对位移变化趋势、量级水平和关键冲击有较好的预测效果; 简化方法在一些列车操纵工况比较稳定的区段可以达到与精确方法相近的车钩力误差概率分布, 即误差约有 68% 的概率小于 64.6 kN, 有 95% 的概率小于 129.2 kN, 有 99.7% 的概率小于 193.8 kN。简化方法由于对缓冲器特性等的线性化考虑, 对列车操纵工况转换时的短时剧烈纵向冲击模拟较差。

关键词: 重载列车; 纵向动力学; 车载数据; 纵向力预测; 仿真结果评价
中图分类号: U270.1 **文献标志码:** A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202506045

Real-time prediction method of longitudinal forces in heavy-haul trains driven by vehicle-carried data

XIONG Xin[1], HE Wen[2], CHANG Chongyi[2], ZHANG Tianying[1]

（1.Locomotive and Rolling Stock Research Institute，China Academy of Railway Sciences Group Co.， Ltd.，Beijing 100081，China；
2.Railway Science & Technology Research & Development Center，China Academy of Railway Sciences Group Co.， Ltd.，
Beijing 100081，China）

Abstract: To achieve real-time prediction of train longitudinal forces with a balance between computational accuracy and speed，this study develops a real-time and accurate calculation method for heavy-haul trains longitudinal force based on onboard monitoring data and experimental data. The locomotive traction and electric braking forces are updated using onboard data， and the basic running resistance coefficients of the train are adaptively adjusted. Furthermore，the empirical model and fluid models of the air braking system are compared，and a high-precision equilibrium iteration method is established to solve the longitudinal dynamic equation of the train. To further improve computational efficiency，a simplified calculation method for train longitudinal forces is developed, in which the vibration response is solved using the Duhamel integral. Taking the example of heavy haul train passing through the typical long heavy down grade from –9‰~–12‰，the precise method shows a maximum error of 3.72 km/h in predicting the train operating speed，and achieves good agreement with respect to the relative displacement trend， magnitude， and key impact responses of the buffer. The simplified method yields a coupler force error distribution similar to that of the precise method in sections where the train operation is relatively stable，with approximately 68% of the errors less than 64.6 kN，95% less than 129.2 kN，and 99.7% less than 193.8 kN. However, due to the linearized treatment of buffer characteristics and related parameters, the simplified method performs poorly in simulating short-term severe longitudinal impacts during transitions in train operating conditions.

Keywords: heavy-haul train; longitudinal dynamics; vehicle-carried data; longitudinal force prediction; evaluation of simulation results

随着 3 万吨重载列车逐渐运行, 中国重载运输进入了全新的发展阶段。但由于重载列车运输吨位的不断提高, 列车编组长度增大, 重载组合列车的操纵难度进一步加大, 列车纵向力变化更为复杂[1]。司机

收稿日期: 2025-06-20; **修订日期:** 2025-08-29
基金项目: 中国国家铁路集团有限公司科技研究开发计划项目（P2024J002）; 中国铁道科学研究院集团有限公司科研开发基金资助项目（2024YJ217）

操纵不慎轻则导致中途停车，严重影响运输效率；重则直接导致列车断钩、脱轨事故的发生，威胁运输安全。针对这一问题，最为有效的方法是在列车运行时明确重载列车的全列纵向冲动变化，这有助于司机了解列车全列受力情况，及时改善列车操纵，提高运行品质。

由于传统列车纵向动力学仿真方法是列车运行事后分析，并不能直接帮助司机及时改善关键地段或地点的操纵，目前国内也并无适用于车载计算工况的列车纵向动力学计算的成熟产品，因此本文建立基于车载数据的列车纵向冲动在线预测精确和简化计算两类方法。车载精确计算方法兼顾计算精度与实时性，利用实时车载数据实现对关键模型参数的自适应调整，有效实时预测计算重载列车全列纵向冲动变化状态，帮助司机改进关键操纵；车载简化方法则可与精确方法在不同运行工况和计算条件下相互补充，提高对车载计算场景的适应性。

在列车纵向动力学仿真理论研究方面，COLE 等[2]通过对常见的钩缓系统类型的仿真对比，对其纵向动力学性能和疲劳磨损等表现进行了深入分析和说明。WU 等[3]将润滑摩擦模型引入摩擦缓冲器模型化方法中，此后对胶泥缓冲器的动力学特性进行了细致研究。常崇义等[4]通过建立重载列车纵向动力学仿真模型，对 2 万吨组合列车纵向力在不同延迟时间和制动初速下的变化规律进行了研究，对 4 万~12 万吨[5]重载列车在编组长度、机车无线同步控制延迟时间和长大下坡道的坡度差等因素影响下的纵向力规律进行了分析。魏伟等[6]通过建立列车空气制动系统与列车纵向动力学联合仿真模型，对 3 万吨组合列车纵向力在不同从控机车滞后时间下的规律以及循环制动过程进行了研究；又利用联合仿真模型，研究了列尾装置对 2 万吨组合列车的影响[7-8]。在试验研究方面，中国铁道科学研究院在大秦[9-10]、瓦日[11]、唐呼[12]、朔黄[13]和晋中南通道[14]等多条重载铁路开展了系列重载列车综合试验，采用无线网络传输的分布测量方式检测了关键断面的车钩力、车体加速度等动态响应，研究了不同编组方式、牵引制动工况、速度和线路条件下的列车纵向动力学性能，为深入研究纵向动力学作用机理提供了宝贵的试验数据。

本文通过分析列车纵向动力学计算的关键子系统模型化方法与模型输入数据来源，比选经验模型与流体空气制动系统模型的计算效率和计算精度，使用遗传算法自适应调整基本阻力系数，建立基于车载数据的列车纵向动力学计算精确方法；此外为进一步提高计算效率，建立使用 Duhamel 积分求解振动响应的列车纵向力简化计算方法。在典型长大下坡区段进行算例分析，并基于列车纵向动力学计算特点全面评价列车运行速度、纵向力和缓冲器位移等列车纵向动力学指标，以期为车载场景下的列车纵向动力学计算，重载列车在线安全监测和辅助驾驶技术迭代等提供一种有效的计算解决方案。

1　基于车载数据的列车纵向力实时预测精确方法

在传统列车纵向动力学仿真理论的基础上，实现精确的重载列车纵向冲动预测并兼顾列车纵向动力学仿真精度与速度的关键有如下方面[15]：

（1）实现对重载列车编组各主要子系统工作特性（如机车牵引电制特性、空气制动系统工作特性和钩缓装置工作特性等）的准确模拟而不显著增加算力需求[16]；

（2）正确处理列车各子系统的耦合控制关系（如组合列车动力分布无线控制系统的指令延时传递过程、无线控制系统与空气制动系统的耦合控制过程等）[17]；

（3）高精度多体动力学数值积分方法和编程求解优化方法；

（4）合理有效的动力学计算结果评估。

基于以上要求，从列车纵向动力学计算原理出发，结合车载数据建立一种重载列车纵向力实时预测精确方法。

1.1　基于车载数据实时更新机车牵引力/电制力

基于实时车载数据动态更新机车牵引力或电制力，可在列车纵向动力学计算中获得最准确的机车信息输入，避免传统列车纵向动力学仿真中由于对机车牵引电机工作特性不确定或受外部因素（指令时间、温升、网压波动等）随机影响而造成的误差积累。图 1 为在中国某段平均坡度为−10‰的长大下坡循环制动时的机车牵引力/电制力变化曲线，可见在级位转换时实际电制力有较大的波动或冲击，可达到 50~100 kN，影响编组中机车及其相邻货车的纵向冲动计算精度。

1.2　车钩缓冲装置模型

在列车纵向力实时预测精确方法中，通过货车单车冲击试验确定车钩缓冲装置滞回特性曲线，如图 2 和 3 所示，其中胶泥缓冲器比钢摩擦缓冲器在加载过程中更易出现局部的震荡，主要是由胶泥高分子特性和胶泥缓冲器结构导致[18]。在试验数据的基础上，针对不同类型的缓冲器，进一步考虑黏滞区域摩擦力尖峰、静压弹性性能和速度阻尼效应等特

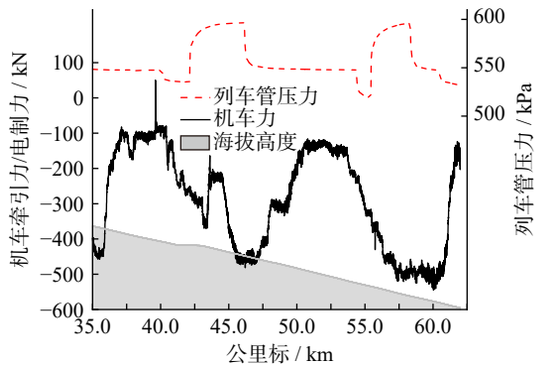


图 1 循环制动时机车牵引力/电制力变化曲线

Fig. 1 Variation curves of traction force/electric braking force of locomotive during cyclic braking

性[19-20]。通过对大量冲击试验数据进行回归分析并基于其力学特性[21]，融合建立车钩缓冲器数值模型：

$$F_c(t)=FE_t+[F_c(t-\Delta t)-FE_t]\exp\left(\frac{-|x_t-x_{t-\Delta t}|}{\beta_k}\right) \quad (1)$$

式中，$F_c(t)$为当前时间步t时的车钩力；$F_c(t-\Delta t)$为前一时间步$t-\Delta t$时的车钩力；x_t为当前时间步t时的车钩缓冲器行程；$x_{t-\Delta t}$为前一时间步$t-\Delta t$时的车钩缓冲器行程；β_k为控制上下边界力连线变化率的控制参数；FE_t为某一类型缓冲器的动态加载特性曲线上的对应值。

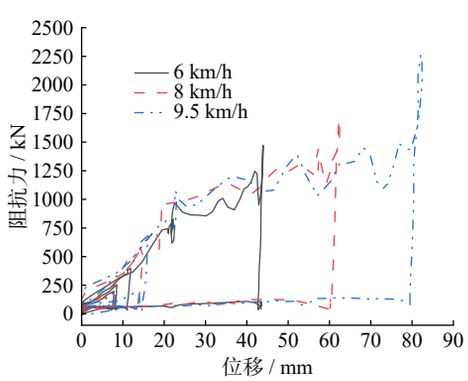


图 2 钢摩擦缓冲器冲击试验滞回特性曲线

Fig. 2 Hysteresis characteristic curves of impact test for steel friction buffer

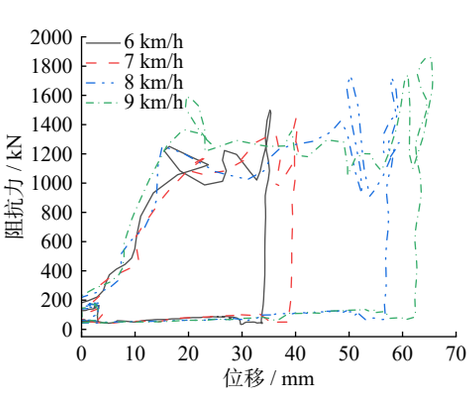


图 3 胶泥缓冲器冲击试验滞回特性曲线

Fig. 3 Hysteresis characteristic curves of impact test for polymer buffer

钢摩擦缓冲器工作时的黏滞区域摩擦力尖峰f_a和胶泥缓冲器的速度阻尼效应f_d可以分别表示为[19]：

$$f_a(x_t,\dot{x}_t)=f(x_t)\cdot(v_c-|\dot{x}_t|)\cdot(\mu_s-\mu_k)/v_c \quad (2)$$

$$f_d(x_t,\dot{x}_t)=cf(b-x_t)\dot{x}_t^{nf} \quad (3)$$

式中，$f(x_t)$为缓冲器加载平稳区特性曲线；μ_s和μ_k分别为缓冲器内部等效静摩擦和滑动摩擦系数；v_c为钢摩擦黏滞临界速度；cf为与速度相关的阻尼系数；b为预压行程；nf为速度因子。

通过对FE_t附加f_a和f_d等不同的工作特性，实现对缓冲器加载、黏滞摩擦和卸载等非线性工作特性的模拟[22]，如图 4 所示，冲击试验数值模拟中可模拟出明显的黏滞摩擦和速度阻尼效应，冲击能量在两次冲击压缩中吸收耗散。因此在列车纵向力实时预测精确方法中实现对车钩缓冲模型动态行为的精确模拟和预测。

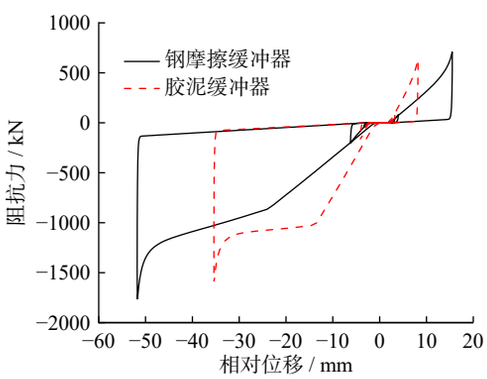


图 4 钢摩擦与胶泥缓冲器模拟

Fig. 4 Simulation of steel friction buffer and polymer buffer

1.3 基本运行阻力系数的自适应调整方法

传统列车纵向动力学计算中表明，《列车牵引计算 第 1 部分：机车牵引式列车》[23]（以下简称“牵规”）所规定的基本阻力计算系数并不能很好的与实际吻合。本文在牵规中对于基本阻力计算的二次多项式基础上，通过遗传算法进行基本阻力计算系数优化，微调寻优出一组与实际速度变化拟合较好的基本运行阻力系数。该方法基于一段列车无空气制动区段实际操纵序列，通过车载数据动态更新当前机车实际牵引力/电制力，进而控制列车基本运行阻力为自变量，以最小化速度误差的均值为目标函数F：

$$\min F=\sum_{i=1}^{N}|v_i-v_{ri}| \quad (4)$$

式中，v_i为公里标i处的仿真速度；v_{ri}为公里标i处的实际测试速度；N为离散区间个数。

将机车基本运行阻力系数a_l、b_l、c_l和货车基本运行阻力系数a_w、b_w、c_w根据各自的数值精度编码

为占据不同长度的二进制序列，如图 5 所示。通过交叉、选择和变异等操作寻找到最优染色体序列并解码输出，具体流程如图 6 所示。

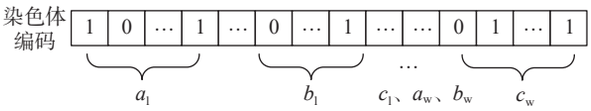


图 5　染色体编码格式

Fig. 5　Encoding format of chromosome

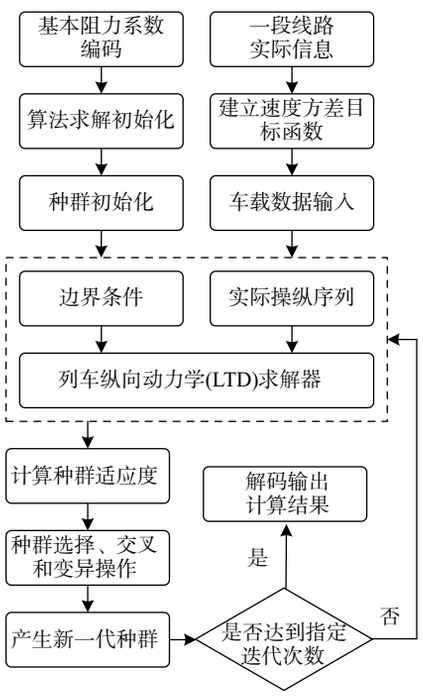


图 6　基本阻力系数优化求解流程

Fig. 6　Optimization solution process for the basic resistance coefficient

以中国某重载线路实际车载数据为例，截取一段 2 km 长度的无空气制动和缓解的平缓坡度线路区段数据（平均坡度为−0.2‰）进行基本运行阻力系数的自适应调整，列车编组形式为“1+1+可控列尾”组合 2 万吨形式，机车和货车的重车基本阻力系数初值按照牵规取值，即 a_l=1.2，b_l=0.0065，c_l=0.000279，a_w=0.92，b_w=0.0048，c_w=0.000125。遗传算法种群规模取为 20，交叉概率为 0.9，变异概率为 0.15。

使用本文的基本阻力系数自适应调整方法后，结果如图 7 和 8 所示，种群适应度在第 6 次种群迭代后趋于稳定。此时优化后的基本阻力系数为 a_l=1.0473，b_l=0.0028，c_l=0.000224，a_w=0.4662，b_w=0.0021，c_w=0.000061。优化后的阻力系数得到的列车速度与实际速度最大误差为 0.3 km/h，达到了与实际较好的吻合程度。

1.4　两类列车空气制动系统模型

列车空气制动是列车运行过程中的关键子系统，

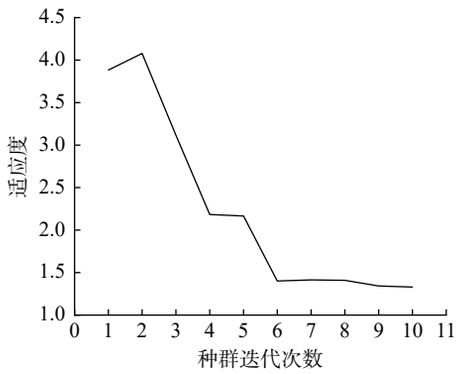


图 7　种群最优个体适应度变化

Fig. 7　Variation of fitness of optimal individual in the population

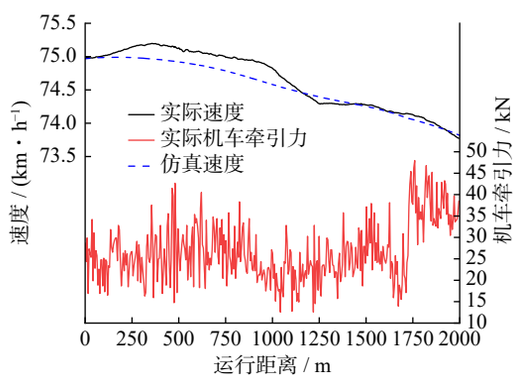


图 8　优化前后速度变化对比

Fig. 8　Comparison of speed changes before and after optimization

国内外针对列车空气制动系统的模型化方法[24]一般有基于大量实测数据的经验模型和基于气体流动原理的流体模型。本文中对于两类模型的构建过程和应用效果如下。

1.4.1　空气制动系统经验模型

经验模型根据具备实际经验的专家知识及试验数据建立制动机模型。该模型忽略了空气具体流动过程，只关注关键的列车管压和制动缸压变化情况。按照列车制动作用顺序分为制动信号及传递（制动波速）、空气制动压力变化（三通阀）和制动力的产生（基础制动）三个子程序进行逐步模拟。

不同减压量下的制动波速和缓解波速可根据试验数据确定，进一步建立下式考虑漏泄和列车管压力梯度的列车管压模型[25]：

$$PP_i \propto (p_0, s, l, dp) \tag{5}$$

式中，PP_i为列车管压变化；p_0为列车管定压；s为第 i辆车在编组中的位置；l为列车管漏泄量；dp为列车管减压量。

制动缸压变化BCP_i计算采用分段函数和幂函数形式，如下式所示：

$$BCP_i \propto \begin{cases} 0, & t_i < t_i^{\mathrm{s}} \\ (p_i^{\mathrm{m}}, t_i, s, dp), & t_i^{\mathrm{s}} \leqslant t_i \leqslant t_i^{\mathrm{m}} \\ p_i^{\mathrm{m}}, & t_i > t_i^{\mathrm{m}} \end{cases} \tag{6}$$

式中，t_i为当前时间；t_i^{s}为编组第i辆车的开始制动时间；t_i^{m}为制动缸压力达到最大的时间；p_i^{m}为第i辆车的最大制动缸压力。

1.4.2 空气制动系统流体模型

该模型考虑真实列车空气制动系统结构和空气流动过程，是基于空气流动理论的空气动力学空气制动系统模型。对于真实空气流动过程的计算求解方式有特征线法、有限差分法[26]和有限体积法等数值方法。本文采用特征线法建立流体模型，主要分为空气管路状态计算、边界处理、系统缸压状态计算和阀芯位置判断等部分。由于实际空气制动系统使用过程中温升变化不明显，因此在此将管内流动视为一维有摩擦等温流动[8]，N-S 流动方程如下式所示：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f \frac{u^2}{2} \frac{u}{|u|} \frac{4}{D} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

式中，ρ、u、p、D、x、f分别为空气密度、空气流速、气体压力、水力直径、位移、管壁摩擦系数。

将N-S方程根据特征线理论转换为黎曼变量λ、β[27]，不同时间步间的黎曼变量增量$\Delta\lambda$计算为：

$$\Delta\lambda = -\frac{k-1}{2} \frac{2 f x_{\mathrm{r}}}{D} \left(\frac{\lambda - \beta}{k-1} \right)^2 \frac{(\lambda - \beta)}{|\lambda - \beta|} \left[1 - \frac{2(\lambda - \beta)}{\lambda + \beta} \right] \Delta Z \tag{8}$$

式中，k为绝热系数；x_{r}为参考长度；ΔZ为无量纲时间增量。

气缸与外部气体交换的气体流量$\dot{m}$采用下式计算[28]：

$$\dot{m} = \begin{cases} \dfrac{P_1 A_{\mathrm{e}}}{a_{\mathrm{u}}} \left\{ \left(\dfrac{2k^2}{k-1} \right) \left(\dfrac{P_2}{P_1} \right)^{2/k} \left[1 - \left(\dfrac{P_2}{P_1} \right)^{(k-1)/k} \right] \right\}^{1/2}, & \dfrac{P_2}{P_1} > \left(\dfrac{2k}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \text{(亚声速流动)} \\ \dfrac{P_1 A_{\mathrm{e}}}{a_{\mathrm{u}}} k \left(\dfrac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/[2(k-1)]}, & \dfrac{P_2}{P_1} \leqslant \left(\dfrac{2k}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \text{(壅塞流)} \end{cases} \tag{9}$$

式中，P_1和P_2为开口两侧压强；A_{e}为开口面积；a_{u}为上游声速。

针对 120/120-1 分配阀，主要计算主阀活塞和滑阀活塞位置，可以判断制动机所处的具体工况（如缓解、减速缓解、制动、紧急制动或保压等）。120/120-1 分配阀组成简化图如图 9 所示，并依次建立联通关系和孔径开放逻辑，即可建立流体模型。

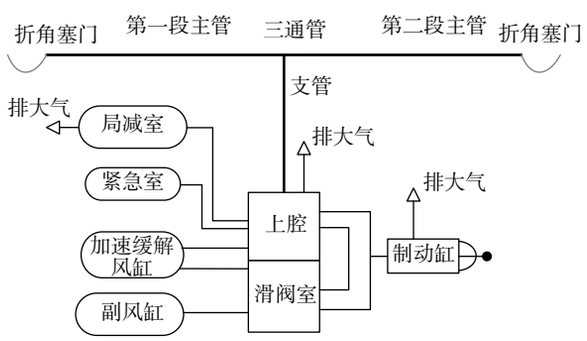


图 9 120/120-1 分配阀组成简化图

Fig. 9 Diagram of the composition of 120/120-1 distributing valve

根据以上模型化原理，建立经过试验数据校准后的经验模型与经过关键参数校准的流体模型，主要针对两类空气制动系统数值模型的计算精度与计算效率进行对比分析。两类空气制动系统模型主要计算参数如表 1 所示。

以“1+1+可控列尾”组合列车编组形式为例，单元编组内货车数量为 108 辆，货车采用 120 制动阀，以最常用的初制动减压为例进行仿真对比，硬件设备为 Intel i7-12700H 14 核 2.3 GHz 处理器和 16 GB 内存，使用 C++编程语言编写模型仿真，编组内的 216 辆货车的制动缸压状态依次计算。对比结果如表 2 所示。

表 1 两类空气制动系统模型主要计算参数

Tab. 1 Main calculation parameters of two types of pneumatic braking system models

模型	模型参数	数值
流体模型	主管网格长度/m	0.675
	支管网格长度/m	0.300
	时间步长/s	由稳定性准则决定
经验模型	时间步长/s	0.2

表 2 两类空气制动系统模型计算效率对比

Tab. 2 Comparison of calculation efficiency between two types of pneumatic braking system models

模型	仿真列车运行时长/s	实际计算耗时/s
经验模型	100	29
流体模型	100	97

两类模型计算结果与实际试验数据的对比如图 10 和 11 所示，图中车辆序号不含机车。

由以上计算对比可见，流体模型由于需要求解流体流动状态和缸压状态，对设备算力要求较高，耗时长，但能较为细致地反映空气制动系统的各类升压、保压等工作特性和具体的空气制动系统结构特征的影响；经验模型的计算效率较高，满足车载实时性计算要求，但需要大量试验数据对模型校准且不能细致地反映空气制动系统的内部特征影响。两类模型的选用应根据列车纵向动力学计算的具体场景

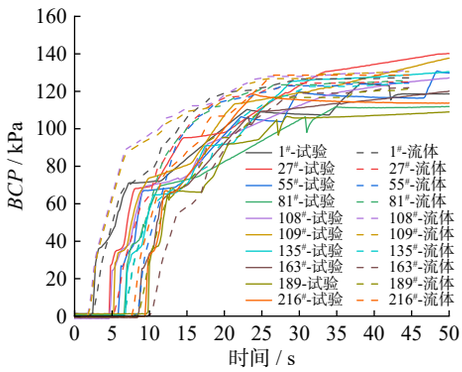


图 10　流体模型计算结果与试验数据对比

Fig. 10　Comparison of calculation results and test data of the fluid model

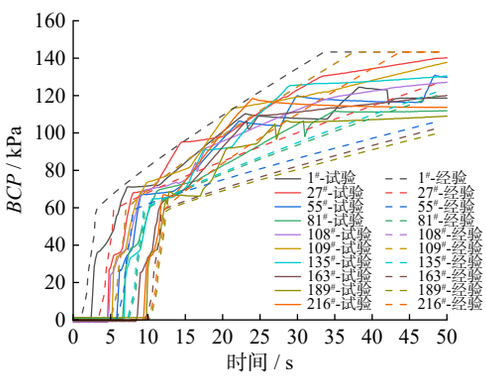


图 11　经验模型计算结果与试验数据对比

Fig. 11　Comparison of calculation results and test data of the empirical model

进行选择。

在列车纵向力精确计算方法中，研究重心并不是列车空气制动系统的动态压力特性，因此结合实测压力数据，采用计算效率更高的空气制动系统经验模型。

1.5　多体系统数值积分方法

列车纵向动力学方程是一组复杂的非线性方程，含有多种非线性因素，如缓冲器的非线性阻抗特性、车钩间隙和非线性运行阻力计算等[29]。目前求解非线性动力方程主要采用直接数值积分方法。本文将列车整车运动学计算与编组内单车计算分离，以满足不同工况需求。

列车整车运动学采用计算加速度变化率的直接积分方式求解，在一个Δt时间步内有如下计算公式：

$$\begin{cases} a_{t+\Delta t}=F_{t+\Delta t}/m \\ a_t=F_t/m \\ j=(a_{t+\Delta t}-a_t)/\Delta t \\ v_{t+\Delta t}=v_t+(a_t+\alpha\cdot j\cdot\Delta t)\Delta t \\ s_{t+\Delta t}=s_t+[v_t+(a_t+\alpha'\cdot j\cdot\Delta t)\Delta t]\Delta t \end{cases} \tag{10}$$

式中，F_t、$F_{t+\Delta t}$分别为前、后两个时刻的合外力；m为列车质量；a_t、$a_{t+\Delta t}$分别为前、后两个时刻的加速度；v_t、$v_{t+\Delta t}$分别为前、后两个时刻的速度；s_t、$s_{t+\Delta t}$分别为前、后两个时刻的位置；j为加速度变化率；α和α'为运动学计算调整系数。

编组内单车计算采用基于 Newmark-β 的高精度平衡迭代法求解，即在 Newmark-β 数值积分法基础上，进一步把逐步积分法应用于非线性方程的响应计算，在$t+\Delta t$时刻系统增量平衡式为：

$$\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{u}}_{t+\Delta t}-\ddot{\boldsymbol{u}}_t)+\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}(\Delta\boldsymbol{u}_t)=\boldsymbol{F}_{t+\Delta t}-\boldsymbol{F}_t \tag{11}$$

式中，$\boldsymbol{M}$为质量矩阵；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}$为刚度矩阵；$\ddot{\boldsymbol{u}}_t$和$\ddot{\boldsymbol{u}}_{t+\Delta t}$分别为$t$和$t+\Delta t$时刻的加速度矩阵；$\Delta\boldsymbol{u}_t$为$t$时刻的相对位移矩阵；$\boldsymbol{F}_t$和$\boldsymbol{F}_{t+\Delta t}$分别为$t$和$t+\Delta t$时刻的抵抗变形的力矢量。

由于$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}$是随迭代进程而变动的，只有当它变动到最终的平衡位置时才能找到近似解，因此平衡迭代法的核心思想是以线性结果近似，并计算由此产生的不平衡力，重复迭代直至不再产生不平衡力，如图 12 所示，图中，u_t和$u_{t+\Delta t}$为 t 和$t+\Delta t$时刻的相对位移；ΔF为初始不平衡力；K_{T}^n为初始斜率；$\Delta u_t^{(0)}$为迭代后相对位移差；K_{T}^0为迭代后斜率；$\Delta\widetilde{F}^{(1)}$为迭代后不平衡力。

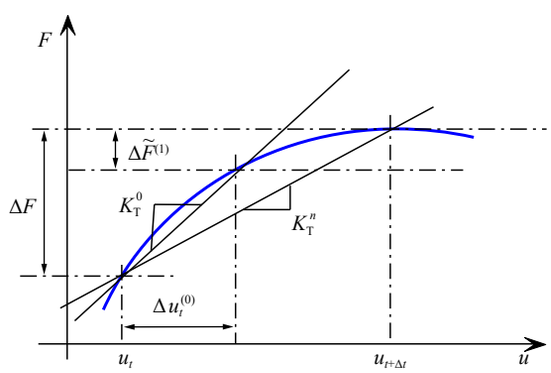


图 12　逐步积分的增量步迭代过程

Fig. 12　Incremental step iteration process of step-by-step integration

2　基于车载数据的列车纵向力简化计算方法

车载数据与模型机理融合驱动的列车纵向冲动精确计算方法虽然已达到较高的计算效率，但在部分需要大量迭代计算预测前方列车纵向受力情况的工况下（如辅助驾驶时对前方复杂坡段的最优车钩力解算等），仍需建立一种计算效率更高，满足车载设备短时大量计算需求的可靠方法。

由于应用场景不同，前述列车纵向力精确计算方法中所采用的非线性钩缓系统模型和空气制动系统经验模型不适用于简化方法计算，此处采用如下假设或近似建立基于车载数据的列车纵向力快速计算简化方法：机车车辆间采用线弹性连接，机车、车

辆间的钩缓连接近似为弹簧系统[15, 30]; 制动、缓解时不同制动缸的升压、降压曲线相同, 制动缓解波传播速度为常数, 摩擦系数为常数。

一般对于长大列车, 建立其列车纵向多质点方程式:

$$m_i\ddot{y}_i = F_{ci-1} - F_{ci} - F_{wi} + F_{TEi} - F_{DBi} - F_{Bi} \tag{12}$$

式中, $\ddot{y}_i$为第i辆车的加速度; m_i为第i辆车的质量; F_{ci}为第i辆车的后车钩力(其中F_{c0}表示第1辆车的前车钩力), F_{c0}=0, F_{cn}=0; F_{wi}为第i辆车的总运行阻力, 包括等效运行阻力、坡道阻力、曲线阻力、起动阻力等; F_{TEi}为牵引力, 仅作用于机车; F_{DBi}为动力制动力, 仅作用于机车; F_{Bi}为第i辆车的空气制动力。

此处将钩缓模型近似为弹簧系统, 假设各车连接刚度近似为线性刚度k_i和比例阻尼c_i, 以避免复杂度较高的不平衡力迭代计算:

$$F_{ci} = k_i(y_i - y_{i+1}) + c_i(\dot{y}_i - \dot{y}_{i+1}) \tag{13}$$

代入列车纵向动力学方程, 可得矩阵形式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{y}\big|_{t=0} = y_0 \\ \dot{\boldsymbol{y}}\big|_{t=0} = \dot{y}_0 \end{cases} \tag{14}$$

式中, y_0和$\dot{y}_0$分别为位移和速度初值。进一步可将方程变换为下式所示的相对位移形式:

$$\boldsymbol{M}'\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}'\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}' \tag{15}$$

其中:

$$u_i = y_i - y_{i-1} \tag{16}$$

式中, $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{M}'$分别为转换前、后机车车辆的质量矩阵; $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{K}'$分别为转换前、后系统的总刚度矩阵; $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{C}'$分别为转换前、后的阻尼矩阵; $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$分别为转换前、后的外加激励; $\boldsymbol{y}$、$\dot{\boldsymbol{y}}$和$\ddot{\boldsymbol{y}}$分别为多质点体系各质点相对于平衡点的位移、速度和加速度向量; $\boldsymbol{u}$、$\dot{\boldsymbol{u}}$和$\ddot{\boldsymbol{u}}$分别为各车相对位移、相对速度和相对加速度向量。

对方程进行正则化, 可以将式(14)简化为单自由度的振动方程式:

$$\begin{cases} M_p\ddot{y}_p + C_p\dot{y}_p + K_p y_p = F_p \\ y_p\big|_{t=0} = y_{p0} \\ \dot{y}_p\big|_{t=0} = \dot{y}_{p0} \end{cases} \tag{17}$$

采用相对位移也有类似公式。中国的重载列车编组中货车多为同一车型, 质量、刚度、阻尼参数相同, 忽略阻尼时, 可以估计式(17)的第一非零频率(即第2阶频率), 该频率近似为$f_2 = \sqrt{k_i/m_i}/2N$。

将外加激励正则化后, 可以通过Duhamel积分求解响应。对于施加牵引力F_{TEi}、电制力F_{DBi}可以通过阶跃函数模拟外加激励, 对于运行阻力F_{wi}通过分段线性和阶跃函数模拟, 从而求解响应y_p。

$$y_p = \frac{1}{m_i\omega'} \cdot \int_0^t F_p e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega'(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{18}$$

式中, ω为系统固有圆频率; ω'为阻尼作用下实际圆频率; ξ为系统阻尼比; τ为时间积分变量。

对于制动力F_{Bi}, 此处考虑空气制动系统中的关键因素, 即升压特性和制动波传播特性。在升压时间T_c, 外加激励幅值F_0时, 制动缸压力F_p按指数函数近似为关系式:

$$F_p = F_0 \cdot \left(1 - e^{-t/T_c}\right) \tag{19}$$

此时, 根据式(17)振动方程有解析解式:

$$y = F_0 \cdot \left[1 - \frac{(\omega')^2 \cdot T_c^2}{1 + (\omega')^2 \cdot T_c^2} \cdot e^{-t/T_c}\right] + \sqrt{\left[\frac{\omega' \cdot T_c}{1 + (\omega')^2 \cdot T_c^2}\right]^2 + \left[y_0 + \frac{\omega' \cdot T_c}{1 + (\omega')^2 \cdot T_c^2}\right]^2} \cdot \sin(\omega' \cdot t + \alpha) \tag{20}$$

列车纵向力简化计算方法由于在钩缓模型、空气制动系统模型、阻力模型、编组形式和方程转化等方面做了较多近似, 从而求得振动方程的解析解, 因此在牺牲部分求解精度的前提下极大地提高了纵向力求解速度。

3 长大下坡区段算例分析

长大下坡区段的长波浪循环制动操纵是重载线路有别于一般货运线路的重要特征[31], 以中国某重载线路的一段长大下坡实测运行数据为例, 对上述两类重载列车纵向力实时预测方法进行算例分析, 并与实际运行数据进行对比分析。

对基本运行阻力系数的离线调整采用上述基本阻力系数自适应调整方法, 使用优化后的基本运行阻力系数, 即a_l=1.0473, b_l=0.0028, c_l=0.000224, a_w=0.4662, b_w=0.0021, c_w=0.000061。为保证实时计算效率, 空气制动系统模型采用经过空气制动试验数据校准的经验空气制动模型。

选取的线路全长为13 km(K44+000~K57+000), 纵断面为−9‰~−12‰长大下坡, 最小曲线半径为500 m, 无电分相区段。编组参数如表3所示。列车操纵序列为实际司机操纵序列, 计算硬件设备为Intel i7-12700H 14核2.3 GHz处理器和16 GB内存, 单线程计算。

峰值误差指标体现了在循环制动风险点处对车钩力极值模拟的准确性; *RMSE*与*MAE*体现了总运行距离内速度与车钩力计算与实测值的平均误差; R^2表示

表3 列车编组参数

Tab. 3 Train marshalling parameters

计算参数	参数说明
列车编组形式	HXD1 + C80×108辆 + HXD1 + C80×108辆 + 可控列尾
编组牵引总重	2.16万吨
缓冲器类型	机车: QKX100胶泥缓冲器; 车辆: MT-2摩擦缓冲器
编组连挂形式/车钩间隙	两辆一组/9.5 mm
同步控制延迟时间	3 s

对速度与车钩力变化趋势和极值预测计算的准确性。

对上述典型 13 km 长大下坡算例的计算结果进行统计，以均方根误差 *RMSE*、平均绝对误差 *MAE* 和确定系数 R^2 等为量化指标进行分析。结果如表 4 所示。此外考虑到列车纵向动力学试验中的测试结果具有较强的离散性，统计中的车钩力峰值误差在此特指循环制动缓解前后（循环制动风险点），仿真车钩力最大值与实测最大值的差距。

由表 5 结果可知：（1）基于文中硬件配置，精确方法的时间步长取为 0.2 s，对于 2 万吨组合列车，精确方法可在 1 s 内快速预测计算前方 50.4 m 线路长度的列车纵向力、加速度和相对位移等多种信息；简化方法可更快速地计算前方 7222.2 m 线路长度的列车纵向力；简化方法的车钩力计算效率较精确方法提高约 143 倍，两类方法均满足实时计算要求。（2）精确方法对于速度的平均计算误差小于 2 km/h，速度 R^2 接近 0.98，表明精确方法对于列车编组运动学计算精度较高，简化方法不涉及对速度的计算。（3）车钩力 *RMSE* 和 *MAE* 指标表明，本文精确方法和简化方法在总体车钩力变化趋势上都实现了较好的预测；但从峰值误差和 R^2 来看，精确方法对循环制动关键工况转换时的剧烈冲击有较好的模拟（如图 13 所示），而简化方法由于使用线性车钩刚度-阻尼模

表 4　预测方法计算结果

Tab. 4　Calculation results of the prediction methods

计算方法	关键参数	数值
—	列车实际运行时间/s	821.0
精确方法	计算总耗时/s	257.9
	速度最大误差/(km·h^{-1})	3.72
	速度*RMSE*/(km·h^{-1})	1.61
	速度*MAE*/(km·h^{-1})	1.27
	速度R^2	0.9799
简化方法	计算总耗时/s	1.8

表 5　不同测试车位车钩力计算结果

Tab. 5　Calculation results of coupler forces for different test vehicle positions

计算方法	车钩力统计	2#	28#	56#	82#	108#	111#	137#	163#	191#	217#
精确方法	峰值误差/kN	57.9	14.5	177.8	119.8	121.8	264.2	126.3	125.9	101.9	344.9
	RMSE/kN	36.3	58.2	82.6	92.5	117.9	106.7	94.6	116.9	63.3	15.6
	MAE/kN	34.6	43.9	63.6	66.7	92.3	78.4	74.6	97.9	47.9	9.1
	R^2	0.9008	0.7692	0.4369	0.5788	0.5717	0.5648	0.6527	0.5570	0.3223	0.1347
简化方法	峰值误差/kN	70.9	286.7	268.4	353.9	396.2	377.9	260.5	226.0	173.7	349.7
	RMSE/kN	70.7	66.1	84.6	82.9	111.3	108.7	92.1	121.8	74.8	14.6
	MAE/kN	70.7	55.8	72.4	67.2	91.1	84.2	72.3	101.0	57.2	7.8
	R^2	0.6227	0.7026	0.4092	0.6609	0.6187	0.5480	0.6715	−0.0243	0.0556	0.0119

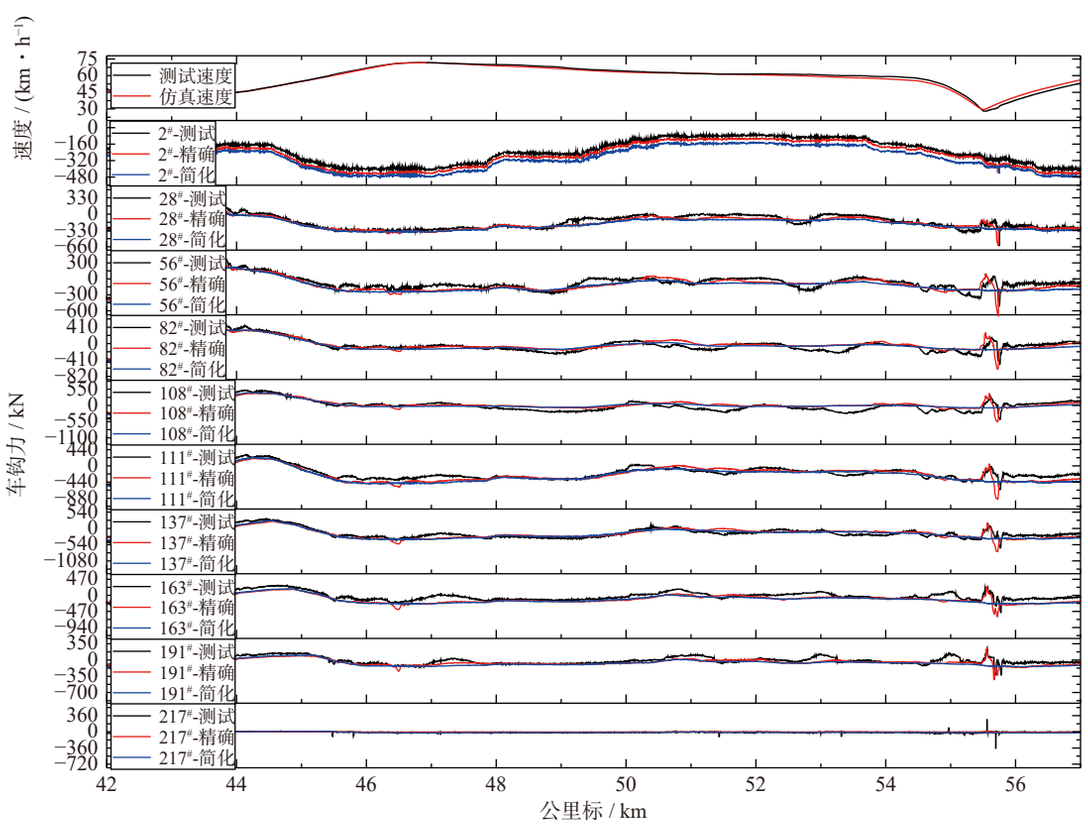


图 13　典型测试车位车钩力对比

Fig. 13　Comparison of coupler forces for typical test vehicle positions

型，不能反映车钩间隙、黏滞摩擦力和速度阻尼力等特性，不能对组合列车同步操纵延迟有效模拟等原因，并未模拟出短时纵向冲击；两类方法对列车尾部车辆的短时冲击计算效果较差。(4)图 14 中，精确方法在缓冲器相对位移的计算中，对于缓冲器位移的变化趋势、量级水平和关键纵向冲击点都有较好的模拟，但由于缓冲器位移变化具有强离散性和随机性，精确计算方法并不能在所有车位和整个运行时间内全部实现精确预测模拟。(5)简化方法通过振动方程解析解仅计算车钩力，虽然牺牲了部分计算结果精度，但相比数值求解其计算速度获得极大提高，适合牵引/惰行等工况，或纵向力计算需求密集场景的车钩力求解；精确方法则适用于空电联合制动和缓解等对计算精度要求高的计算场景。

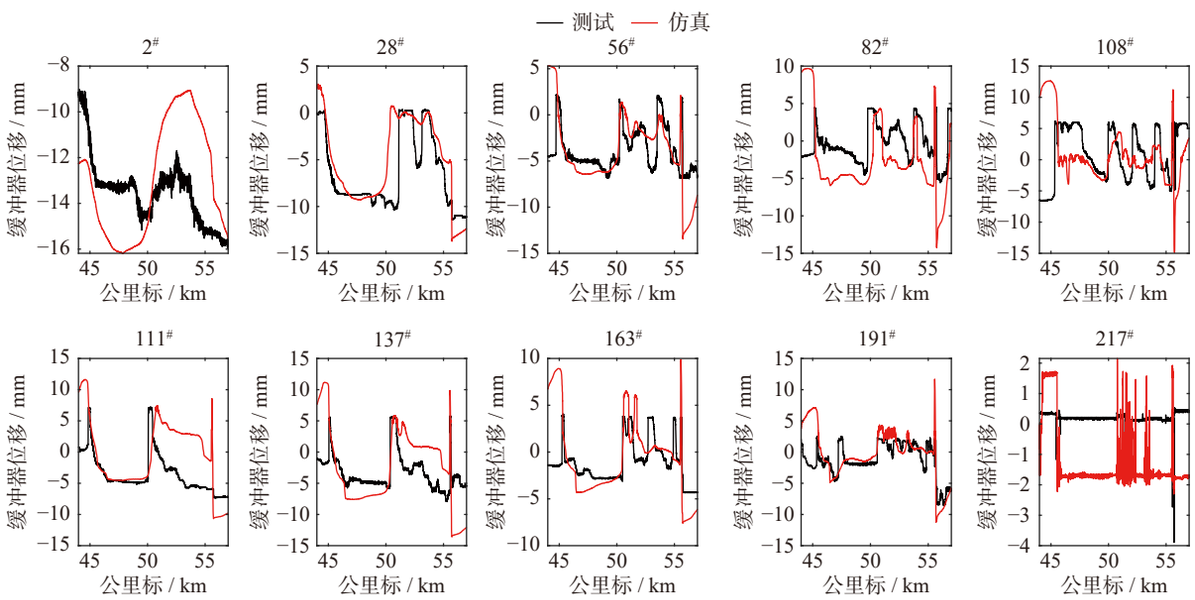


图 14 典型测试车位缓冲器位移对比

Fig. 14 Comparison of buffer displacements for typical test vehicle positions

图 15 和 16 给出了各典型测试车位车钩力计算误差分布。可见简化方法在所有测试车位上都有个别低频率出现的高误差值，主要是由于简化方法未能对循环制动缓解时的高纵向冲击精确模拟，这可能导致该方法在一些恶劣工况的计算中是不利的，但通过与精确方法误差分布概率的对比，在一些列车操纵工况比较稳定的区段(如牵引、惰行、电制调速等工况)可以达到与精确方法相近的误差概率分布，根据 3σ 原则，车钩力误差约有 68% 的概率小于 64.6 kN，有 95% 的概率小于 129.2 kN，有 99.7% 的概率小于 193.8 kN。这表明两类方法在操纵工况稳定区段的车钩力计算结果具有相当的可靠性，有约 95%

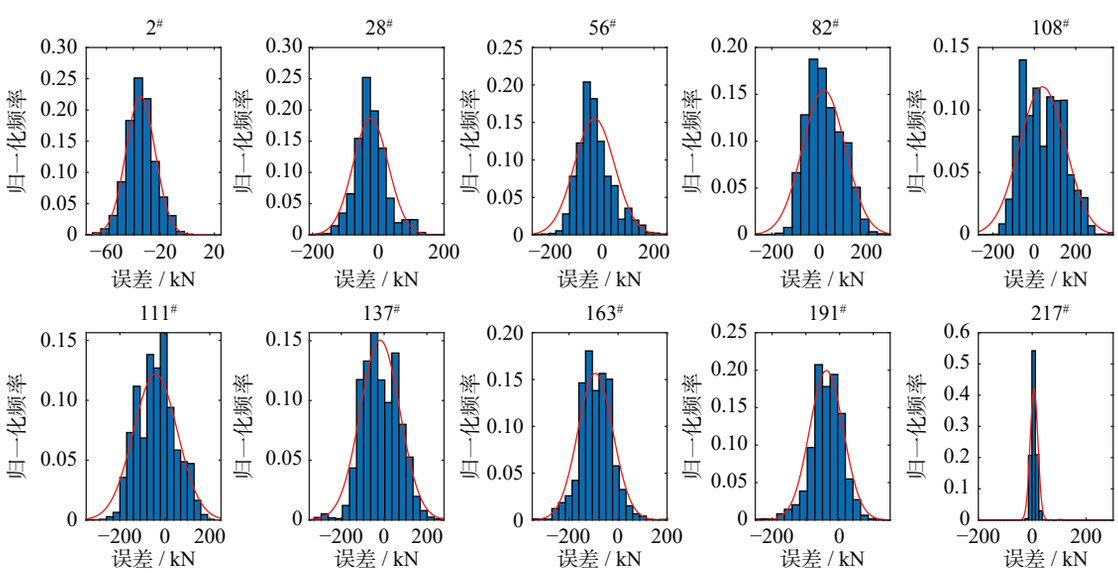


图 15 精确方法计算典型测试车位车钩力误差分布

Fig. 15 Errors distribution of coupler forces for typical test vehicle positions calculated by the precise method

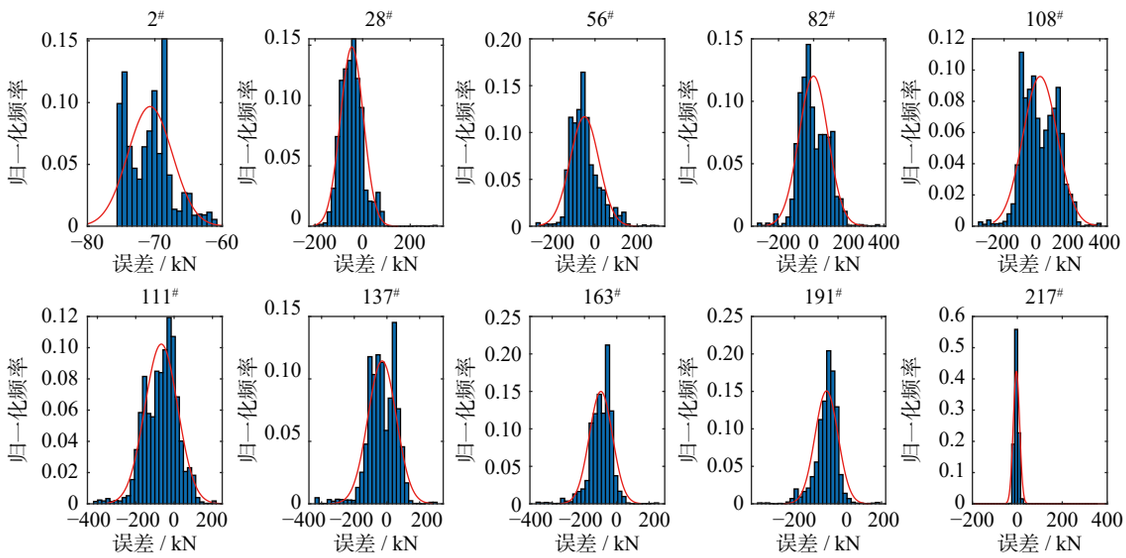


图 16　简化方法计算典型测试车位车钩力误差分布

Fig. 16　Errors distribution of coupler forces for typical test vehicle positions calculated by the simplified method

的概率保证操纵稳定区段的计算误差小于 129.2 kN，并进一步提高计算效率。

4　结　论

（1）为准确确定不同工况下的机车车辆基本运行阻力系数，本文建立基于车载数据的基本阻力系数优化方法，结果表明在牵规规定值基础上适当调整有利于实现更高的计算准确度。

（2）通过分析列车纵向动力学计算的关键子系统模型化方法与模型输入数据来源，建立车载数据与模型机理相结合的列车纵向动力学计算精确方法；为进一步提高计算效率，建立了使用 Duhamel 积分求解振动响应解析解的列车纵向力简化计算方法。

（3）以中国重载典型−9‰~−12‰长大下坡区段运行为例，本文精确计算方法对缓冲器相对位移变化趋势、量级水平和关键冲击有较好的预测效果，简化方法计算效率更高，但对列车操纵工况转换时（如循环制动缓解前后）的短时剧烈纵向冲击模拟较差。

（4）本文重载列车纵向力实时预测方法实现了纵向力在线预测评估，为重载列车在线安全监测和辅助驾驶技术迭代等提供了有效的计算解决方案，该方法未来是否能够得到实际应用还有待更详细的试验验证。

参考文献：

[1] 徐明龙，李谷，李蔚，等. 重载组合列车纵向力劣化分析与运行安全研究 [J]. 铁道科学与工程学报，2023，20(1)：321-332.
XU Minglong，LI Gu，LI Wei，et al. Analysis of longitudinal force degradation and running safety of heavy-haul combined trains[J]. Journal of Railway Science and Engineering，2023，20(1)：321-332.

[2] COLE C，SUN Y Q. Simulated comparisons of wagon coupler systems in heavy haul trains[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers，Part F：Journal of Rail and Rapid Transit，2006，220(3)：247-256.

[3] WU Q，SPIRYAGIN M，COLE C. Advanced dynamic modelling for friction draft gears[J]. Vehicle System Dynamics，2015，53(4)：475-492.

[4] 常崇义，王成国，马大炜，等. 2 万 t 组合列车纵向力计算研究 [J]. 铁道学报，2006，28(2)：89-94.
CHANG Chongyi，WANG Chengguo，MA Dawei，et al. Study on numerical analysis of longitudinal forces of the T20000 heavy haul[J]. Journal of the China Railway Society，2006，28(2)：89-94.

[5] 常崇义，马颖明，郭刚，等. 超长重载列车纵向力影响规律仿真研究 [J]. 中国铁道科学，2021，42(1)：87-94.
CHANG Chongyi，MA Yingming，GUO Gang，et al. Simulation study on the influence of longitudinal force on super long heavy haul trains[J]. China Railway Science，2021，42(1)：87-94.

[6] 魏伟，于忠建. 从控机车滞后时间对 3 万 t 列车纵向力的影响 [J]. 交通运输工程学报，2011，11(2)：39-44.
WEI Wei，YU Zhongjian. Influence of lag time for slave control locomotive on longitudinal coupler forces of 30000 t train[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering，

2011，11(2)：39-44.

[7] 魏伟，胡杨. 列尾装置对重载列车纵向力的影响 [J]. 交通运输工程学报，2012，12(5)：43-49.
WEI Wei，HU Yang. Influence of train tail exhaust device on longitudinal force of train[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering，2012，12(5)：43-49.

[8] WEI W，HU Y，WU Q，et al. An air brake model for longitudinal train dynamics studies[J]. Vehicle System Dynamics，2017，55(4)：517-533.

[9] 中国铁道科学研究院. 大秦线 3 万吨组合列车综合试验 [R]. 北京：中国铁道科学研究院，2014.
China Academy of Railway Sciences. Comprehensive test of 30000-ton combined trains on the Datong-Qinhuangdao Railway Line[R]. Beijing：China Academy of Railway Sciences，2014.

[10] 张格明. 大秦线 2 万吨重载组合列车故障分离研究试验报告 [R]. 北京：中国铁道科学研究院，2019.
ZHANG Geming. Research and test report on separation of 20000-ton heavy-haul combined trains on the Datong-Qinhuangdao Railway Line[R]. Beijing：China Academy of Railway Sciences，2019.

[11] 中国铁道科学研究院. 瓦日线 1.2 万吨重载货物列车试验 [R]. 北京：中国铁道科学研究院，2020.
China Academy of Railway Sciences. Test of 12000-ton heavy-haul trains on the Wari Railway Line[R]. Beijing：China Academy of Railway Sciences，2020.

[12] 中国铁道科学研究院. 唐呼线万吨重载货物列车试验 [R]. 北京：中国铁道科学研究院机车车辆研究所，2017.
China Academy of Railway Sciences. Test of ten-thousand-ton heavy-haul trains on the Tangshan-Hohhot Railway Line[R]. Beijing：China Academy of Railway Sciences，Locomotive and Rolling Stock Research Institute，2017.

[13] 姚小沛. 朔黄铁路 1+1 编组牵引 216 辆 C80 货车 2 万吨列车试验 [R]. 北京：中国铁道科学研究院，2016.
YAO Xiaopei. Test of 20000-ton trains comprising 216 C80 freight cars in 1+1 marshalling on the Shuozhou-Huanghua Railway[R]. Beijing：China Academy of Railway Sciences，2016.

[14] 康熊. 山西中南部铁路通道重载综合试验研究总报告 [R]. 北京：中国铁道科学研究院，2015.
KANG Xiong. Research report of heavy haul comprehensive test on Shanxi South-central Railway[R]. Beijing：China Academy of Railway Sciences，2015.

[15] WU Q，SPIRYAGIN M，COLE C. Longitudinal train dynamics：an overview[J]. Vehicle System Dynamics，2016，54(12)：1688-1714.

[16] 王开云，閤鑫，陈清华，等. 重载列车系统动力学研究进展 [J]. 应用力学学报，2023，40(5)：973-986.
WANG Kaiyun，GE Xin，Chen Qinghua，et al. Review of dynamics research on heavy-haul train system[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics，2023，40(5)：973-986.

[17] GE X，CHEN Q H，LING L，et al. An approach for simulating the air brake system of long freight trains based on fluid dynamics[J]. Railway Engineering Science，2023，31(2)：122-134.

[18] WU Q，YANG X J，COLE C，et al. Modelling polymer draft gears[J]. Vehicle System Dynamics，2016，54(9)：1208-1225.

[19] 常崇义，王新锐，姜岩，等. 钢摩擦与弹性胶泥复合型缓冲器数值模型 [J]. 中国铁道科学，2016，37(4)：83-88.
CHANG Chongyi，WANG Xinrui，JIANG Yan，et al. Numerical model of steel friction and elasticity cement composite draft gear[J]. China Railway Science，2016，37(4)：83-88.

[20] 杨俊杰，常崇义，封全保，等. 重载组合列车机车缓冲器关键技术参数研究 [J]. 中国铁道科学，2010，31(3)：76-81.
YANG Junjie，CHANG Chongyi，FENG Quanbao，et al. Study on the key technical parameter of the locomotive draft gear in a heavy haul combined train[J]. China Railway Science，2010，31(3)：76-81.

[21] FANCHER P S，ERVIN R D，MACADAM C C，et al. Measurement and representation of the mechanical properties of truck leaf springs[J]. SSAE Technical Paper Series，1980：800905.

[22] 何闻. 考虑纵向冲动的重载列车自动驾驶操纵研究 [D]. 北京：中国铁道科学研究院，2023.
HE Wen. Research on automatic operation considering longitudinal impulse of heavy haul trains[D]. Beijing：China Academy of Railway Sciences，2023.

[23] 国家铁路局. 列车牵引计算 第 1 部分：机车牵引式列车：TB/T 1407.1—2018[S]. 北京：中国铁道出版社有限公司，2018.
National Railway Administration of the People's Republic of China. Railway train traction calculation—part 1：trains with locomotives：TB/T 1407.1—2018[S]. Beijing：China Railway Publishing House Co.，Ltd.，2018.

[24] WU Q，COLE C，SPIRYAGIN M，et al. Freight train air brake models[J]. International Journal of Rail Transportation，2023，11(1)：1-49.

［25］何闻，常崇义，王俊彪，等. 3 万 t 重载列车制动工况纵向力关键影响因素分析 [J]. 铁道学报，2024，46(1)：53-59.
HE Wen，CHANG Chongyi，WANG Junbiao，et al. Analysis on key influencing factors of longitudinal force with 30000 t heavy haul trains in braking conditions[J]. Journal of the China Railway Society，2024，46(1)：53-59.

［26］刘金朝，王成国，马大炜，等. 长大列车空气管系充气特性数值仿真研究 [J]. 中国铁道科学，2004，25(1)：13-19.
LIU Jinzhao，WANG Chengguo，MA Dawei，et al. Numerical simulation on charging characteristics of heavy haul train air brake pipe system[J]. China Railway Science，2004，25(1)：13-19.

［27］BENSON R S. 内燃机的热力学和空气动力学-卷 1[M]. 程宏，朱倩，邵明锋，译. 北京：机械工业出版社，1986.
BENSON R S. The Thermodynamics and Gasdynamics of Internal Combustion Engines-Vol.1[M]. CHENG Hong，ZHU Qian，SHAO Mingfeng，translated. Beijing：China Machine Press，1986.

［28］WU Q，COLE C，SPIRYAGIN M，et al. Railway air brake model and parallel computing scheme[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics，2017，12(5)：051017.

［29］翟婉明. 非线性结构动力分析的 Newmark 预测-校正积分模式 [J]. 计算结构力学及其应用，1990，7(2)：51-58.
ZHAI Wanming. The predictor-corrector scheme based on the Newmark integration algorithm for nonlinear structural dynamic analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics，1990，7(2)：51-58.

［30］郭金松. 考虑纵向动力学的重载列车运行控制技术研究 [D]. 成都：西南交通大学，2021.
GUO Jinsong. Research on train control considering longitudinal dynamics of freight trains[D]. Chengdu：Southwest Jiaotong University，2021.

［31］HE W，CHANG C Y，LI L. et al. Research on optimization and evaluation method of heavy-haul train cyclic braking manipulation[J]. Railway Sciences，2025，4(2)：231-248.

第一作者：熊　芯（1977—），男，硕士，研究员。
E-mail：xxcars@139.com

通信作者：何　闻（1997—），男，硕士，研究实习员。
E-mail: hewen_cars@163.com

车辆惯容悬架等效阻抗特性分析及频域调控实现

刘昌宁[1]，冯修杰[1]，杨 艺[1,2]，杨晓峰[1]，沈钰杰[3]，戴世航[1]，陈 龙[3]

（1. 江苏大学汽车与交通工程学院，江苏 镇江 212013；2. 香港理工大学土木及环境工程学系，香港 999077；
3. 江苏大学汽车工程研究院，江苏 镇江 212013）

摘要：针对电驱动车辆悬架系统面临的垂向振动挑战，利用机械网络的等效阻抗特性研究等效阻抗特性随频率变化的关系，揭示了弹簧元件在低频具有负惯性特性、惯容元件在高频具有负刚度特性的规律。将电学网络阻抗匹配原理迁移至机械网络，设计并研制了频率驱动磁力惯容器装置，对其进行力学性能测试，利用惯容悬架结构以及频率驱动磁力惯容器装置实现车辆系统机械网络的阻抗匹配，并进行台架试验验证了其有效性。研究结果表明：所设计惯容悬架可显著改善乘坐舒适性，仿真和试验结果表明，车身加速度分别改善 8.98% 和 5.99%，轮胎动载荷性能也有所提升。

关键词：车辆悬架；振动控制；等效阻抗；惯容器；频域控制
中图分类号：O328；U463.33 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508040

Analysis of equivalent impedance characteristics and frequency control of vehicle inertial suspension

LIU Changning[1], FENG Xiujie[1], YANG Yi[1,2], YANG Xiaofeng[1], SHEN Yujie[3], DAI Shihang[1], CHEN Long[3]

（1.School of Automotive and Traffic Engineering，Jiangsu University，Zhenjiang 212013，China；
2.Department of Civil and Environmental Engineering，The Hong Kong Polytechnic University，Hong Kong 999077，China；
3.Automotive Engineering Research Institute，Jiangsu University，Zhenjiang 212013，China）

Abstract: This study addresses the new challenges posed by vertical vibrations in electric vehicle suspension systems. By employing the equivalent impedance characteristics of mechanical networks，this study investigates the relationship between these impedance characteristics and frequency variations. The results reveal that the spring exhibits negative inertial characteristics at low frequencies，while the inerter demonstrates negative stiffness characteristics at high frequencies. By transferring the principle of electrical network impedance matching to mechanical networks，a frequency-driven magnetic inerter was designed and developed，and its mechanical performance was tested. The combined use of the inertial suspension structure and the frequency-driven magnetic inerter enables impedance matching within the vehicle system's mechanical network，which is further validated through bench tests. The results indicate that the inertial suspension enhances ride comfort significantly. The simulation and experimental results show that the vehicle acceleration is improved by 8.98% and 5.99%，respectively. The dynamic tire load performance is also improved to some extent.

Keywords: vehicle suspension; vibration control; equivalent impedance; inerter; frequency-domain control

电驱动车辆近年来得到了快速发展，相比于传统燃油车辆，其动力系统、传动系统、能量系统的构型与质量分布均有所改变，电驱动车辆在高度网联化、智能化的同时，在更高的机动性、乘坐舒适性以及续航里程要求下也面临新的动力学挑战[1]。

传统悬架面临车辆复杂的质量分布特性和日益提升的性能需求，为进一步提升悬架系统性能，主动悬架和半主动悬架被提出和应用[2-3]。但是主动悬架和半主动悬架中的传感、控制以及执行系统对车辆有限的算力和能源消耗加剧，不利于续航里程以及车辆其他子系统的智能化。惯容器以及惯容悬架的提出[4-5]，丰富了悬架系统的结构以及阻抗传递特性，为解决“弹簧-阻尼”悬架缺少质量阻抗特性的根本矛盾提供了思路[6]。胡银龙等[7]研究了惯容本体质量对其力学输出性能的影响，并建立了端口质量模型。杜甫等[8]提出“惯容-弹簧”准零刚度的基本架

收稿日期：2025-08-13；**修订日期：**2025-09-12
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52202471，52472408）；中国科协青年人才托举工程项目（2022QNRC001）；江苏省青蓝工程项目；整车先进设计制造技术全国重点实验室开放基金重点项目（82315004）

构, 并对比了连续型和开关型两种半主动惯容悬架的减振效果。WANG 等[9] 提出一种具有负刚度效应的惯容悬架, 进一步提升了车辆的乘坐舒适性。含惯容机械网络的提出, 使得机械网络和电学网络严格对应, 基于机电相似性原理[10], 电学中的成熟理论可以迁移至机械网络中[11]。但是, 惯容的引入也使得机械网络的阻抗特性更为复杂, 目前关于含惯容机械网络的阻抗传递特性及其对控制的影响作用机理的研究较少。

为此, 本文分析了惯容悬架机械网络的等效阻抗特性, 研究不同机械网络结构下悬架系统等效阻抗特性随频率变化的影响, 将电网络中的阻抗匹配原理迁移到机械网络中。为减少对悬架控制算法的依赖, 设计了一种惯质系数随振动频域变化被动可调的惯容器装置, 以提升悬架宽频带隔振性能。

1　机械网络等效阻抗频率特性分析

1.1　基础单元拓扑结构等效阻抗特性

阻抗传递函数(位移型 Z_x、速度型 Z 和加速度型 Z_a)之间的关系如下式所示:

$$Z = Z_a s = \frac{Z_x}{s} \tag{1}$$

式中, s 为拉普拉斯复参量。从数值上来看, Z 的实部可等效为阻尼系数, Z_x 的实部可等效为刚度系数, Z_a 的实部可等效为惯质系数。

图 1 为 6 种二元件机械网络结构 U1~U6, 其速度型阻抗传递函数分别为:

$$U_1(s) = \frac{k}{s} + c \tag{2}$$

$$U_2(s) = \frac{k}{s} + bs \tag{3}$$

$$U_3(s) = bs + c \tag{4}$$

$$U_4(s) = \frac{1}{\frac{s}{k} + \frac{1}{c}} = \frac{kc}{cs + k} \tag{5}$$

$$U_5(s) = \frac{1}{\frac{s}{k} + \frac{1}{bs}} = \frac{kbs}{bs^2 + k} \tag{6}$$

$$U_6(s) = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{bs}} = \frac{bcs}{bs + c} \tag{7}$$

式中, k 为刚度系数; c 为阻尼系数; b 为惯质系数。结构 U1 为传统悬架。

结构 U1~U6 包含两种机械元件的阻抗特性, 可通过式 (1) 及式 (2)~(7) 求得, 如图 2 所示。将一个元件参数基准数值增加 6 dB(+100%) 或降低 6 dB (−50%), 其余参数保持不变, 研究各频率点元件参数变化引起的阻抗特性差异。基准数值设置如下: k=22000 N/m, c=1200 N·m/s, b=500 kg。例如, U1 为

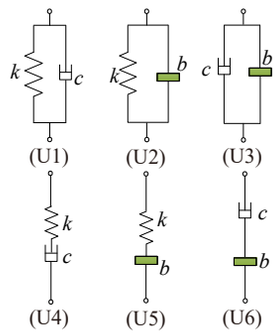


图 1　二元件机械网络结构

Fig. 1　Two-component mechanical network structure

“弹簧-阻尼”结构, 其阻抗传递函数见式 (2), 由此得阻尼阻抗为 c, 在数值上与阻尼系数相等, 结合式 (1) 和 (2) 可得, Z_x=k+cs, 其刚度阻抗为 k, 在数值上与刚度系数相等, 如图 2(a) 所示。

在图 2(a) 中, 结构 U1 的等效刚度系数和等效阻尼系数为恒定值, 分别等于刚度系数和阻尼系数。在图 2(b) 中, 结构 U2 在低频段, 弹簧元件引起负惯性特性; 在高频段, 惯容元件产生负刚度特性[12]。频率由低到高, 等效刚度系数从零逐渐减小至负值, 等效惯质系数从负值逐渐增大并趋于零。处于特定频段时, 可实现刚度与惯性力的动态平衡。图 2(c) 反映结构 U3 的等效惯质系数和等效阻尼系数为恒定值。在图 2(d) 中, 结构 U4 的等效刚度系数随频率的升高而逐渐增大, 等效阻尼系数随频率的升高而逐渐减小, 且与元件参数呈正相关, 参数越大, 变化越显著。图 2(e) 中 U5 的等效刚度系数和等效惯质系数整体较为稳定, 但在 1 Hz 附近有明显的波动。图 2(f) 表明, 结构 U6 在低频段, 其等效惯质系数较大, 等效阻尼系数较小, 在高频段则相反。

尽管二元件机械网络只采用两种机械元件组合, 但可以通过式 (1) 及式 (2)~(7) 的数学变换推导出其等效阻抗。例如 U1 结构, 由 Z_a=−k+c/s, 因弹性元件与惯性元件的力相位相差 180°, 弹性元件在低频条件下表现出负惯性特性, 故 U1 包含等效惯性特性, 随振动频率的升高趋于零, 且负等效惯性特性随弹簧刚度的增加而增强(图 3(a))。在图 3(b) 和 (e) 中, U2 和 U5 结构等效阻尼系数恒为零。在图 3(c) 中, U3 在高频段存在显著的负等效刚度特性, 伴随惯质系数的增加, 等效负刚度特性将更加明显。在图 3(d) 中, U4 在低频段的等效惯质系数随刚度的增加而增大, 阻尼系数的增加将导致等效惯质系数减小, 且等效惯质系数受阻尼系数变化的影响程度明显大于刚度变化。在图 3(f) 中, U6 在低频段等效刚度系数随惯质系数的增加而减小; 在中高频段, 随着惯质系数的增加而增大。等效刚度系数随着阻尼系数的增加而减小, 其负等效刚度特性与阻尼系数在中高频段有显著正相关性。

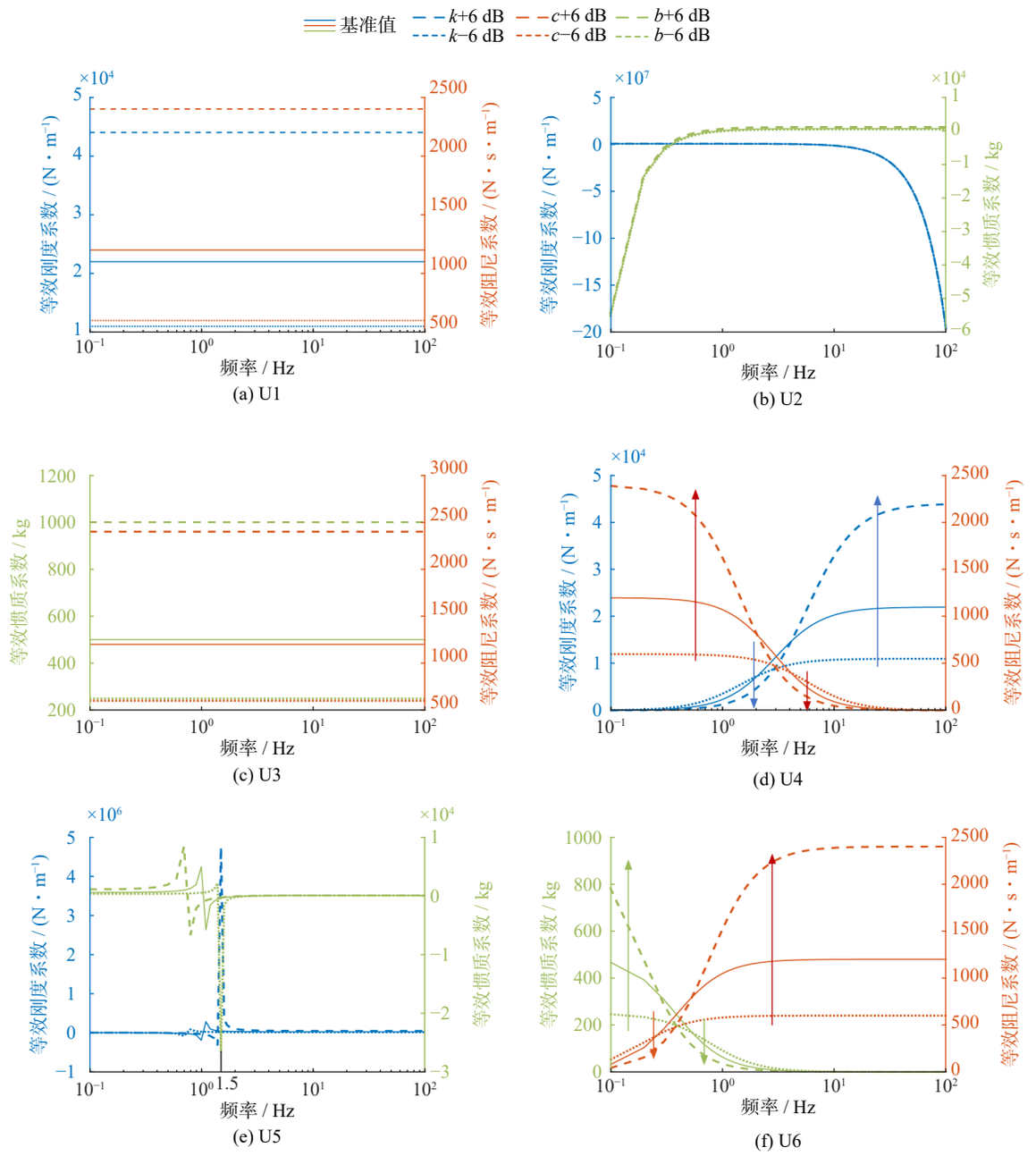


图 2 U1~U6 的阻抗特性

Fig. 2 Impedance characteristics of U1~U6

综上分析，机械网络中若不存在阻尼元件，则不能表现出等效阻尼特性。若刚度（或惯容）与阻尼以串联方式连接，等效阻抗特性随频率变化更为明显。机械网络展现出复杂的阻抗特性，并能依据元件参数与振动频率的变化实现动态调节，具备实现有效隔离宽频段振动的潜力。

1.2 三元件拓扑结构等效阻抗特性

在二元件机械网络结构等效阻抗特性分析的基础上，本节将研究三元件组成的两种基础机械网络，选出合适的结构应用于车辆惯容悬架中。

图 4 为集成支撑弹簧元件的机械网络结构，图中 k_1 为刚度系数。惯容悬架结构可采用以下两种不同的结构形式，其速度型阻抗传递函数分别为：

$$\text{S1：}\ T_1(s)=\frac{k}{s}+c+bs=\frac{bs^2+cs+k}{s} \tag{8}$$

$$\text{S2：}\ T_2(s)=\frac{k}{s}+\frac{1}{\dfrac{1}{bs}+\dfrac{1}{c}}=\frac{bcs^2+bks+ck}{bs^2+cs} \tag{9}$$

为研究结构中的元件参数变化对于等效阻抗特性的影响，对基准值加大 100%（+6 dB）或减小 50%（−6 dB），其余参数恒定，基准值为：k=22000 N/m, c=1200 N·m/s, b=500 kg。

图 5 为结构 S1 的等效阻抗特性，图 5(a) 和 (c) 表明 S1 在高频段呈现明显的负等效刚度特性，在低频段有显著的负等效惯性特性。图 5(b) 中等效阻尼系数与元件参数一致，数值也较为稳定。结构 S1 非常

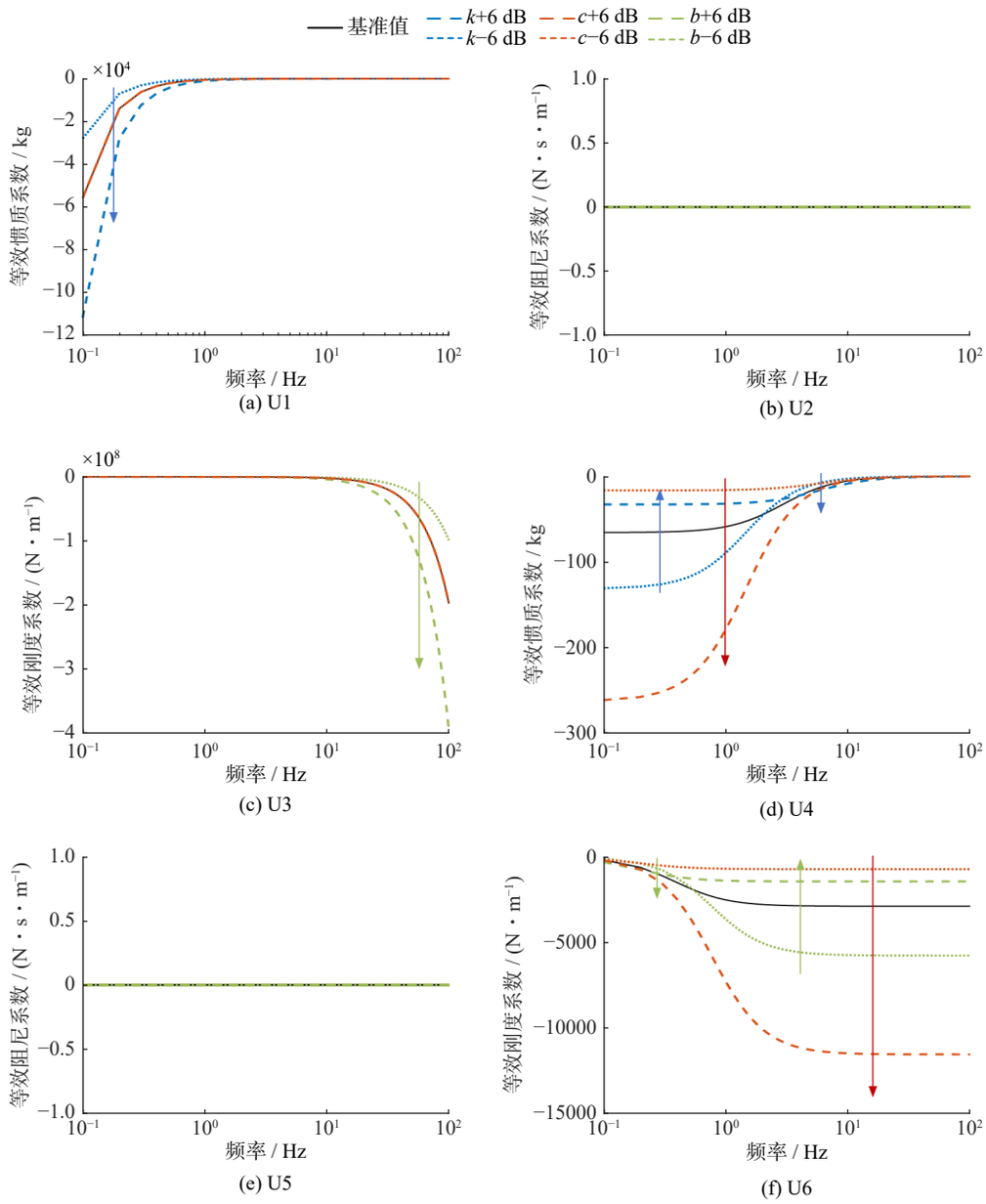


图 3　U1~U6 的等效阻抗特性

Fig. 3　Equivalent impedance characteristics of U1~U6

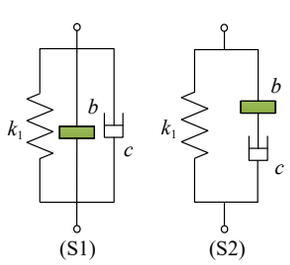


图 4　基础三元件机械网络结构

Fig. 4　Basic three-component mechanical network structure

适合阻尼控制的惯容悬架，有利于阻尼精准控制，已有相关研究表明可利用 S1 结构进行有效的阻尼控制[13]。

由图 6(a) 可见，结构 S2 展现出明显的等效刚度特性，并在低频范围内表现出显著的负等效惯性特征，频率上升、阻尼系数增长及惯质系数下降均会导致等效刚度系数逐渐降低。如图 6(b) 所示，结构 S2 等效阻尼系数随频率的升高而增大，并逐渐趋于稳定。采用较大惯质系数时，不仅可以在低频段使等效阻尼特性显著增强，而且可以实现中高频段等效刚度特性的增强。因此，结构 S2 在惯质系数控制方面具有显著优势。

2　车辆悬架等效阻抗匹配分析

2.1　惯容悬架机械网络等效模型

根据机电相似性原理，惯容悬架 S2 机械网络模型能够等效为图 7 所示的机电网络。图 7 中，m_2 表示车身质量，m_1 表示车轮质量，k_t 表示轮胎刚度。车轮作为媒介将路面振动传递至悬架，经过悬架机械结构后，振动功率由有功功率和无功功率共同构

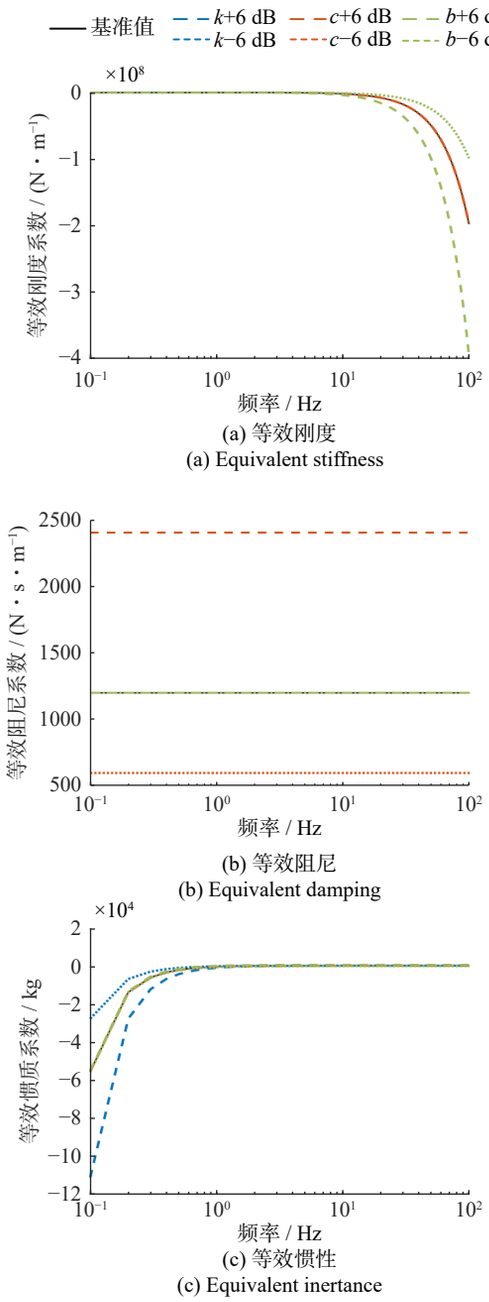


图 5 S1 的等效阻抗特性

Fig. 5 Equivalent impendence characteristics of S1

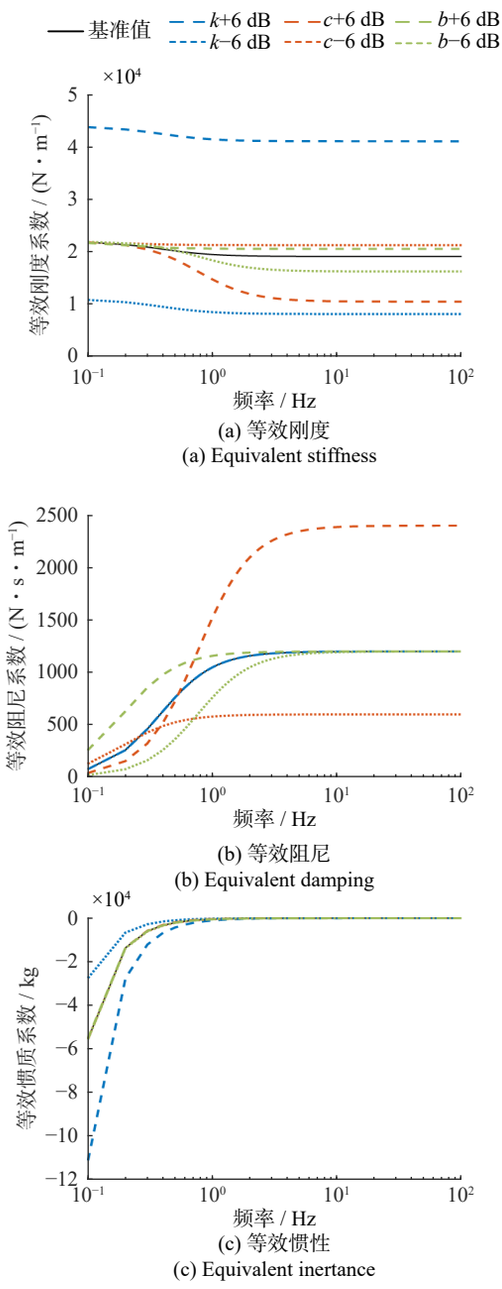


图 6 S2 的等效阻抗特性

Fig. 6 Equivalent impendence characteristics of S2

成。有功功率体现为阻尼元件对振动能的耗散，弹簧元件将吸收的振动能量以机械回弹方式重新分配至车身和车轮，属于无功功率。反射的无功功率传递至车身，使乘坐舒适性恶化。

根据第 1 节结论，弹簧具有负等效惯性特性，惯容具有负等效刚度特性，将参数调谐后，弹簧和惯容将产生等大反向的力，实现弹簧元件反射功率的抵消。惯容悬架为弹簧振动功率反射问题提供了新的解决思路。

2.2 车辆悬架等效阻抗匹配

根据最大功率传输定理，当网络中的负载阻抗与信号源内阻抗匹配时[14-15]，即 $R_0=R_L=T_2(s)$（其中，

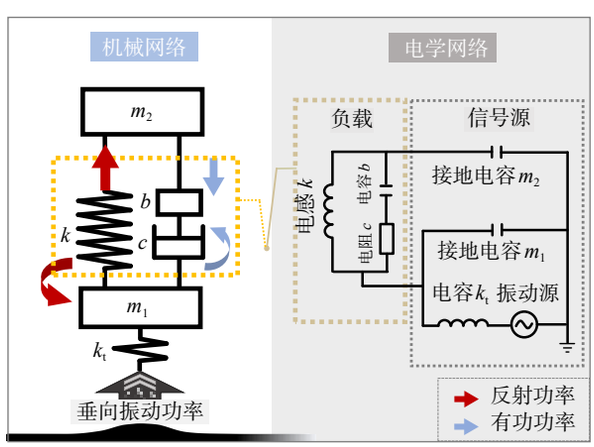


图 7 惯容悬架机电网络等效模型

Fig. 7 Equivalent model of mechanical-electrical network of inertial suspension

R_L 为电学网络的负载阻抗，$T_2(s)$ 为结构 S2 的机械阻抗），可以有效抑制弹簧元件的振动功率反射效应。采用速度型阻抗传递函数进行分析，惯容悬架的内阻抗 R_0 如下：

$$R_0=\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{k_t}{s}+m_1 s}+\dfrac{1}{m_2 s}}=\frac{m_1m_2s^3+k_tm_2s}{m_1s^2+m_2s^2+k_t} \tag{10}$$

随着振动频率的变化，惯质系数 b 的要求也不断改变，如图 8 所示，在低频段，要求惯质系数偏大，在中高频段，需采用较小的惯质系数，即

$$b=\begin{cases} b_{\min}, & f\leqslant f_0 \\ b_{\max}, & f>f_0 \end{cases} \tag{11}$$

式中，$b_{\min}$ 为小惯质系数；$b_{\max}$ 为大惯质系数；f 为振动频率；f_0 为频率切换点。

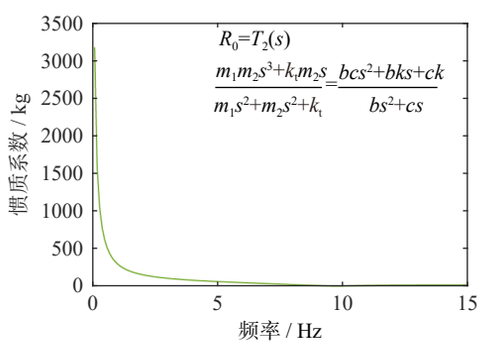


图 8　悬架阻抗匹配惯质系数要求

Fig. 8　Impedance matching requirement of suspension for inertial coefficient

3　惯容悬架频域调控装置研制

3.1　频域被动调控可行性分析

惯容器两端的受力与惯质系数及端点加速度间的数学关系为：$F=b\ddot{x}$，若将路面输入等效为多个正弦型输入的集合，则对于正弦型位移输入 x，有：

$$\ddot{x}=-4\pi^2f^2A\sin(2\pi ft) \tag{12}$$

式中，A 为输入振幅；f 为频率；t 对应时间变量。

因此，惯质系数恒定时，其惯性力 F 与 (f^2, A) 正相关。对于乘用车，实际悬架振动幅值一般在 0.023~0.030 m 之间，而乘坐舒适性敏感频率范围为 0.5~80 Hz，所以惯性力随频率变化更为显著。

3.2　频率驱动磁力惯容器研制与力学性能测试

为实现惯质系数随频段的动态调整，设计了如图 9 所示的频率驱动磁力惯容器装置，采用磁齿轮[16]联动滚珠丝杠的传动方案，磁力的最大驱动点即为频率切换点，超过该界限后，传递将产生滑移，等效惯质系数减小。该装置结构设计简易、方便安装，且可以实现介质差异条件下的传动连接。选用英国 Instron 8800 液压伺服激振系统对装置力学性能开展试验测试，惯容器性能测试现场如图 10 所示。

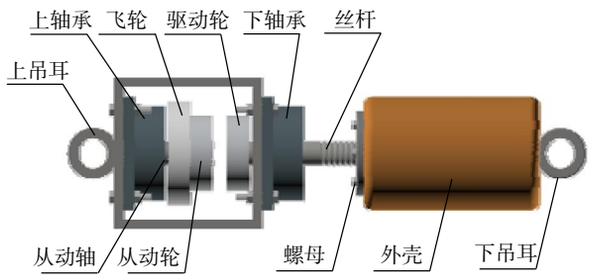


图 9　频率驱动磁力惯容器装置

Fig. 9　Frequency-driven magnetic inerter device

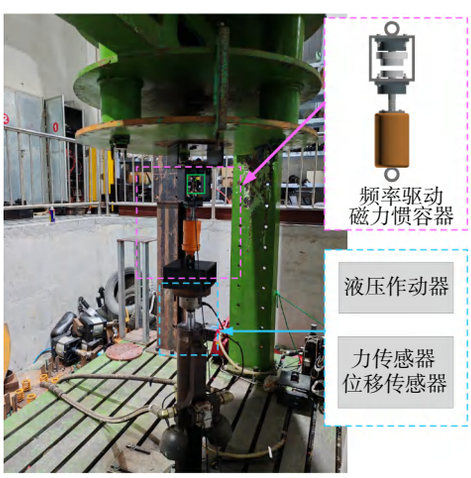


图 10　惯容器性能测试现场

Fig. 10　Test site of inerter performance

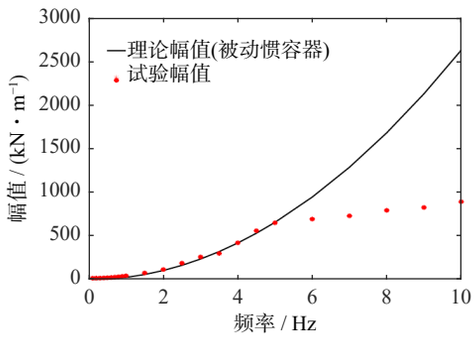
输入弦波激励 $x=A\cos(\omega t)$（其中 ω 为角频率），振幅为 5 mm，频率如下式所示：

$$f_{\text{Hz}}=\begin{cases} 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\ (\text{Hz}) \\ 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0\ (\text{Hz}) \\ 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0\ (\text{Hz}) \end{cases} \tag{13}$$

将弦波激励时域信号转换为频域信号，分析频率驱动磁力惯容器的力学输出性能。

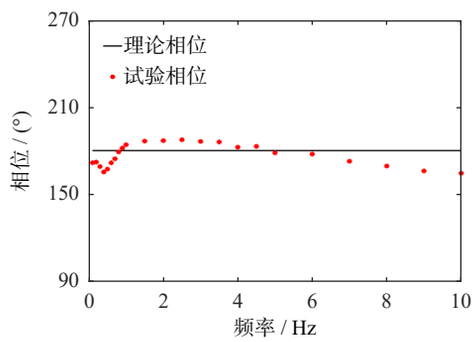
图 11 为幅值与相位结果，理论幅值、试验幅值在 4.5 Hz 以下时差异较小，偏差主要由装置运动副摩擦引起，随着频率的升高，试验幅值趋于平缓。对于相位，理论值与实际值在 1 Hz 以下以及 6 Hz 以上有一定的差异，在 1~5 Hz 基本吻合。

频率驱动磁力惯容器在低频段两端相对速度和相对加速度均较小，该阶段惯性力数值偏低，此时摩擦力占比明显提升。高频激励下频率驱动磁力惯容器两端的加速度差值明显扩大，该惯容器实际产生的输出力中，惯性力所占份额增加。当频率进一步升高，超过 4.5 Hz 时，驱动轮转矩升至最高水平，频率驱动磁力惯容器两端的输出力幅值达到上限。基



(a) 幅频对比

(a) Comparison of amplitude-frequency



(b) 相频对比

(b) Comparison of phase-frequency

图 11 频率驱动磁力惯容器幅频与相频对比

Fig. 11 Comparison of frequency-driven magnetic inerter in amplitude-frequency and phase-frequency

于图 11 中的数据，频率驱动磁力惯容器的惯质系数在高频段与低频段有明显差异，与设计目标相符合。

4 惯容悬架频域调控性能分析

为研究应用频率驱动磁力惯容器的惯容悬架的隔振性能，在随机型路面进行仿真分析。路面不平度采用功率谱密度 $G_q(n)$ 表示：

$$G_q(n) = G_q(n_0)\left(\frac{n}{n_0}\right)^{-W} \tag{14}$$

式中，$G_q(n_0)$ 为参考空间频率下的路面功率谱密度；n 为空间频率，且 n 为波长 λ 的倒数，单位为 m^{-1}；n_0 为参考空间频率，取值为 0.1 m^{-1}；W 为频率指数。

随机型路面激励的时域表达式为[17]：

$$\dot{z}_T(t) = -2\pi f_d z_T(t) + \sqrt{2\pi G_0 v}w(t) \tag{15}$$

式中，f_d 为截止频率下限，取值为 0.01 Hz；G_0 为路面不平度系数；v 为车速；$w(t)$ 为单位白噪声。以 C 级路面作为激励，悬架参数如表 1 所示。

在 20 m/s 车速下，传统被动悬架和惯容悬架的性能指标均方根值如表 2 所示。采用“+”代表惯容悬架相对传统被动悬架的性能指标降低，“−”代表惯容悬架性能指标相对增加。

根据表 2 和图 12，在随机路面下，车辆以 20 m/s 车速行驶，采用惯容悬架后，乘坐舒适性得到明显优化，道路友好性稍有增强，悬架动行程虽出现小幅上升，但振幅变化始终保持在安全范围内。

表 1 传统被动悬架和惯容悬架参数[11]

Tab. 1 Parameters of traditional passive suspension and inertial suspension[11]

参数	单位	数值
车身质量m_2	kg	320
车轮质量m_1	kg	45
弹簧刚度系数k	kN/m	22
轮胎等效刚度系数k_t	kN/m	190
传统被动悬架阻尼系数c	N·s/m	1800
惯容悬架阻尼系数c_t	N·s/m	1502.1
大惯质系数b_{max}	kg	660.5
小惯质系数b_{min}	kg	275.6
频率切换点f_0	Hz	4.5

表 2 时域下悬架性能对比

Tab. 2 Comparison of suspension performance in time-domain

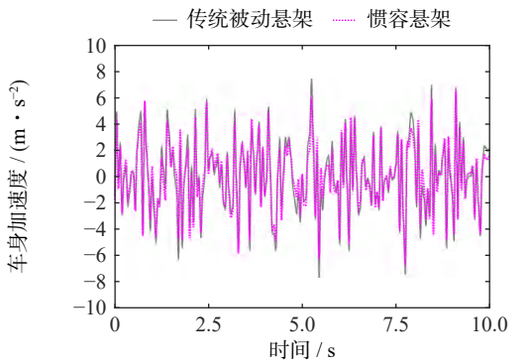
悬架方式	车身加速度均方根值 BA_RMS /(m·s^{-2})	悬架动行程均方根值 SWS_RMS /m	轮胎动载荷均方根值 DTL_RMS/kN
传统被动悬架	2.5212	0.0206	1.0215
惯容悬架	2.2949	0.0227	1.0104
降幅	+8.98%	−10.19%	+1.09%

5 惯容悬架频域调控性能试验

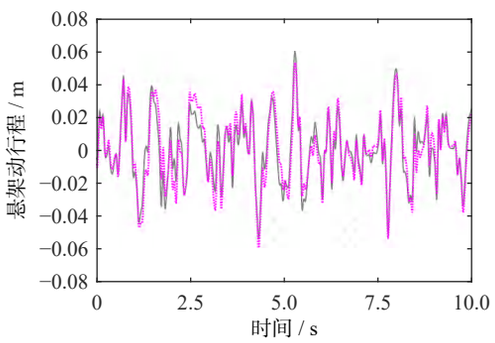
为了在试验中科学评估惯容悬架的性能优化程度，以行业普遍采用的“弹簧-阻尼”传统被动悬架作为悬架性能的基准值，对比传统被动悬架和惯容悬架的性能试验结果。惯容悬架试验台架的布置图如图 13 所示。

输入信号采用随机型路面激励，采用 20 m/s 行驶速度进行工况试验，将第 4 节所用的随机型路面激励数据在 IST MAX™ Cyclic Fatigue Software 中进行转化，导出时转换为“rdf”格式。采样频率设为 500 Hz，随机型路面输入试验下，悬架性能指标结果如表 3 和图 14 所示。由试验结果可知，在随机型路面激励下，新型惯容悬架相较于传统被动悬架，实现了乘坐舒适性与道路友好性的双重优化。

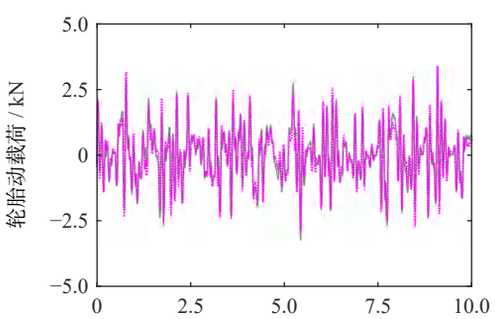
从表 3 的结果中可以看出，20 m/s 行驶速度下加速度均方根值下降 5.99%，表明惯容悬架有效改善了车辆的乘坐舒适性。惯容悬架的悬架动行程均方根值增大了 8.24%，表明惯容悬架通过增大悬架动行程的方式，增加了阻尼元件的工作行程，在保持道路友好性的同时，乘坐舒适性也有所增强。悬架动行程虽有小幅增加，但未超过安全行程边界，这与前文仿真研究得出的结论一致，与优化目标相符合。



(a) 车身加速度
(a) Vehicle body acceleration



(b) 悬架动行程
(b) Suspension working space



(c) 轮胎动载荷
(c) Tire dynamic load

图 12　20 m/s 车速下的悬架性能对比

Fig. 12　Comparisons of suspension performance at 20 m/s

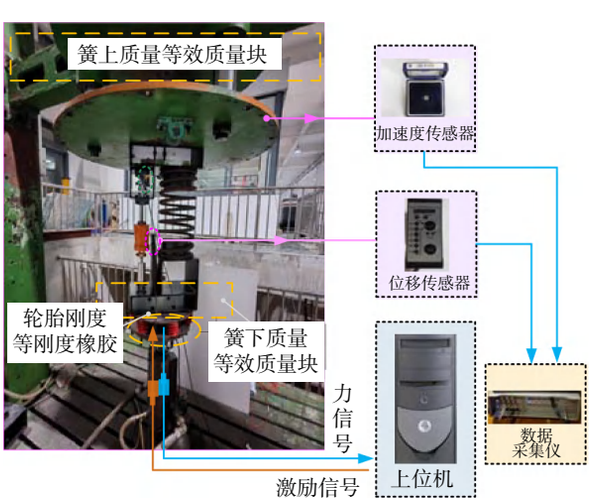


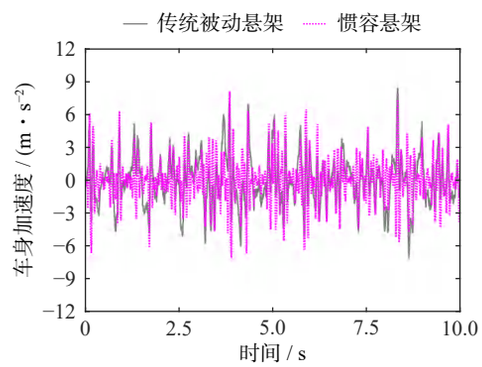
图 13　惯容悬架试验台架布置图

Fig. 13　Layout diagram of inertial suspension test bench

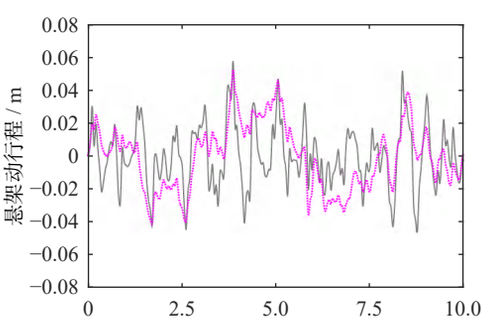
表 3　时域下悬架性能对比

Tab. 3　Comparison of suspension performance in time-domain

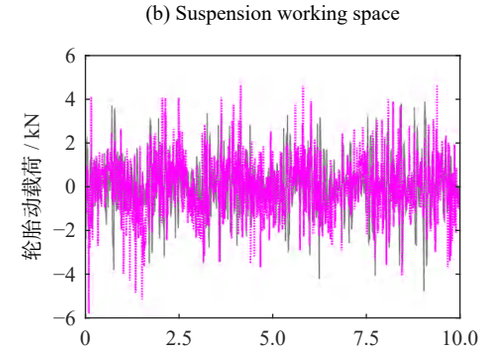
悬架方式	车身加速度 均方根值 BA_RMS/(m·s^{-2})	悬架动行程 均方根值 SWS_RMS/m	轮胎动载荷 均方根值 DTL_RMS/kN
传统被动悬架	2.2066	0.0170	1.1928
惯容悬架	2.0744	0.0184	1.1839
降幅	+5.99%	−8.24%	+0.75%



(a) 车身加速度
(a) Vehicle body acceleration



(b) 悬架动行程
(b) Suspension working space



(c) 轮胎动载荷
(c) Tire dynamic load

图 14　20 m/s 车速下的悬架性能对比

Fig. 14　Comparisons of suspension performance at 20 m/s

6　结　论

本文通过分析车辆悬架系统等效阻抗特性和振动功率传输特性，研究不同机械网络结构下悬架系统等效阻抗特性随频率变化的规律，明晰了惯容元件、弹簧元件与阻尼元件间的协同机理，阐明了惯

容悬架惯质系数与振动频率的关联规律。基于机电相似性原理和阻抗匹配原理，利用惯容元件缓解振动功率反射问题，研制频率驱动磁力惯容器并验证动惯性悬架振动功率频域调控的可行性。将频率驱动磁力惯容器运用到惯容悬架中，与“弹簧-阻尼”传统被动悬架进行对比试验。结果表明：惯容悬架具有较好的隔振性能，能够被动自适应振动功率在振动宽频带内的频域调控，与理论分析相符，拓展了隔振系统设计分析的思路。

参考文献：

[1] JIN X J，WANG J D，HE X K，et al. Improving vibration performance of electric vehicles based on in-wheel motor-active suspension system via robust finite frequency control[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems，2023，24(2)：1631-1643.

[2] 常宇健，孙亚婷，陈恩利，等. 双频激励下含分数阶非线性汽车悬架系统的混沌研究 [J]. 振动工程学报，2021，34(6)：1198-1206.
CHANG Yujian，SUN Yating，CHEN Enli，et al. Chaos of vehicle suspension system with fractional order nonlinearity under dual frequency excitation[J]. Journal of Vibration Engineering，2021，34(6)：1198-1206.

[3] 孙凤，邢大壮，周冉，等. 考虑能耗的电磁主动悬架 LQR 控制策略 [J]. 西南交通大学学报，2023，58(4)：754-760.
SUN Feng，XING Dazhuang，ZHOU Ran，et al. LQR control strategy for electromagnetic active suspension considering energy consumption[J]. Journal of Southwest Jiaotong University，2023，58(4)：754-760.

[4] SMITH M C. Synthesis of mechanical networks：the inerter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2002，47(10)：1648-1662.

[5] 王锴，吴丽婷，刘飞. 一种含惯容及负刚度元件的隔振系统优化设计 [J]. 振动工程学报，2024，37(11)：1836-1847.
WANG Kai，WU Liting，LIU Fei. Optimization design of an isolation system with an inerter and an element of negative stiffness[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(11)：1836-1847.

[6] LIU C N，CHEN L，LEE H P，et al. A review of the inerter and inerter-based vibration isolation：theory，devices，and applications[J]. Journal of the Franklin Institute，2022，359(14)：7677-7707.

[7] 胡银龙，王凯毅，程昌俊，等. 考虑本体质量的滚珠丝杠惯容系统建模与性能分析 [J]. 振动与冲击，2023，42(6)：55-60.
HU Yinlong，WANG Kaiyi，CHENG Changjun，et al. Modeling and analysis of ball-screw inerters with consideration of physical mass[J]. Journal of Vibration and Shock，2023，42(6)：55-60.

[8] 杜甫，董明明，汪浒江，等. 基于准零刚度的坦克装甲车辆半主动惯容悬架控制策略 [J]. 兵工学报，2024，45(9)：2929-2935.
DU Fu，DONG Mingming，WANG Hujiang，et al. Semi-active inertial suspension control strategy for tanks and armored vehicles based on quasi-zero stiffness[J]. Acta Armamentarii，2024，45(9)：2929-2935.

[9] WANG J，JIN S M，ZHANG Y. Improve ride comfort performance of a vehicle suspension with negative stiffness inerter damper[EB/OL]. (2025-05-02) [2025-09-12]. https://doi.org/10.1080/00423114.2025.2504108.

[10] SHEN Y J，LI J Y，HUANG R N，et al. Vibration control of vehicle ISD suspension based on the fractional-order SH-GH stragety[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2025，234：112880.

[11] 杨艺，陈龙，汪若尘，等. 车辆半主动悬架广义天棚理论控制研究 [J]. 振动与冲击，2021，40(22)：66-74.
YANG Yi，CHEN Long，WANG Ruochen，et al. Semi-active suspension control based on the general theory of skyhook control[J]. Journal of Vibration and Shock，2021，40(22)：66-74.

[12] SHI X，ZHU S Y. A comparative study of vibration isolation performance using negative stiffness and inerter dampers[J]. Journal of the Franklin Institute，2019，356(14)：7922-7946.

[13] LIU C N，CHEN L，LEE H P，et al. Generalized skyhook-groundhook hybrid strategy and control on vehicle suspension[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology，2023，72(2)：1689-1700.

[14] LIU J J，LI Z W，LIANG B，et al. Remote water-to-air eavesdropping with a phase-engineered impedance matching metasurface[J]. Advanced Materials，2023，35(29)：2301799.

[15] 渠娇，杜月敏，季宏丽，等. 柔性压电纤维复合材料驱动器的驱动特性研究 [J]. 振动工程学报，2023，36(6)：1695-1705.
QU Jiao，DU Yuemin，JI Hongli，et al. Actuation characteristics of flexible piezoelectric fiber composite actuator device[J]. Journal of Vibration Engineering，2023，36(6)：1695-1705.

[16] LIAO P H，TSAI M C，LU H C，et al. Cycloidal magnetic gear utilizing magnetic repulsion characteristics[J]. IEEE Transactions on Magnetics，2024，60(9)：8000405.

[17] LIU Y L，ZUO L. Mixed skyhook and power-driven-damper：a new low-jerk semi-active suspension control based on power flow analysis[J]. Journal of Dynamic Systems，Measurement，and Control，2016，138(8)：081009.

第一作者：刘昌宁(1992—)，男，博士，副教授。
E-mail：lcn@ujs.edu.cn

通信作者：杨 艺(1992—)，女，博士，助理研究员。
E-mail：yyi.yang@polyu.edu.hk

外附装配式框架-支撑减震加固体系高效数值模拟方法与动力灾变响应分析

曹徐阳[1]，王 谆[2]，冀 昆[1]，史健喆[1]

（1. 河海大学土木与交通学院，江苏 南京 210024；2. 南京水利科学研究院，江苏 南京 210029）

摘要：中国是地震灾害最为严重的国家之一。作为结构减震能力提升的有效手段，外附子结构体系加固技术凭借其整体性好、灵活性大、可设计性高等优势，近年来得到了快速的发展和应用。基于此背景，本文将外附子结构体系加固技术与装配式建造技术相结合，提出了一种外附装配式自恢复钢板混凝土框架-支撑加固体系。本文介绍了该外附体系的构造机理与组成方式；建立了该体系的高效整体模型；结合案例分析，评价了既有结构采用该外附体系加固前/后的动力响应与性能指标，并预测了整体加固趋势与动力灾变响应。研究结果表明，所提出的分析模型可较为准确地反映试验特征，模拟与试验结果总体上呈现出较好的一致性（如骨架曲线、峰值承载力、残余变形等）。动力灾变响应分析中，结构加固前的平均层间位移超过了限值，在采用所提出的外附加固体系后，位移响应显著降低且结果分布更为均匀，高楼层的峰值及残余位移得到了缓解，整体结构顶层位移平均降低幅度达 75.2%，原结构柱的层间剪力平均降低幅度达 70.96%。总体而言，该加固体系对于改变功能、消耗能量及震后修复起到了重要作用，相关结论可为后续外附加固技术的发展与应用提供参考借鉴。

关键词：外附子结构；装配式；数值模拟；减震加固；性能提升

中图分类号：TU375.4 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508122

Efficient numerical simulation method and dynamic disaster response analysis of an externally-attached braced-frame seismic reinforcement system

CAO Xuyang[1], WANG Zhun[2], JI Kun[1], SHI Jianzhe[1]

（1.College of Civil and Transportation Engineering，Hohai University，Nanjing 210024，China；
2.Nanjing Hydraulic Research Institute，Nanjing 210029，China）

Abstract: China is one of the countries most severely affected by earthquake disasters. As an effective means of improving the seismic capacity of structures，externally-attached structural reinforcement technology has shown rapid development and application in recent years due to its advantages of good integrity，flexibility，and designability. Against this backdrop，the authors combined externally-attached structural reinforcement technology with prefabricated construction techniques to propose a novel externally-attached，prefabricated，self-recovering steel plate concrete frame-brace reinforcement system. This paper first introduces the construction mechanism and composition of this externally-attached system，then elaborates on its efficient overall model. Finally，based on case studies，the dynamic response and performance indicators of existing structures before and after reinforcement with this externally-attached system are evaluated，and the overall reinforcement trend and dynamic catastrophic response are predicted. The results demonstrate that the proposed analytical model can accurately reflect the experimental characteristics，with good overall agreement between simulation and experimental results (e.g.，skeleton curve，peak bearing capacity，and residual deformation). In the dynamic disaster response analysis，the average inter-story displacement exceeds the limit before structural reinforcement. After adopting the proposed external reinforcement system，the displacement response is significantly reduced and the results are more evenly distributed. The peak and residual displacements of high floors are alleviated，the average displacement of the top floor is reduced by 75.2%，and the average interstory shear force of existing column is reduced by 70.96%. In general，this reinforcement system plays an important role in changing functions，consuming energy，and post-earthquake repair. The relevant conclusions can provide a reference for the subsequent development and application of external reinforcement technology.

Keywords: externally-attached substructure; precast; numerical simulation; seismic retrofit; performance improvement

收稿日期：2025-08-31；**修订日期：**2025-09-07

基金项目：国家自然科学基金资助项目（52478165，52208164，52378506，52508262）；江苏省自然科学基金资助项目(BK20240287)；中央级公益性科研院所基本科研业务费专项资金资助项目(Y424003)

频繁的地震活动与严重的震后损失已成为中国面临的重要问题[1-2]。在工业和民用建筑中，特别是早期未进行抗震设计的老旧建筑，由于初期设计基于经验或因设计规范更新，较多已无法满足当前的标准要求，相比新建建筑，老旧建筑将面临更高的地震破坏风险。因此，对老旧建筑实施减震加固至关重要，减震加固技术已成为改善建筑性能的合理选择与有效途径[3-5]。

中国《建筑抗震加固技术规程》JGJ 116—2009[6]明确指出，进行结构减震加固时，必须注重提升整体性能，强调“应防止局部加固导致结构的不规则性，应从整体综合能力的提升出发”。自 20 世纪 70 年代以来，国内外，特别是日本研发了多种外附子结构加固技术。这种加固方法通过将外附子结构与老旧建筑连接，实现两者协同工作，从而改善老旧建筑的受力机制和破坏模式。与传统的构件加固技术相比，外附子结构加固技术在减震效果上表现优越，其通过改变结构形式来增强老旧建筑的整体性，使得结构承载力与刚度更为均匀[7-10]。KURAMOTO 等[11]利用外附钢管混凝土框架体系对既有钢筋混凝土房屋进行加固，结果表明这种框架具备良好的减震性能，并显著提升了现有结构的承载能力与位移延性。曲哲等[12]总结了钢筋混凝土框架外附子结构体系的发展趋势，将子结构类型分为强度型、延性型、消能减震型和摇摆型。MIYAZU 等[13]提出了一种带有耗能装置的外附加固框架子结构体系，分析表明，该方法在不显著增加结构加速度响应的前提下，能够有效防止中低层房屋在强震下的倒塌破坏。WAKITA 等[14]提出了 T 型梁柱节点，经理论和试验验证后，证实了这种节点形式的外附子结构体系加固的有效性，并能显著提高既有结构的承载能力。

现阶段，尽管外附子结构加固技术的性能优势已得到了充分验证，但其在工程中主要采用现浇施工，工序复杂且质量难以控制。此外，现阶段较多采用“以刚克刚”的设计思想，这在一定程度上降低了该加固技术的优势。因此，对于新型外附子结构加固体系的构造形式与设计方法仍有待进一步探索。基于此背景，本文将外附子结构加固技术与装配式建造技术相结合，提出了一种外附装配式自恢复钢板混凝土框架-支撑加固体系。本文从该外附加固体系的构造机理、整体模型、案例分析三个维度，评价了结构加固前/后的动力响应与性能指标，并分析了整体结构的宏观加固效果与损伤演化规律。本文第 1 节侧重构造，介绍外附装配式减震加固体系的连接与优势；第 2 节侧重模拟，介绍外附装配式减震加固体系的数值模型与验证；第 3 节侧重评估，结合案例开展外附装配式减震加固体系的动力灾变响应分析；第 4 节为结论与展望。

1 外附装配式框架-支撑减震加固体系

(1)构造形式与原理

本文所提出的外附装配式自恢复钢板混凝土框架-支撑加固体系的原理如图 1 所示。这一加固体系主要由外附的预制梁、预制柱、预制支撑以及预应力筋构成，所有构件均可预先制造并在现场组装。外附预制梁和预制柱均为钢板增强的混凝土构件，采用钢板代替传统钢筋，这不仅使得构件具备钢骨的结构效能，同时也便于连接端部；其钢板在两端沿轴线方向延伸出一定的距离，伸出部分预先开孔，以简化“梁-柱”和“柱-柱”之间的钢板连接。外附预制构件与原有结构通过锚栓进行连接，在预制构件浇筑过程中，需要采用预留管道的方式，以确保锚栓的位置。为了增强外附子结构与原结构间的连接性能，可以使用砂浆填充间隙。预应力筋沿轴线方向穿过外附预制柱，一端的预应力筋锚固于基础底部，另一端则锚固在结构顶部，从而形成完整的外附装配式加固体系。

(2)技术优势与特点

外附子结构加固技术在提升既有建筑的抗震性能与耐久性方面展现出显著的优势，其核心在于外附子结构与既有结构之间的协同工作性能。首先，外附子结构可以有效地分担既有建筑的荷载，减轻其受力状况，提升整体结构的承载能力和安全性。其次，通过精确的设计与施工，外附子结构能够与既有结构紧密结合，实现力的均匀传递，从而优化结构的应力分布，降低脆弱点的风险。此外，该技术在施工过程中对原有结构的干扰较小，能够在不影响正常使用的情况下进行加固，保证了施工的灵活性和经济性。外附子结构加固技术通过高效的协同工作，增强了建筑物的整体性能，使其能更好地抵御地震灾害和长期服役带来的损伤，对于地震多发区的既有建筑加固改造具有重要参考意义。

2 高效数值模拟方法

目前主流的结构数值分析方法根据建模思路的不同分为两类：基于梁柱杆系单元的分析方法和基于三维实体单元的分析方法。基于梁柱杆系单元的分析方法通常对细部构造进行了简化或等效处理，这使得建模过程便捷高效；基于三维实体单元的分析方法更加细致，但其建模过程复杂且计算时间较长。因此，结合装配式结构的独特性，发展一种既精细又高效的数值模拟方法尤为重要。OpenSEES 是一

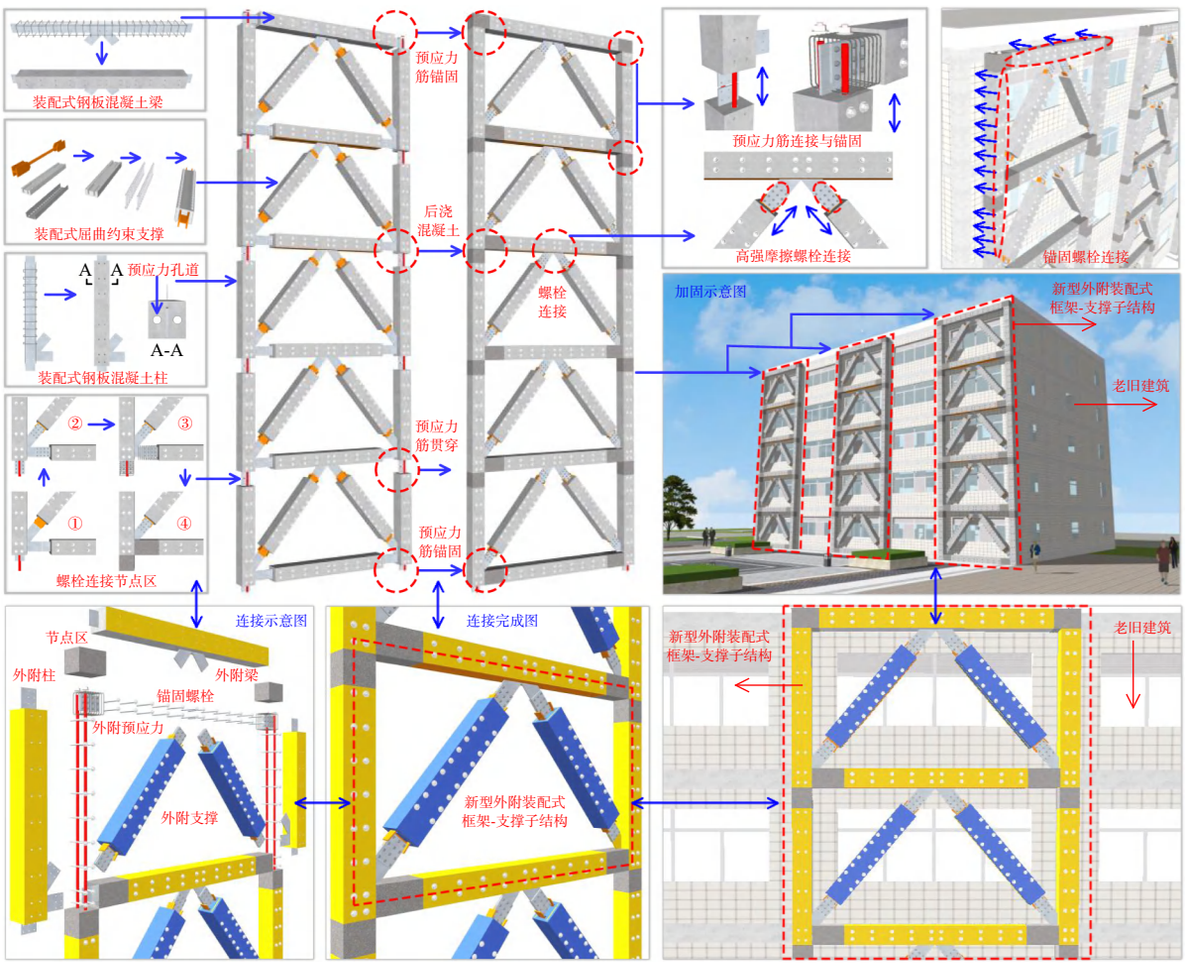


图 1　提出的外附装配式框架-支撑子结构加固示意图

Fig. 1　Schematic diagram of the retrofitting form of the proposed externally-attached frame-braced substructure

款专门的有限元软件，该软件的主要用途是进行结构工程、桥梁工程以及岩土工程的地震反应分析，其计算精度和效率得到了充分验证。本章节介绍的高效数值模拟方法即基于 OpenSEES 软件平台[15]。

2.1　建模方法介绍

在该装配式子结构中，外附预应力和外附支撑是主要的加固构件，分别承担震后恢复和消能减震的作用。为了独立分析这两类构件的影响，相关的数值模型被划分为两类：第一类模型仅考虑外附预应力的子结构，第二类模型则只关注外附支撑的子结构，图 2 展示了二类模型的结构组成及单元选择。图 3 为外附装配式加固体系数值模拟细节示意图。

(1)主体框架的单元与材料考虑

既有框架(灰色直线)和外附框架(蓝色直线)的梁柱主体均采用非线性梁柱单元，并配置纤维梁柱截面，主体框架结构与地面固接，如图 3(a)所示。这些非线性梁柱单元基于柔度法进行编译，其柔度矩阵通过高斯积分法进行计算。对于混凝土纤维和钢板/钢筋纤维，分别使用 Concrete02 和 Steel02 单轴材料本构模型。在计算时，通过对某一截面上所有混凝土和钢筋纤维进行积分，可以得到该截面的荷载-变形关系。此外，对于箍筋约束区域的核心部分，可采用约束混凝土本构模型。

(2)节点核心区的单元与材料考虑

对于外附子结构体系的梁-柱节点区，鉴于其采用了预制与后浇连接，这一形式会影响节点的剪切等行为，从而对整体结构的加固性能产生影响。因此，在节点区选用了 Joint2D 单元，以重点分析预制-后浇连接所引起的力学特性变化，如图 3(b)所示。Joint2D 单元被简化为一种四边形剪切板，包含 4 个外部节点与 1 个中心节点。中心节点负责控制核心区域的弯矩-转角关系和剪切变形模式。在该模型之中，中心节点采用的是 Pinching4 材料本构模型，此模型能够有效反映节点区在滞回加载下的强度退化、刚度退化以及捏缩滑移等特征。

(3)新旧结构连接界面的单元与材料考虑

外附构件通过 Rigidlink 约束与现有的梁柱连接。在外附预制柱的上部，采用了 Zerolengthsection 单元来替代 Rigidlink 约束，旨在有效反映既有结构与外附子结构在界面处的剪切行为特征，如图 3(c)所示。Zerolengthsection 单元局部坐标系的 x 轴与整

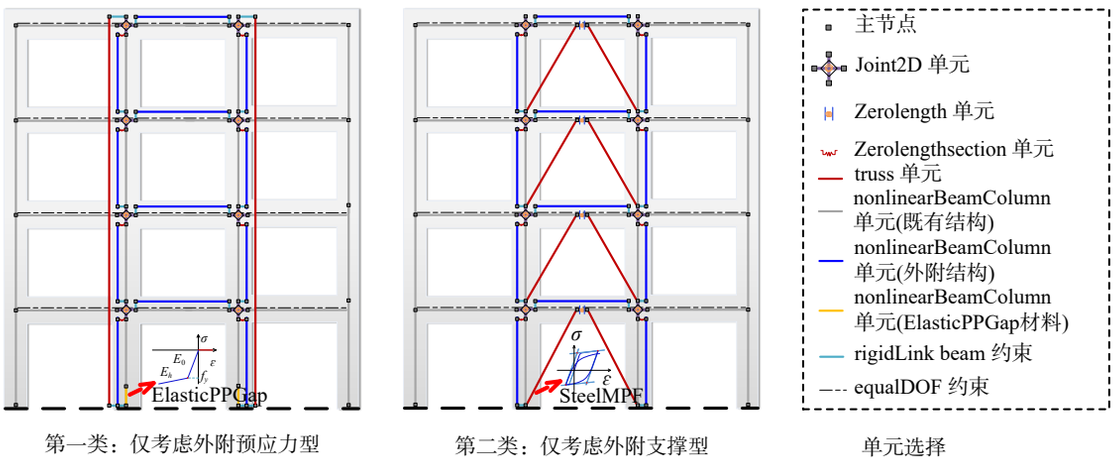
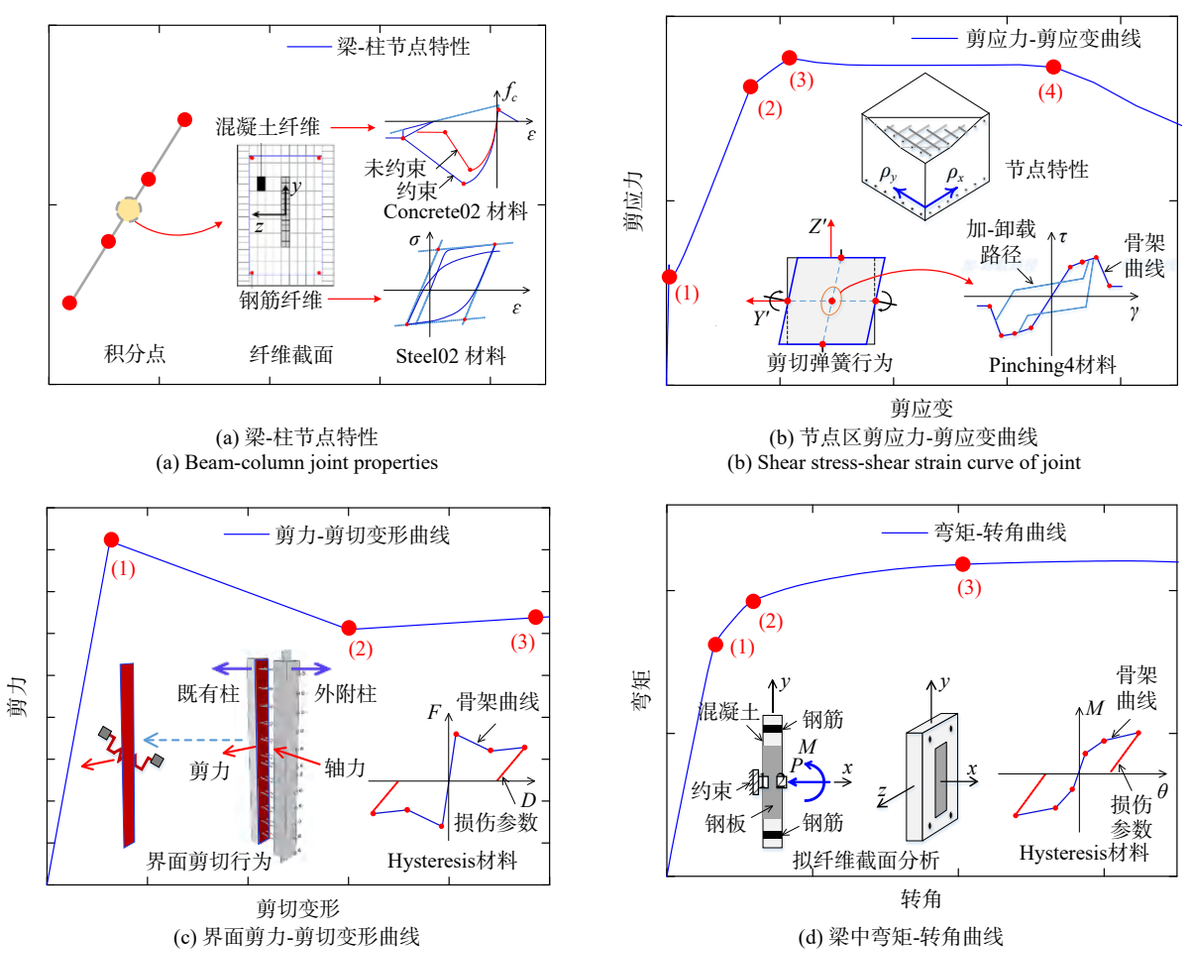


图 2 外附装配式框架支撑子结构数值分析模型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of numerical models of the externally-attached frame-braced substructure



(a) 梁-柱节点特性
(a) Beam-column joint properties

(b) 节点区剪应力-剪应变曲线
(b) Shear stress-shear strain curve of joint

(c) 界面剪力-剪切变形曲线
(c) Interfacial shear stress-shear deformation curve

(d) 梁中弯矩-转角曲线
(d) Moment-rotation curve of beam middle

图 3 外附装配式框架支撑子结构建模局部细节示意图

Fig. 3 Schematic diagram of local details of the new externally-attached frame-braced substructure

体坐标系的面外轴 y 重合，而其局部坐标系的 y 轴则与整体坐标系的 x 轴对齐，这样的设置确保了 Zerolengthsection 单元的方向与实际界面的方向一致。该 Zerolengthsection 单元被赋予单轴截面，并将 Hysteretic 材料模型应用于局部 y 轴方向以准确表征该方向上剪力与应变的关系。Hysteretic 材料的具体控制点参数按照下式进行计算：

$$\tau=\begin{cases}\lambda_1\cdot\Delta, & \Delta\leqslant\Delta_{u1}\\ \tau_f+\lambda_2(\Delta-\Delta_{u1}), & \Delta_{u1}<\Delta\leqslant\Delta_{u2}\\ \beta\cdot\tau_f, & \Delta>\Delta_{u2}\end{cases} \tag{1}$$

式中，τ 和 Δ 分别表示界面剪应力和位移；λ_1 和 λ_2 分别表示曲线上升段与下降段的割线刚度；τ_f 为峰值应力；β 为残余应力系数；Δ_{u1} 和 Δ_{u2} 分别表示峰值应力和残余应力对应的剪切位移。

（4）黏结滑移的单元与材料考虑

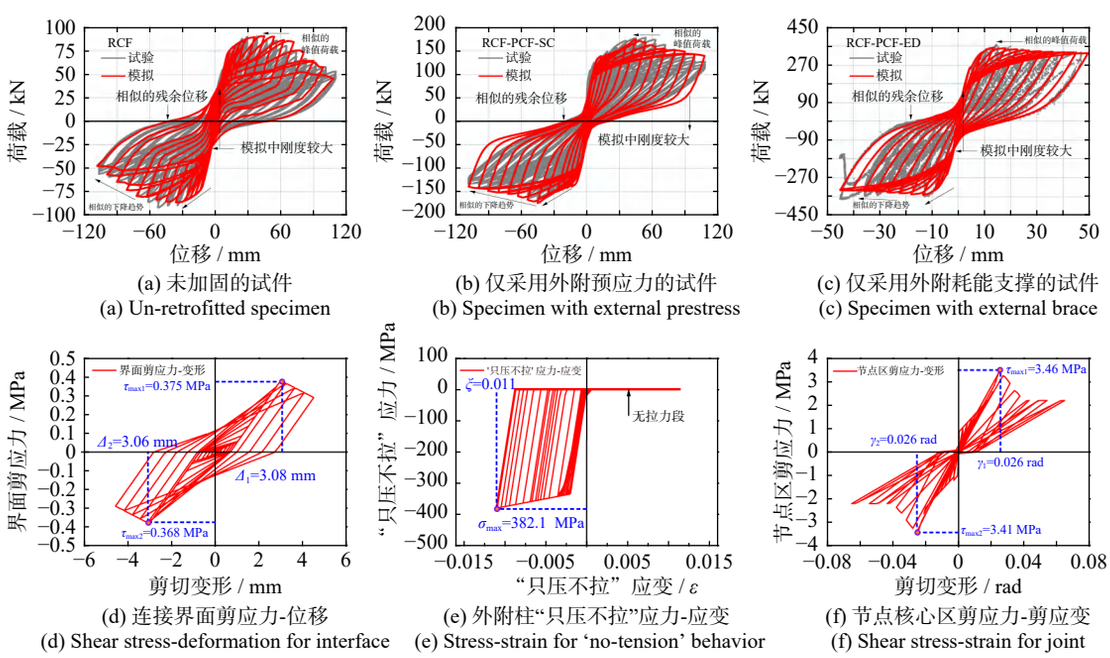
由于外附子结构采用预制装配施工，其连接处的浇筑质量往往会导致钢板或钢筋的滑移。为考虑滑移等因素的影响，在加固体系梁的中点断开并设置 Zerolength 单元，该单元的两端为具有相同坐标的 2 个节点。在二维模型中，Zerolength 单元能够反映连接点 3 个自由度的荷载-变形关系，如图 3(d)所示。在此模型中，仅考虑旋转方向的自由度并运用 Hysteretic 材料本构，而其余 2 个自由度则通过等 EqualDOF 约束来处理。Hysteretic 本构参数可以通过拟纤维截面分析单独获得。需要指出的是，本节中提出的两类外附装配式子结构加固模型中，第一类模型并没有在梁中部设置 Zerolength 单元，而是将其影响集中在 Joint2D 四边的转动弹簧上；而第二类模型则在梁中部设置了 Zerolength 单元。

（5）预应力筋的单元与材料考虑

对于考虑外附预应力的模型，预应力的模拟采用 Truss 单元与 Steel02 材料本构。Truss 单元的面积采用预应力筋的实际截面积，而 Steel02 材料则可以定义初始应力值以有效表征施加的预应力。在框架柱底部的塑性区纤维截面上，使用 ElasticPPGap 材料替代 Steel02，该材料能体现“只压不拉”的特性，其目的是模拟外附子结构柱底的开合行为及钢筋在受力时的“只压不拉”特征。对于考虑外附支撑的装配式子结构，由于屈曲约束支撑主要承受轴力，因此同样采用 Truss 单元来模拟其性能并赋予其 SteelMPF 材料模型。SteelMPF 材料可以分别定义在受拉和受压方向上的力学特征，兼具计算高效率和操作简便性。为满足刚性楼板假定，既有结构两外侧的节点在整体 x 轴方向采取 EqualDOF 约束。

2.2　模型的验证

图 4 展示了数值模拟与试验曲线的对比结果，分别采用了三组对比试件，图 4(a)表示未加固的试件，图 4(b)表示仅采用外附预应力的试件，图 4(c)表示仅采用外附耗能支撑的试件，试验曲线的具体数据可参考文献 [16-18]。可以看出，尽管模拟中图 4(a)的初始刚度和图 4(b)的卸载刚度变化较大，但模拟结果与试验结果总体上呈现出较好的一致性（如峰值承载力、卸载刚度、残余变形等），这表明提出的模型具备对于整体结构的力学行为的描述能力。图 4(d)~(f)展示了该数值模型的细部特征预测，分别包含了连接界面剪应力-位移特征、外附柱“只压不拉”应力-应变特征和节点核心区剪应力-剪应变特征，上述局部响应曲线特征与该加固体系的理论力学机制相一致。局部层次上，试验的滞回曲线呈现出更为明显的捏缩现象，在滞回环后期，结构加载刚度逐步降低，而数值模型则更为理想光滑，模拟过程中也呈现出更大的加载刚度与更为饱满的耗能效果。该现象也与实际加载工况中构件基底滑移、加载端初始间隙等因素相关。此外，本次模拟采用的是二维模型，并未考虑结构面外扭转及失稳等工况，而在试验中，上述因素会对结构的加载刚度与滞回响应产生影响。总体而言，所提出的两类分析模型均可以反映试验中的力学特征，这也在一定程度上说明了该模型的适用性与可行性。在后续研究中，可采用三维数值模型以进一步表征该外附加固体系的局部行为特征。表 1 展示了模拟中 Pinching4 及 Hysteretic 材料本构的主要参数取值。



(a) 未加固的试件
(a) Un-retrofitted specimen

(b) 仅采用外附预应力的试件
(b) Specimen with external prestress

(c) 仅采用外附耗能支撑的试件
(c) Specimen with external brace

(d) 连接界面剪应力-位移
(d) Shear stress-deformation for interface

(e) 外附柱“只压不拉”应力-应变
(e) Stress-strain for ‘no-tension’ behavior

(f) 节点核心区剪应力-剪应变
(f) Shear stress-strain for joint

图 4　外附装配式加固体系数值模型验证与细部特征预测

Fig. 4　Numerical model verification and local feature prediction of the externally-attached substructure

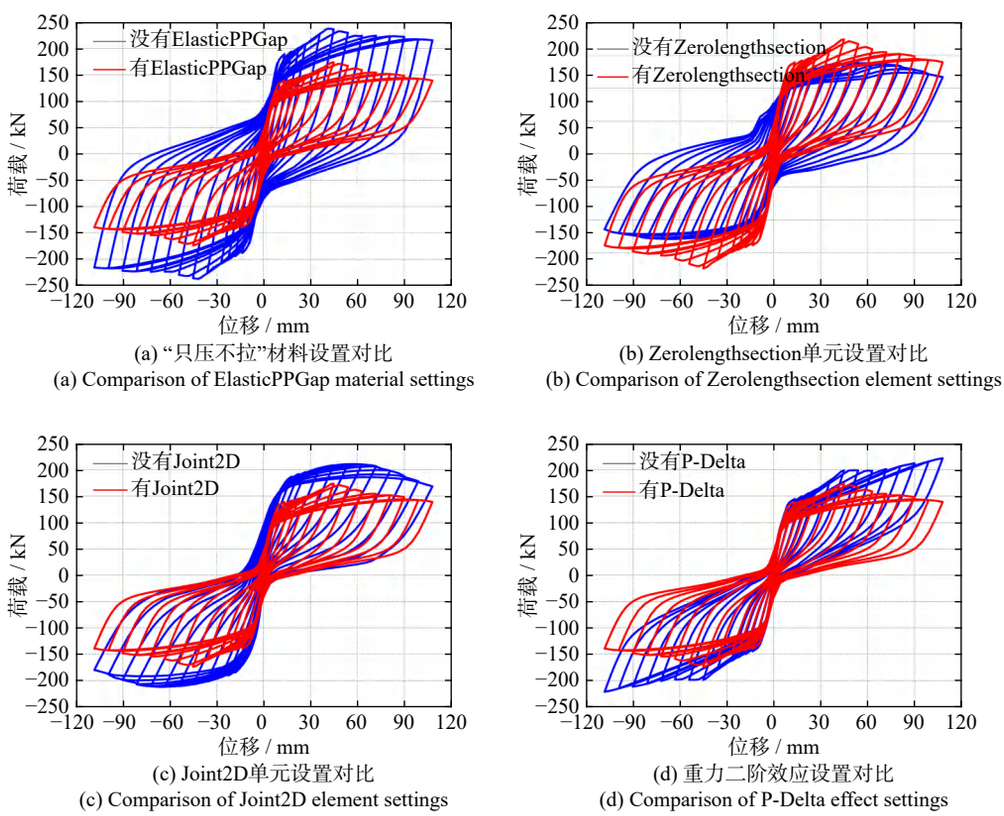
表 1 Pinching4 及 Hysteretic 材料本构主要参数取值

Tab. 1 Primary parameter values in Pinching4 and Hysteretic materials

Pinching4材料参数	取值	Hysteretic材料参数	取值
加卸载路径参数	[0.15,0.15;0.15,0.15;0.0,0.0]	滞回捏缩参数(荷载)	0.8
卸载刚度退化参数	[1.30,0.0,0.10,0.0,5.5]	滞回捏缩参数(变形)	0.8
加载刚度退化参数	[0.12,0.0,0.9,0.0,0.95]	卸载刚度退化参数	0.5
强度退化参数	[1.11,0.0,0.32,0.1,0.125]	延性退化参数	0.25
能量衰减参数	10	能量衰减参数	0.25

2.3 主要参数分析

以仅考虑外附预应力的装配式子结构数值模型为例，进一步开展参数分析以验证关键单元和材料本构的设置及其必要性，包括“只压不拉”材料设置、Zerolengthsection 单元设置、Joint2D 单元设置及重力二阶效应设置，如图 5 所示。从分析结果中可见，未使用“只压不拉”材料的模型表现出更高的承载能力和更大的滞回面积。然而，在考虑该材料后，滞回响应的残余变形显著降低，预应力的效果得以充分施展。相比之下，当模型不考虑零长截面单元时，虽然考虑该单元后也能降低残余变形，但其效果相较于“只压不拉”材料则显得不够明显。此外，与梁-柱直接刚性连接的情况相比，考虑节点单元的数值模型展现出相对较低的承载能力，而其他指标(如刚度和残余变形)的变化则几乎可以忽略，这在一定程度上反映了预制-装配施工和节点核心区的剪切变形对于整体结构加固性能的影响。重力的二阶效应体现在滞回曲线的下降段，考虑二阶效应的模型在峰值荷载后其承载力逐渐降低衰减，相反未考虑二阶效应的模型其承载力持续上升。



(a) “只压不拉”材料设置对比
(a) Comparison of ElasticPPGap material settings

(b) Zerolengthsection单元设置对比
(b) Comparison of Zerolengthsection element settings

(c) Joint2D单元设置对比
(c) Comparison of Joint2D element settings

(d) 重力二阶效应设置对比
(d) Comparison of P-Delta effect settings

图 5 相关单元/材料本构设置及必要性验证

Fig. 5 Setting of relevant element / material models and verification of necessity

3 动力灾变响应分析

本节在前述数值模型的基础上，结合一个加固案例，展开了既有结构加固前后的动力时程响应分析与性能指标评价，进而预测整体结构加固前后的宏观趋势与灾变模式，并对比了外附子结构体系各组成成分的贡献，以进一步评估该外附子结构的加固效果。

3.1 案例概况

该案例旨在对一座五层办公楼进行加固改造，该地区的抗震设防烈度为 8 度(0.2g)。建筑的平面

尺寸为 27 m×15.3 m, 纵向为 5 跨, 每跨 5.4 m, 横向为 3 跨, 外侧跨度为 6.3 m, 中间跨度为 2.7 m, 建筑总高度为 18 m, 层高为 3.6 m, 如图 6 所示。原结构的框架柱截面为 400 mm×400 mm, 框架梁的截面尺寸为 300 mm×500 mm。通过软件对既有结构进行建模分析, 计算其在小震下的纵向地震响应, 发现其弹性最大层间位移角超过了抗震设计规范 GB 50011—2010[17] 中规定的限值 1/550。因此, 该结构在纵向方向需加固修复, 选定边跨立面的 5 层 5 跨单榀框架进行详细的加固分析。

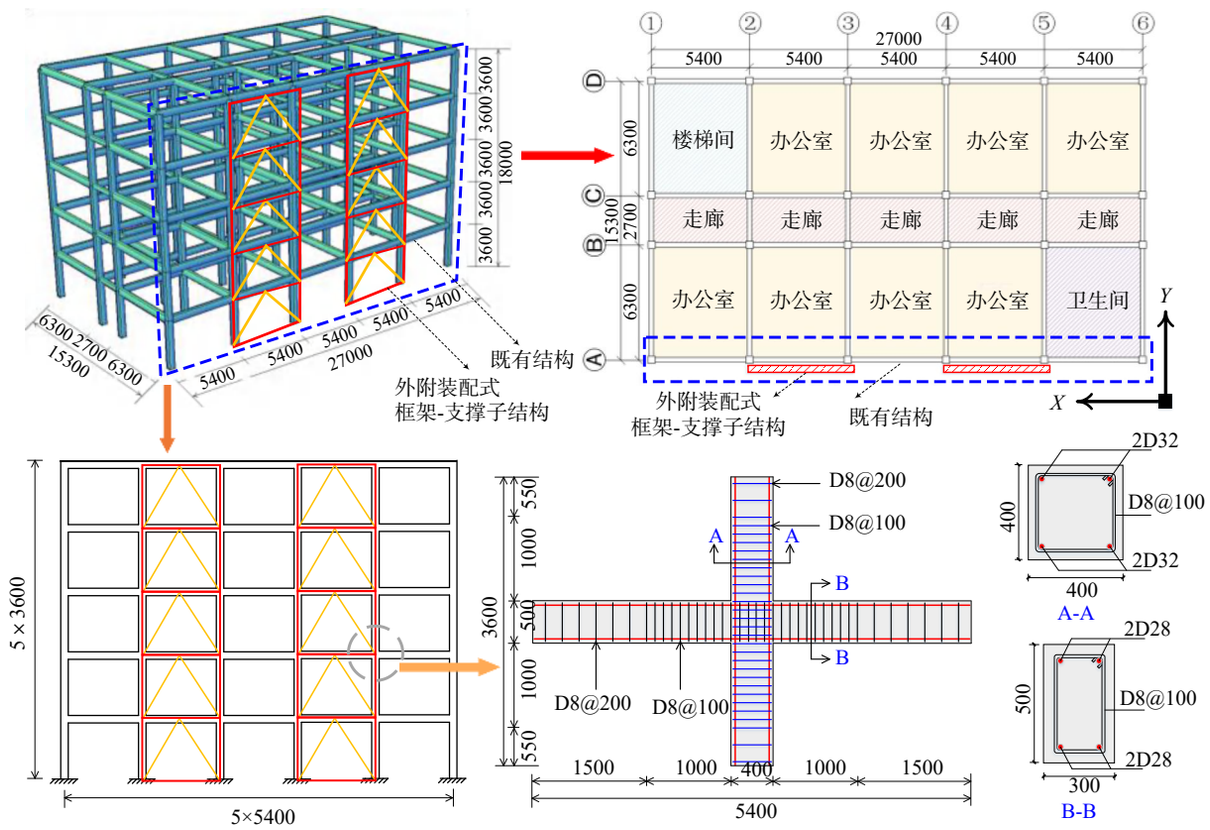


图 6　分析案例的工程概况及加固示意图 (单位: mm)

Fig. 6　Project overview and retrofitting diagram of the case study (Unit:mm)

拟在所选框架的第二、四跨沿结构全高进行外附加固, 采用空间对称加固策略, 并随之展开减震性能的对比评估。为了进一步验证所提出的外附子结构的整体效果及各组成部件的贡献作用, 加固工况案例共设置五种, 如图 7 所示。第一种为未加固框架并作为对照组, 第二种仅考虑外附框架子结构, 第三种考虑外附框架和预应力, 第四种考虑外附框架和支撑, 第五种为完整的外附子结构形式。加固设计流程可参考文献 [19], 外附预制柱截面尺寸取 400 mm×400 mm, 外附预制梁截面尺寸取 400 mm×500 mm, 钢筋与箍筋的型号保持与原结构相同, 分别为 HRB400 和 HPB300, 混凝土等级为 C30。第四种和第五种采用外附支撑, 其芯板尺寸为 15 mm×150 mm, 芯板型号为 Q235。第三种和第五种采用外附预应力, 其初始应力为 880 MPa, 预应力型号及数量为 2-30φ_s15.2。

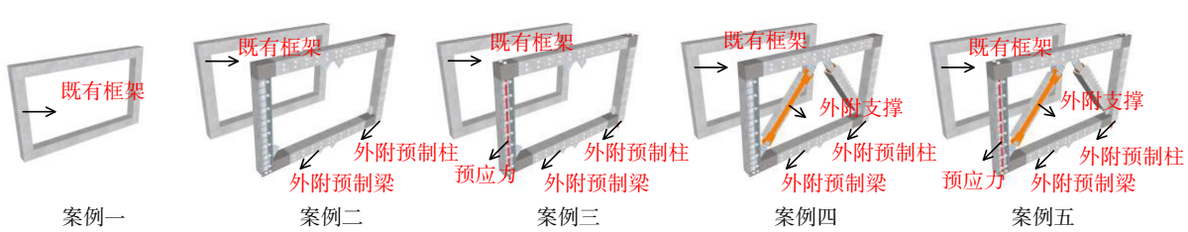


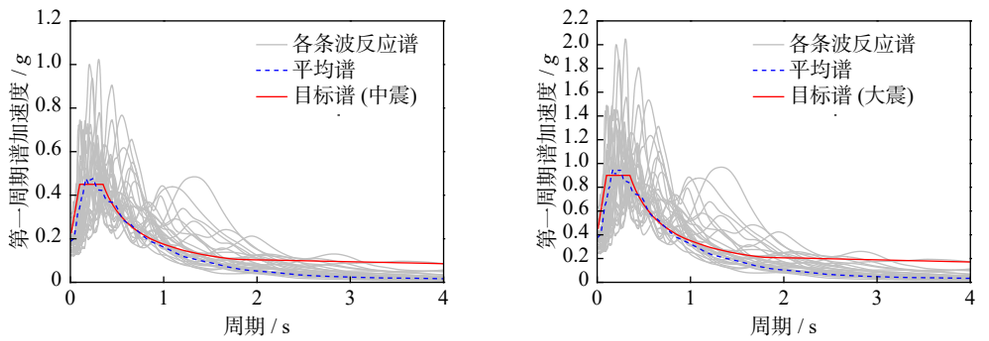
图 7　五种案例工况示意图

Fig. 7　Schematic diagram of five case conditions

3.2　地震动选取

为评估上述五种工况中结构加固前后的地震响应, 从 PEER 数据库选取 30 条远场地震动记录(断层距大于 20 km)且谱方向均为一致。运用 PEER 数据库的调幅功能, 将这 30 条地震动记录的反应谱均值

与 8 度设防下中震(S_{a-max}=0.45g)及大震(S_{a-max}=0.9g)的设计加速度反应谱相拟合,且在结构主要周期处,平均谱与目标谱的加速度误差不得超过 20%,如图 8 所示。



(a) 中震下谱加速度
(a) Spectral acceleration under fortification seismic level

(b) 大震下谱加速度
(b) Spectral acceleration under rare seismic level

图 8 地震动选取与拟合

Fig. 8 Ground motion selection and fitting

3.3 动力灾变响应评估

基于上述 30 条地震动与 5 种加固工况,展开结构在中震与大震下的动力时程响应评估。对于每种分析案例,结果总结如下:

案例一为未加固的情况,在中震作用下,大部分地震动下结构的层间位移响应均超过了限值,并且结构二至四层的平均最大层间位移角(0.542%、0.553%、0.524%)均超过了 0.5%,同时,数据的离散性较为明显,各层标准差较大。在大震作用下,尽管各层的平均最大层间位移角在限值范围内,但仍有 10 条地震动导致结构响应超过限值,最大值达到 2.693%,几乎是限值 1.5% 的 1.8 倍。同样的,各条地震动下结构的最大层间位移角数据离散性较大。

案例二仅采用外附框架,总体而言,最大层间位移角沿高度的分布情况与案例一相似,但案例二的结果更为均匀且数值有所减小。在中震及大震作用下,结构各层的平均最大层间位移角都小于限值,这也证明了外附框架对于整体结构刚度提升及承载力提高的有益效果。然而,案例二仍然存在个别地震动的响应高于限值的情况。

案例三采用外附框架及预应力,对于低楼层,其结构响应与案例二类似,然而随着楼层的升高,预应力的效果开始凸显。以结构顶层为例,在中震作用下,平均最大层间位移角从案例二中的 0.322% 降低至案例三中的 0.141%;在大震作用下,平均最大层间位移角从案例二中的 0.674% 降低至案例三中的 0.418%,平均降低幅度达到 47.1%。中震作用下仅 3 条地震动超过了位移角限值。

案例四采用外附框架及支撑,相比案例二,外附支撑提供了大量的侧向刚度,进而沿结构全高大幅减小了最大层间位移角。在中震及大震作用下,30 条地震动的结构响应均小于限值。以大震为例,自下而上各层的最大层间位移角均值分别为 0.639%、0.642%、0.605%、0.511% 和 0.313%,相比案例二,其最大降低幅度达到了 53.6%。除此之外,结构底部三层的最大层间位移角分布更为均匀,标准差的变化范围也更小。

案例五包含了完整的外附装配式框架-支撑子结构,在所有的五种案例中,其各层的平均最大层间位移角均为最小,缓解了整体结构的地震需求,即使其最大平均位移角(中震下 0.293%、大震下 0.628%)也比案例一未加固框架的最小值(中震下 0.344%、大震下 0.735%)要小;其大震下的最大降低幅度发生在结构顶层,达到了 69.7%。相比案例三,外附支撑提升了初始刚度,显著降低了位移角响应且使得结果分布更为均匀,对于改变结构体系及消耗地震能量起到了重要作用。相比案例四,外附预应力缓解了高楼层的位移响应,在一定程度将整体结构曲线“拉回”原点,对于结构的自恢复功能及震后修复功能起到了重要作用。上述五种案例的对比说明,案例五结合了其余几组的特点,起到了最优的加固效果;外附装配式框架-支撑子结构具有显著的加固优势,其各部分均贡献作用且起到了定向有益效果;相关的计算及对比可为上述外附装配式加固子结构的推广及应用提供参考。

图 9 和图 10 展示了上述五种案例中,30 条地震动下结构的最大层间位移角的统计结果,中震及大震下的位移角限值也用红线标注。数据显示,结构加固前(案例一)的位移角响应分布不均匀,存在部分结果超过 1%(中震下)及 2.5%(大震下)。在采用完整的外附装配式框架-支撑子结构加固后(案例五),结构的位移角响应显著降低至限值以下。总体而言,中震及大震作用下位移角分布由最大至最小

的顺序为案例一>案例二>案例三>案例四>案例五，表明了所提出的外附装配式框架-支撑子结构是一种有效的加固形式，可以在结构体系层次提升整体性能。

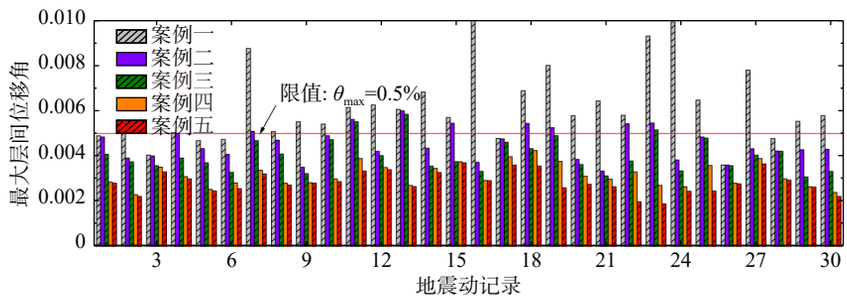


图 9　中震各条波最大层间位移角

Fig. 9　Maximum interstory drift ratios of all the ground motions under fortification seismic level

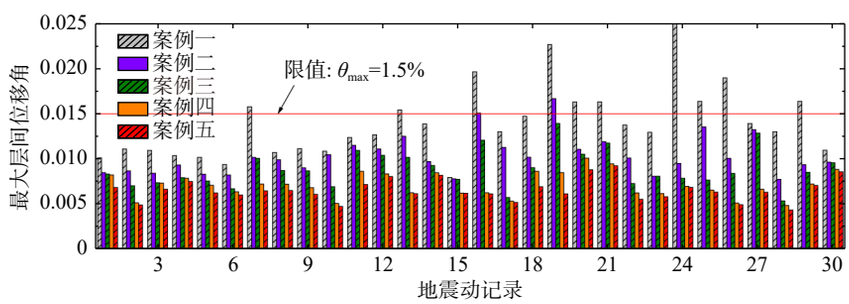


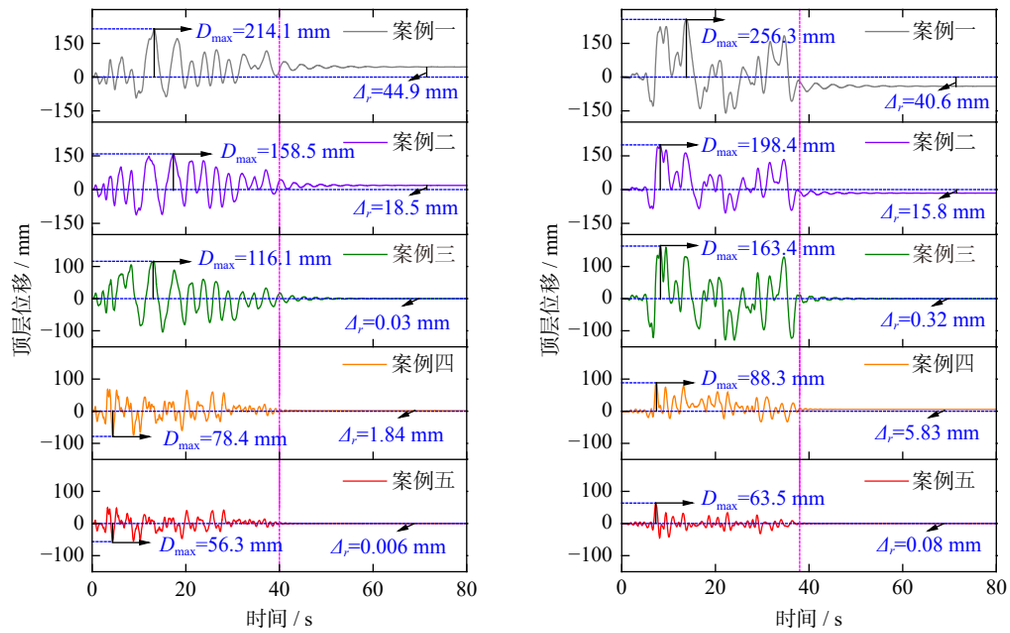
图 10　大震各条波最大层间位移角

Fig. 10　Maximum interstory drift ratios of all the ground motions under rare seismic level

通过将地震动记录的加速度数据用 0 来拓展，可以分析比较上述五种案例的结构顶部位移响应及残余位移响应。以两条典型地震动(7 号波 WND233、15 号波 A-BIS270)为例，进一步分析加固前后各工况的结构位移变化。由于大震会导致结构较明显的地震响应，图 11 仅展示了大震下的统计结果。竖虚线表示空震的边界时间，在该时间后地震动加速度数据为 0。可以看出，结构顶部位移峰值由大到小的顺序为案例一>案例二>案例三>案例四>案例五，其中四条典型波(7 号波 WND233、15 号波 A-BIS270、21 号波 05O07NS、27 号波 H-PRK180)的平均值分别为 240.2、170.5、133.5、79.8 和 58.9 mm。结构加固前(案例一)的顶部位移峰值为 27 号波 H-PRK180 下的 289.2 mm，该数值在采用完整的外附装配式框架-支撑子结构加固后(案例五)降低至 61.5 mm，降低了 227.7 mm。相比于由外附预应力导致的案例二至案例三的变化幅度(22.5%)和案例四至案例五的变化幅度(26.1%)，由外附支撑导致的案例二至案例四的变化幅度(52.8%)展示出更为显著的加固效果，反映了外附支撑所提供的巨大侧向刚度。案例一至案例五的顶层位移平均降低幅度为 75.2%，各条地震动下结构的顶层位移变化范围为 73.1%~78.7%。

对于结构顶层残余位移，其由大到小的顺序为案例一>案例二>案例四>案例三>案例五，其中四条典型波(7 号波 WND233、15 号波 A-BIS270、21 号波 05O07NS、27 号波 H-PRK180)的平均值分别为 35.2、13.9、5.02、0.62 和 0.19 mm。结构加固前(案例一)的残余位移峰值为 7 号波 WND233 下的 44.9 mm，该数值在采用完整的外附装配式框架-支撑子结构加固后(案例五)降低至 0.006 mm，几乎消除了结构的残余响应。尽管相比案例二，案例四大幅减小了结构的残余位移(达 64.1%)，但其降低比例不如案例三和案例五明显(含预应力的工况)。案例三和案例五中的外附预应力可以将整体结构曲线“拉回”原点，进而大幅降低了结构的震后残余变形(几乎达 100%)，实现了结构的自恢复功能，提升了系统的可修复性。

图 12 展示了案例一和案例五的原结构边柱加固前/后的层间剪力分布，其中图 12(a)和(b)分别显示了中震和大震工况。图 12(a)中，原结构加固前(案例一)的平均层间剪力从一层至五层分别为 204.1、200.3、169.9、155.8 和 114.9 kN，加固后(案例五)的原结构平均层间剪力从一层至五层分别为 72.3、64.1、52.5、39.1 和 19.3 kN，平均降低幅度达 71.95%。同样，图 12(b)中，原结构加固前(案例一)的平均层间剪力从一层至五层分别为 614.8、595.3、543.1、511.6 和 436.4 kN，加固后(案例五)的原结构平均层间剪力从一层至五层分别为 247.1、217.1、180.9、130.1 和 64.3 kN，平均降低幅度达 69.97%。上述数据



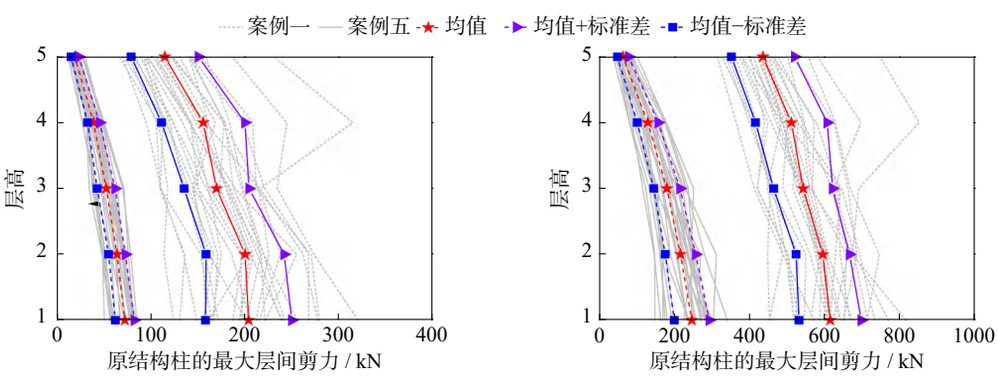
(a) 7号波WND233时程分析结果
(a) Results of 7th ground motion: WND233

(b) 15号波A-BIS270时程分析结果
(b) Results of 15th ground motion: A-BIS270

图 11 典型地震动下结构顶层时程响应分析

Fig. 11 Time history response analysis of structural roof under typical ground motions

表明，采用外附子结构加固后，原结构的层间剪力得到了显著降低且数据分布更为均匀，地震损伤有效转移至外附子结构，实现了高效整体加固与减震性能提升。



(a) 中震工况
(a) Under fortification seismic level

(b) 大震工况
(b) Under rare seismic level

图 12 原结构边柱加固前/后层间剪力分布

Fig. 12 Interstory shear force distribution for corner column of existing building before/after strengthening

4 结 论

本文提出了一种外附装配式自恢复钢板混凝土框架-支撑加固体系，首先介绍了该外附加固体系的构造机理与组成方式；随后建立了该外附加固体系的高效数值模型；最后结合案例，分析了整体结构的加固宏观加固效果与动力灾变响应。本文的相关结论如下：

(1)构造机理层面

所提出的外附加固体系结合了附加子结构、预制-装配、震后自恢复和损伤控制等技术，与原结构协同工作，并在整体结构层次提升了抗震性能。有益作用包括：①外附子结构在抗震性能方面优于传统构件层次加固，其施工主要在建筑外部进行，不干扰内部活动，对于重要生命线工程尤为关键。②外附的预制梁柱有效地增大了原框架的截面积，提供了外附预应力和支撑的安装空间，有效避免原结构节点区可能出现的损伤集中和提前破坏。③外附子结构显著提高了结构的整体抗侧刚度，减轻了原结构的地震力需求，保护了主体结构，达到损伤转移的效果且震后可修复更换。④外附预应力使结构的初始刚度和可恢复能力得到了显著提升，减少了震后的残余变形并增强了整体结构的抗震韧性。⑤预制装配技术和全螺栓连接的方式极大地提高了施工效

率，确保了构件的浇筑质量，降低了全生命周期的维护成本。

（2）数值模型层面

基于 OpenSEES 软件平台建立了该外附子结构的高效数值模型，模型构造被划分为两类：第一类模型仅考虑外附预应力的子结构，第二类模型则只关注外附支撑的子结构。基于提出的高效模型，进一步验证了相关单元和材料本构的设置必要性。总体而言，所提出的两类分析模型均可以反映试验中的力学特征，模拟结果与试验结果总体上呈现出较好的一致性，这在一定程度上说明了该模型的适用性与可行性。局部层次上，试验的滞回曲线呈现出更为明显的捏缩现象，在滞回环后期，结构加载刚度逐步降低，而数值模型则更为理想光滑，模拟过程中也呈现出更大的加载刚度与更为饱满的耗能效果。该现象也与实际加载工况中构件基底滑移、加载端初始间隙等因素相关。此外，本次模拟采用的是二维模型，并未考虑结构面外扭转及失稳等工况，而在试验中，上述因素会对结构的加载刚度与滞回响应产生影响。在后续研究中，建议进一步采用三维数值模型，以进一步表征该外附加固体系的局部行为与刚度特征。

（3）动力灾变分析层面

基于 5 跨-5 层框架开展了该外附子结构的加固性能评估与动力灾变分析，选取了 PEER 中的 30 条远场地震动并设置了 5 种方案，以验证该子结构的整体效果以及各组成部件的贡献作用。结果表明，加固前原结构在大部分地震动下的层间位移响应均超过了限值。外附支撑提升了初始刚度，显著降低了位移响应且使得结果分布更为均匀，对于改变结构体系及消耗地震能量起到了重要作用；外附预应力缓解了高楼层的峰值及残余位移响应，对于结构的自恢复及震后韧性功能起到了重要作用。案例五结合了其余几组的特点，起到了最优的加固效果，加固后顶层位移平均降低幅度达 75.2%，中震和大震下加固后原结构柱的层间剪力平均降低幅度达 71.95% 和 69.97%。总体而言，外附子结构通过自身结构形式、连接构造等的改变，实现了整体结构的加固修复与性能提升，相关结论可为地震多发区老旧房屋的加固修复提供参考借鉴。

参考文献：

[1] CABAÑAS L，BENITO B，HERRÁIZ M. An approach to the measurement of the potential structural damage of earthquake ground motions[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics，1997，26(1)：79-92.

[2] BIRD J F，BOMMER J J，CROWLEY H，et al. Modelling liquefaction-induced building damage in earthquake loss estimation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering，2006，26(1)：15-30.

[3] 吴刚，冯德成，徐积刚，等. 损伤可控结构基本概念、实现途径和设计方法 [J]. 建筑结构学报，2025，46(7)：218-230.
WU Gang，FENG Decheng，XU Jigang，et al. Concepts，pathways and design methods of damage controllable structure[J]. Journal of Building Structures，2025，46(7)：218-230.

[4] WANG H T，TANG C，CHEN M S，et al. Experimental study on the flexural performance of prestressed RC beams with post-tensioned CFRP strands[J]. Engineering Structures，2024，309：118118.

[5] ALJAWHARI K，GENTILE R，GALASSO C. A fragility-oriented approach for seismic retrofit design[J]. Earthquake Spectra，2022，38(3)：1813-1843.

[6] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑抗震加固技术规程：JGJ 116—2009[S]. 北京：中国建筑工业出版社，2009.
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Technical specification for seismic strengthening of buildings：JGJ 116—2009[S]. Beijing：China Architecture & Building Press，2009.

[7] 吴刚，曹徐阳，冯德成. 面向城市更新的外附子结构式既有建筑抗震性能提升技术研究进展 [J]. 建筑结构，2024，54(19)：21-34.
WU Gang，CAO Xuyang，FENG Decheng. Research progress on seismic performance improvement technology of existing buildings via externally-attached substructure approach for urban renewal[J]. Building Structure，2024，54(19)：21-34.

[8] CAO X Y，SHEN D J，FENG D C，et al. Seismic retrofitting of existing frame buildings through externally attached sub-structures：state of the art review and future perspectives[J]. Journal of Building Engineering，2022，57：104904.

[9] CAO X Y，FENG D C，WU G. Seismic performance upgrade of RC frame buildings using precast bolt-connected steel-plate reinforced concrete frame-braces[J]. Engineering Structures，2019，195：382-399.

[10] XU J G，CAO X Y，WU G. Seismic collapse and reparability performance of reinforced concrete frames retrofitted with external PBSPC BRBF sub-frame in near-fault regions[J]. Journal of Building Engineering，2023，64：105716.

[11] KURAMOTO H，HAGA R，MATSUI T，et al. Dynamic loading test on RC frame externally retrofitted by CES frame[J]. Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)，2008，73(630)：1265-1272.

[12] 曲哲，张令心. 日本钢筋混凝土结构抗震加固技术现状与发展趋势 [J]. 地震工程与工程振动，2013，33(4)：61-74.

QU Zhe，ZHANG Lingxin. State of the art and development tendency of seismic retrofit for reinforced concrete structures in Japan[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration，2013，33(4)：61-74.

[13] MIYAZU Y，SODA S. Seismic response control of mid- and low-rise buildings using external story deflection control devices[J]. Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)，2015，80(710)：561-570.

[14] WAKITA T，INAI E，KAKIHARA T，et al. Study on the seismic retrofitting method of existing reinforced concrete buildings by external frames. Part 6：tests of the t-shaped beam-column joints of the external frame[C]//Proceedings of Annual Research Meeting Chugoku Chapter. Tokyo：Architectural Institute of Japan，2015.

[15] 曹徐阳，冯德成，王谆，等. 基于 OpenSEES 的装配式混凝土框架节点数值模拟方法研究 [J]. 土木工程学报，2019，52(4)：13-27.
CAO Xuyang，FENG Decheng，WANG Zhun，et al. Investigation on modelling approaches for prefabricated concrete beam-to-column connections using OpenSEES[J]. China Civil Engineering Journal，2019，52(4)：13-27.

[16] CAO X Y，WU G，JU J W. Seismic performance improvement of existing RCFs using external PT-PBSPC frame substructures：experimental verification and numerical investigation[J]. Journal of Building Engineering，2022，46：103649.

[17] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑抗震设计规范：GB 50011—2010[S]. 北京：中国建筑工业出版社，2010.
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Code for seismic design of buildings：GB 50011—2010[S]. Beijing： China Architecture & Building Press，2010.

[18] CAO X Y，FENG D C，WU G，et al. Experimental and theoretical investigations of the existing reinforced concrete frames retrofitted with the novel external SC-PBSPC BRBF sub-structures[J]. Engineering Structures， 2022， 256：113982.

[19] CAO X Y，WU G，FENG D C，et al. Research on the seismic retrofitting performance of RC frames using SC-PBSPC BRBF substructures[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics，2020，49(8)：794-816.

通信作者：曹徐阳（1993—），男，博士，副教授。
E-mail：caoxy@hhu.edu.cn

考虑冲刷的海上风电单桩-海床-结构地震响应分析

王天鹏[1]，王志平[2]，刘振标[2]，张建民[1]，王 睿[1]

（1. 清华大学水圈科学与水利工程全国重点实验室，北京 100084；2. 中铁第四勘察设计院集团有限公司，湖北 武汉 430063）

摘要：单桩支承海上风机安装于地震活跃区域时，可能面临地震和冲刷带来的潜在风险。本文建立了考虑不同冲刷条件且安装于可液化海床的单桩支承海上风机数值模型，采用 CycLiq 本构模型描述可液化土体的动力特性，基于离心模型振动台试验证明了数值模型的有效性。开展了一系列考虑不同冲刷条件和输入地震动的海上风电单桩-海床-结构地震响应分析，揭示了冲刷对单桩支承海上风机整体结构动力响应与残余变形的影响机理。分析表明冲刷主要通过两个因素影响地震响应：一是改变结构一阶自振频率与地震动卓越频率的相对差异，影响结构共振效应，从而影响结构动力响应与残余变形；二是削弱桩-土相互作用，从而降低结构动力响应，加剧残余变形。受长周期地震动作用时，冲刷深度增大可能导致结构共振效应加剧，引发显著的结构动力响应和残余变形；受高频地震动作用时，冲刷深度增大可能导致结构共振效应衰减，进而削弱结构动力响应，但结构残余变形受上述两个因素联合影响而非单调变化。

关键词：地震响应；海上风机；单桩基础；数值模型；冲刷

中图分类号：TU43 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508097

Seismic responses of monopile-supported offshore wind turbines considering post-scour conditions

WANG Tianpeng[1], WANG Zhiping[2], LIU Zhenbiao[2], ZHANG Jianmin[1], WANG Rui[1]

（1.State Key Laboratory of Hydroscience and Engineering，Tsinghua University，Beijing 100084，China；
2.China Railway Siyuan Survey and Design Group Co.，Ltd.，Wuhan 430063，China）

Abstract: The monopile-supported offshore wind turbines (OWTs) installed in seismically active regions pose potential risks from seismic ground motions and post-scour conditions. In this study，numerical models with varying post-scour conditions are developed to simulate the monopile-supported OWT installed in liquefiable seabed，in which the CycLiq constitutive model is used to capture the dynamic behaviors of seabed soils. The numerical modeling approach is successfully validated using centrifuge shaking table tests. Seismic response analyses of structures subjected to seismic loading are conducted. Specifically，the influence mechanisms of post-scour conditions on seismic responses are uncovered. The analysis indicates that scour affects seismic responses primarily through two factors：i) altering the relative difference between the first-order natural frequency of structures and the predominant frequency of ground motions to change the resonance effect，thereby affecting both dynamic responses and residual deformations；ii) weakening the soil-pile interaction，which reduces dynamic responses but aggravates residual deformations. For long-period ground motions，increased scour depth may enhance the resonance effect，leading to greater seismic responses. In contrast，for high-frequency ground motions，increased scour depth may reduce dynamic responses，while the trend of residual deformation is non-monotonical due to the influences of the two mentioned-above factors.

Keywords: seismic response; offshore wind turbine; monopile; numerical model; scour

近年来，全球海上风电行业快速发展，截至 2024 年底，海上风电累计装机容量已达 83.2 GW[1]。在海上风电开发需求的驱动下，单桩支承海上风机被广泛安装于存在潜在地震活动的沿海地区，例如中国东南部、印度南部、欧洲南部以及美国西部等沿海地区[2-3]。海上风电单桩基础、海床与塔架及风机等上部结构形成了一体化的海上风电单桩-海床-结构整体系统。地震动可能从基岩传递至这一结构系统，产生潜在的地震风险，因此亟需开展针对海上风电单桩-海床-结构的地震响应研究[4-5]。

冲刷会侵蚀单桩基础周围的土体，形成局部冲坑[6]，从而显著削弱单桩基础的水平承载力[7]。冲刷

收稿日期：2025-08-17；**修订日期：**2025-09-19

基金项目：国家杰出青年科学基金项目（52425904）；国家自然科学基金面上项目（52378349）

是海上风电单桩基础设计中的关键问题[8]，在过去数十年间受到学者们的广泛研究，涉及冲刷机理[9]、冲刷深度评估方法[10]、防护措施[11-12]和冲刷后桩基承载力计算[13-14]等。尽管现行设计规范[8,15]强调了海上风机抗震设计的重要性，但其地震响应分析通常是在无冲刷的理想化条件下开展的，而冲刷在实际工程中难以避免。近年来，考虑冲刷的海上风电单桩-海床-结构地震响应逐渐引起关注[7,16-19]。

基于离心模型振动台试验，ZHU 等[7]发现，冲坑可能会降低海上风电嵌岩桩的一阶自振频率和抗弯刚度。此外，YUAN 等[18]通过一系列离心模型振动台试验，探索了干砂条件下局部冲刷与整体冲刷对单桩支承海上风机承载力的影响，结果表明整体冲刷对单桩基础水平抗力削弱更为显著。由于试验成本较高且操作复杂，现有研究通常仅考虑了少量冲刷条件。在数值模拟研究方面，JIANG 等[16-17]基于非线性的 Winkler 地基梁模型模拟桩-土相互作用，开展了不同冲坑形状下单桩基础与上部结构的地震响应分析，结果表明冲坑的几何形状会显著影响桩基的水平承载力、位移以及弯矩包络分布。文献[2]和[19]分别采用 Winkler 地基梁模型与集中质量参数模型分析了地震与环境荷载共同作用下整体结构的地震响应，研究表明环境荷载和冲刷共同作用会放大上部结构的地震响应。

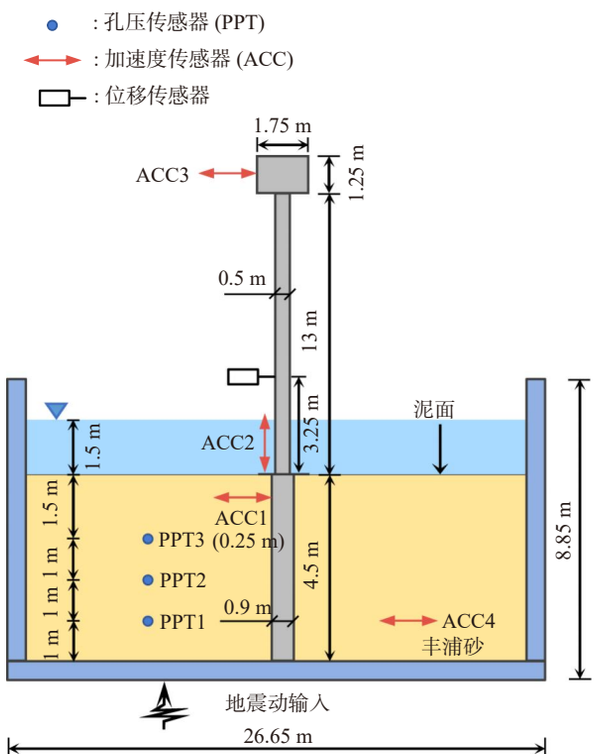
这些离心模型试验与数值模拟研究大多定性地探究了整体结构地震响应随冲刷条件改变的变化情况，为分析冲刷对海上风电单桩-海床-结构地震响应的影响提供了宝贵经验，但冲刷对整体结构地震响应影响机理的深入剖析仍少见报道。

为突破现有研究的局限，本文建立了海上风电单桩-海床-结构数值模型，分析在不同冲刷条件下整体结构的地震响应特征，揭示冲刷对地震响应的影响机理。本文第 1 节介绍了数值模型的建模方法及模型验证结果，其中海床土体的动力特征由 CycLiq 本构模型描述；第 2 节详细展示了不同冲刷条件下海上风电单桩-海床-结构的数值模型及模拟工况；第 3 节给出了整体结构的位移、弯矩等结构动力响应及残余变形结果，并分析了冲刷对结构地震响应的影响机理；第 4 节总结了本文的主要结论。

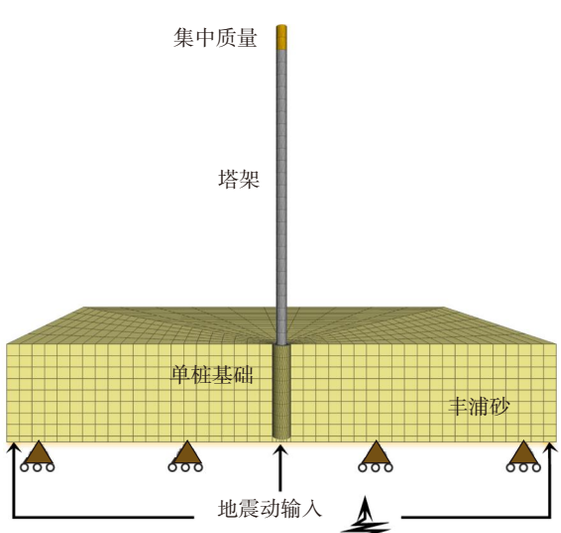
1 基于离心模型试验的数值模型验证

1.1 数值模型建模方法

基于 50*g* 离心模型振动台试验，YU 等[4]开展了安装在丰浦砂海床中的单桩支承海上风机地震响应研究。如图 1(a) 所示，以模型的原型尺寸为基准，试验中单桩基础与塔架均由实心铝制圆柱制作而成，质量分别为 7.25 t 和 6.25 t，风机由实心铝制方块模拟，质量为 10.6 t，铝材杨氏模量为 68.9 GPa。刚性模型箱尺寸为 26.65 m×12.05 m×8.85 m（长×宽×高），单桩基础放置于模型箱底部且未固定。丰浦砂土层厚度为 4.5 m，采用无气水充分饱和，平均水位为 1.5 m。模型箱内布置了孔压传感器（PPT）、加速度计（ACC）及位移传感器。各结构部件具体尺寸及传感器布置位置详见图 1(a)。地震动输入采用 VELACS



(a) 离心模型振动台试验示意图
(a) Schematic of centrifuge shaking table test



(b) 离心模型振动台试验的数值模型
(b) Numerical modeling of centrifuge shaking table test

图 1 饱和砂土中单桩支承海上风机离心模型试验与数值模拟

Fig. 1 Centrifuge test and numerical simulation of monopile-supported OWT in saturated sand

项目中的实测地震记录[4], 通过振动台施加于刚性模型箱底部。表 1 给出了试验所采用的丰浦砂物性参数。

表 1　丰浦砂物性参数

Tab. 1　Soil properties of Toyoura sand

参数	描述	数值
e_{max}	最大孔隙比	0.98
e_{min}	最小孔隙比	0.60
G_s	比重	2.65
D_{50}	平均粒径	0.17 mm
D_r	相对密度	68%
e	孔隙比	0.72
ρ_{sat}	饱和密度	1.96 g/cm^3
k_p	渗透系数	1.5×10^{-2} cm/s

本文基于该离心模型试验建立数值模型, 对比数值模拟与试验结果, 验证数值模型的有效性。如图 1(b) 所示, 采用 FLAC3D 平台[20] 构建了离心模型试验的数值模型, 数值模型各尺寸与试验模型原型保持一致。由于实际工程中单桩和塔架均为空心圆柱, 本数值模型利用空心圆柱等效试验采用的实心单桩和塔架。为更准确地计算结构动力响应, 采用 FLAC3D[20] 提供的结构单元模拟各结构部件, 其中, 风机与塔架均采用壳单元建模, 单桩则采用衬砌单元建模, 壳单元与衬砌单元均为空心圆柱。各结构单元杨氏模量取 210 GPa、泊松比取 0.3, 基于抗弯刚度等效原则, 数值模型将试验中采用的实心圆柱等效为空心圆柱。根据质量相等原则, 原本风机由集中质量的实心方块模拟, 现等效为空心圆柱。风机、塔架和单桩基础的密度根据其实际质量和体积之比来计算, 各结构部件采用线弹性模型反映其力学特性。

海床土体采用考虑流固耦合的实体单元构建。考虑到试验中采用无气水饱和砂土, 在离心模型试验中砂土渗透系数需随离心加速度倍率放大, 因此在数值模型验证中将渗透系数放大 50 倍。为模拟刚性模型箱对土体的约束条件, 将地震动时程输入模型底部边界和侧向边界的节点, 使各边界上的节点保持相同运动。根据已有研究[21-22], 模型边界长度通常取为单桩直径的 10 倍以上, 以消除边界效应。本文所建数值模型的边界长度为 26.65 m, 而桩径为 0.9 m, 可认为边界效应影响较小。底部边界约束竖向位移, 允许沿地震方向的水平位移。海床表面设置自由排水条件, 而 4 个侧向边界及底部边界设置为不排水条件。

桩-土相互作用对单桩支承海上风机整体结构地震响应具有重要影响, 该作用受海床与单桩基础之间接触面的相对滑移、嵌入及张开等力学行为控制。采用衬砌单元的单桩基础可定义接触面模型, 用来模拟桩-土相互作用。接触面切向行为采用 FLAC3D 建议的库仑摩擦模型[20] 模拟, 接触面法向能够抵抗侵入但允许脱开。接触面模型的刚度参数, 即法向和切向弹簧刚度, 均取相邻单元最大刚度的 10 倍。在接触面强度参数方面, 参考文献 [21], 黏聚力设为 0, 摩擦角取丰浦砂内摩擦角的 2/3。

1.2　土体本构模型

离心模型振动台试验中的海上风机安装于可液化的丰浦砂海床中, 可液化砂土存在超静孔压的累积与消散、滞回特性、剪胀与收缩、组构演化以及液化后大变形等复杂机理[23-26]。为此, 在数值模型的实体单元中采用了一种适用于模拟液化后大变形的砂土动力弹塑性本构模型, 即 CycLiq 模型[27], 以反映丰浦砂的复杂动力特性。由于采用的 CycLiq 模型本身包含滞回阻尼, 根据 ITASCA[20] 的建议, 在海床土体中仅引入 0.5% 阻尼比的 Rayleigh 阻尼。

CycLiq 本构模型已成功在 FLAC3D 平台实现, 并被广泛应用于涉及土动力学的各类岩土工程问题中[28-31]。该模型包含 14 个无量纲的模型参数, 这些参数的详细标定过程可参见文献 [27-28]。如图 2 所示, ZHANG[32] 开展了相对密度为 60% 的丰浦砂不排水循环扭剪试验, 剪应力幅值为 25 kPa, 得到了丰浦砂典型剪应力-剪应变关系与应力路径。本文参考 WANG 等[27] 的 CycLiq 本构模型参数标定成果, 采用丰浦砂标准模型参数, 参数取值如表 2 所示。基于 CycLiq 模型模拟了该丰浦砂不排水循环扭剪结果, 对比表明, CycLiq 模型能够合理再现丰浦砂的不排水循环动力特性, 尤其涉及砂土液化现象模拟。

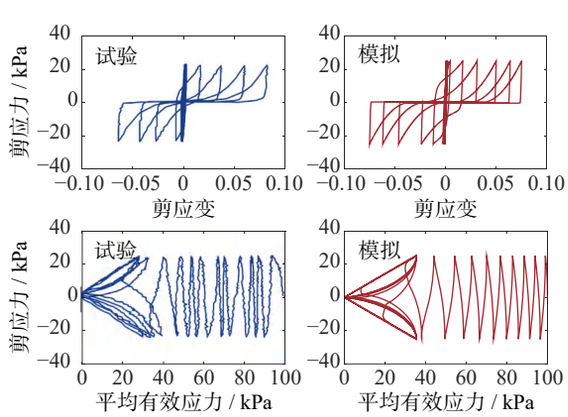


图 2　丰浦砂不排水循环扭剪试验与模拟对比

Fig. 2　Test and simulation results for an undrained cyclic torsional test of Toyoura sand

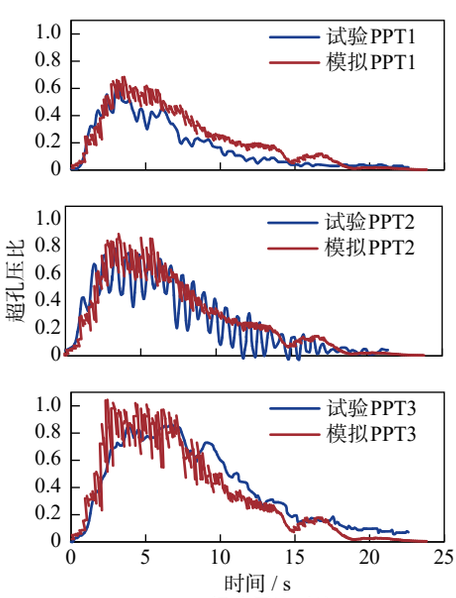
表 2 本文采用的 CycLiq 模型参数和取值

Tab. 2 Model parameters and values of CycLiq model employed in this study

参数	描述	数值(无量纲)
G_0	弹性模量相关参数	200
κ		0.008
h	塑性模量相关参数	1.8
$d_{re,1}$	可逆剪胀	0.35
$d_{re,2}$		30
d_{ir}	不可逆剪胀	0.75
α		20
$\gamma_{d,r}$		0.05
n^p	状态参数	1.1
n^d		7.8
M	临界状态	1.35
λ_c		0.019
e_0		0.934
ξ		0.7

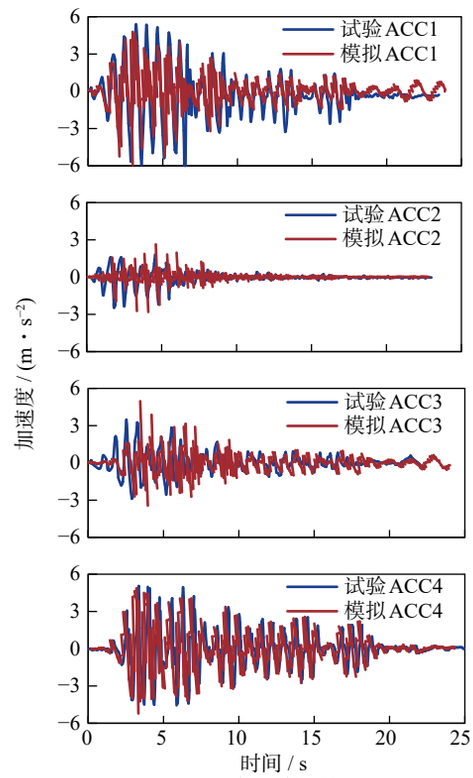
1.3 模拟与试验对比验证

如图 3 所示，对比了几个典型监测点位的离心模型振动台试验结果与数值模拟结果，包括超孔压比、加速度及塔架侧向位移。超孔压比定义为超静孔压与土体初始竖向有效应力的比值。对比表明，数值模拟结果与试验结果呈现高度一致性，尤其在模拟超静孔压的累积与消散、加速度幅值以及塔架残余位移方面效果良好。如图 3(b) 所示，数值模拟能够准确捕捉 ACC2 和 ACC3 在 5 s 后发生显著衰减的现象，根据超孔压比曲线判断此时场地已发生明显液化，说明场地液化削弱了地震动向结构的传播能力，该现象同样在文献 [3,7] 被观察到。这些对比结果验证了本文所建立数值模型的有效性。



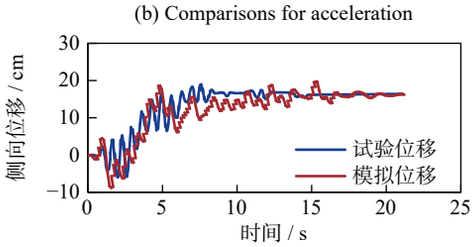
(a) 超孔压比对比

(a) Comparisons for excess pore pressure ratio



(b) 加速度对比

(b) Comparisons for acceleration



(c) 塔架侧向位移对比

(c) Comparisons for lateral displacement of tower

图 3 离心模型振动台试验与数值模拟结果对比

Fig. 3 Comparisons between the centrifuge shaking table test and the numerical simulation

2 考虑冲刷的海上风电单桩-海床-结构数值模型

2.1 数值模型的建立

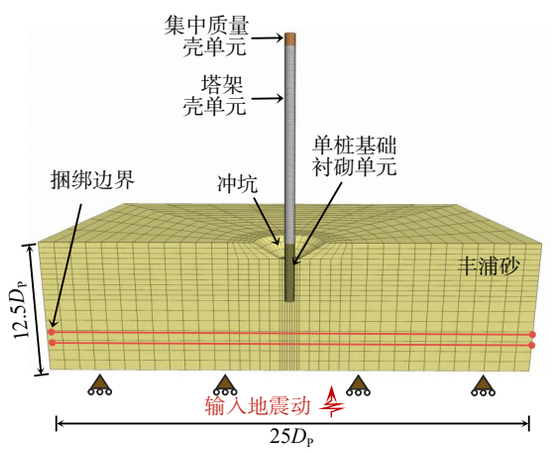
基于前述建模方法，考虑不同冲刷条件，本文建立了一系列安装于丰浦砂海床的单桩支承海上风机数值模型。该单桩用于支承 NREL 5MW 风机[33]，数值模型中风机 (rotor-nacelle assembly, RNA)、塔架及单桩基础的基本参数如表 3 所示，丰浦砂的物性参数如表 1 所示。考虑到冲坑的直径较大，模型边界在水平方向取单桩直径的 50 倍，在竖向取桩长的 2.27 倍，因此土体模型尺寸为 300 m×300 m×75 m (长×宽×高)。平均水位取为 24 m。

针对这一对称边值问题，采用捆绑边界条件来模拟沿地震方向无限延伸的地层。如图 4(a) 所示，将侧向边界上同一层的结点进行捆绑，保证同一层

表 3　风机、塔架和单桩基本参数

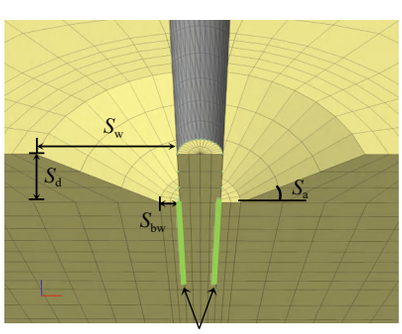
Tab. 3　Basic properties of RNA, tower and monopile

参数	描述	数值
$V_{w,in}$	切入风速	3 m/s
$V_{w,r}$	额定风速	11.4 m/s
$V_{w,out}$	切出风速	25 m/s
Ω	转子转速范围	6.9~12.1 r/min
f_{AP}	容许频率	0.22~0.31 Hz
m_{RNA}	风机总质量	350 t
D_r	转子直径	126 m
z_{hub}	轮毂高程	84 m
D_{RNA}	风机模型直径	6.0 m
t_{RNA}	风机模型壁厚	60 mm
D_t	塔架直径	6.0 m
t_T	塔架壁厚	70 mm
L_P	桩长	33 m
D_P	桩径	6.0 m
t_P	桩壁厚	70 mm
ρ_s	钢材密度	7850 kg/m^3
E	杨氏模量	210 GPa
v	泊松比	0.3
R_d	结构阻尼比	1%



(a) 考虑冲刷的海上风电单桩-海床-结构数值模型

(a) Numerical modeling of monopile-seabed-structure of OWT considering post-scour conditions



桩土接触面

(b) 冲坑及桩土接触面细部图

(b) Detailed drawing of scour hole and soil-pile interface

图 4　基于 FLAC3D 建立的海上风电单桩-海床-结构数值模型

Fig. 4　Numerical modeling of monopile-seabed-structure of OWT developed in FLAC3D

的捆绑节点沿地震方向运动一致, 允许不同层的捆绑节点存在相对运动。捆绑边界条件能够较好地消除边界效应对场地地震响应的影响[34]。

为研究冲刷条件对海上风电单桩-海床-结构地震响应的影响, 如图 4(b) 所示, 冲坑简化为截锥体, 其几何形状由 4 个参数控制: 冲刷深度(S_d)、冲坑坡角(S_a)、冲坑顶宽(S_{tw})以及冲坑底宽(S_{bw})。其中, S_d 和 S_{tw} 取不同值以构建不同的冲刷条件, 其余参数保持不变。根据试验观测[35] 及 JIANG 等[16] 的建议, S_a 取 30°, S_{bw} 取 0.5D_P。因此, 在已知 S_d 时, S_{tw} 可唯一确定。根据海上风电结构设计规范[8,15], 单桩基础最大冲刷深度通常在 1.3D_P~2.5D_P 范围内。为覆盖冲刷深度的实际变化范围, 本文设计了 4 种冲刷深度(S_d = 0, 0.5D_P, 1.5D_P, 2.5D_P), 用于模拟不同的冲刷条件。需要说明的是, 后文以冲刷深度定量描述冲刷条件, 当给定冲刷深度时, 其余冲坑形状参数相应确定。

2.2　地震动挑选

本文挑选了 5 条地震动用于后续的地震响应计算, 包括 2 条人工合成的正弦型地震动和 3 条实测地震动记录。如图 5(a) 和 (b) 所示, 2 条正弦型地震动的峰值加速度(PGA)均为 0.2g, 频率分别为 0.5 和 1.5 Hz。如图 5(c)~(e) 所示, 3 条实测地震动记录分别源自太平洋地震工程研究中心(PEER)数据库中的 1989 年 Loma Prieta 地震与 1994 年 Northridge 地震, 以及 1985 年墨西哥城地震[36], 其中 Loma Prieta 和 Northridge 地震在 PEER 数据库中的记录序号分别为 740 和 1086。3 条实测地震动的卓越频率 f_p 分别为 0.55、2.24 和 0.25 Hz。5 条输入地震动(记为 G1、G2、G3、G4、G5)均经过基线校正以消除场地残余变形。

该单桩支承海上风机安装于抗震设防烈度 8 度地区。根据《中国地震动参数区划图》(GB 18306—2015)[37], 在 8 度设防烈度区, 0.08g、0.2g 和 0.4g 分别对应多遇、基本和罕遇地震的地震动峰值加速度水平, 其 50 年超越概率分别为 63%、10% 和 2%~3%。本文所选的 5 条输入地震动中, G1 与 G2 的 PGA 取 0.2g, 代表基本地震动; G3 与 G4 的 PGA 取 0.4g, 代表罕遇地震动; G5 的 PGA 取 0.08g, 代表多遇地震动。这样的选取方式能够覆盖该地区规范要求的主要地震动水平, 有助于系统评估单桩支承海上风机在不同烈度地震动作用下的地震响应特性。

如图 5(f) 所示, 给出了 5 条地震动的加速度反应谱。与 G3~G5 相比, G1 和 G2 的加速度反应谱峰值较高, 且频率同样较高。根据震中距、谱特征及地震动持续时间等, 地震动可分为长周期地震动和高频地震动[38]。根据分类原则, G3、G4 为高频地震动, G5 为长周期地震动。上述地震动涵盖了较宽的卓

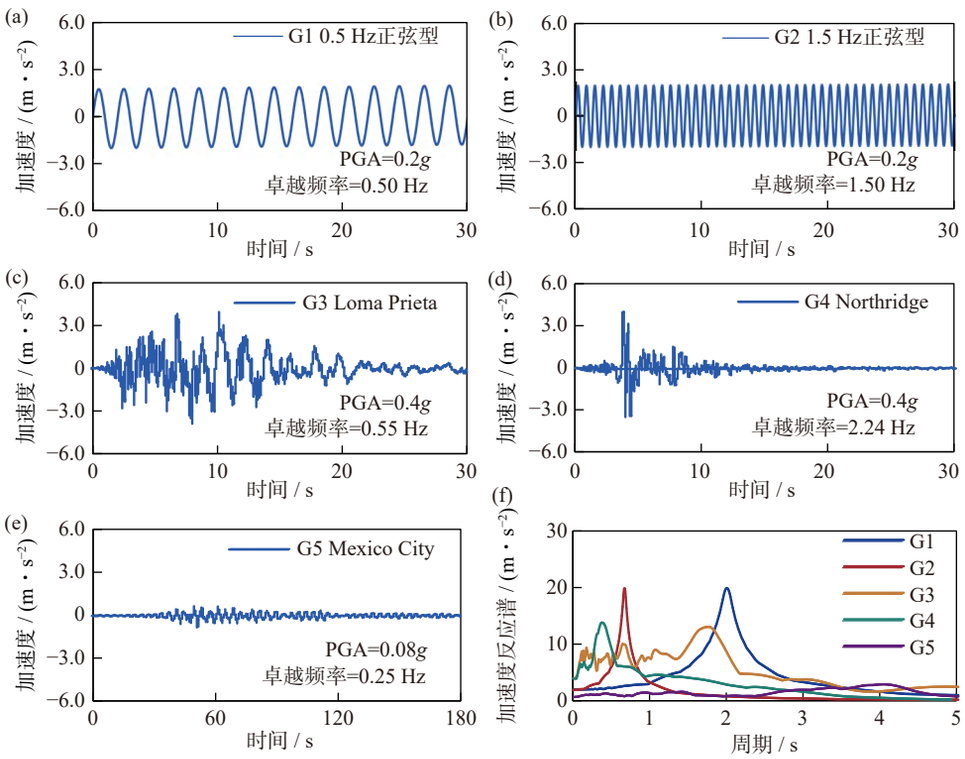


图 5 挑选的地震动

Fig. 5 Selected seismic ground motions

越频率范围，有助于全面分析冲刷对不同地震动作用下地震响应的影响。

2.3 数值模拟工况

本文共设计了 22 组数值模拟工况，以系统评估不同冲刷条件下海上风电单桩-海床-结构体系的地震响应特性。如表 4 所示，工况 1~20 对应 4 种冲刷深度（S_d = 0, 0.5D_P, 1.5D_P, 2.5D_P），分别施加 5 条地震动（G1~G5）。工况 21 和 22 则在相同地震动 G2 作用下，仅改变轮毂高程和桩长，分别用于分析结构自振频率与桩-土相互作用的影响。

表 4 数值模拟工况

Tab. 4 Numerical simulation cases

工况序号	输入地震动	冲刷深度	轮毂高程/m	桩长/m
1~4	G1	0、0.5D_P、1.5D_P、2.5D_P	84	33
5~8	G2			
9~12	G3			
13~16	G4			
17~20	G5			
21	G2	0	93	33
22	G2	0	84	24

需要说明的是，本文未考虑风机气动载荷和波浪载荷作用，该简化旨在聚焦分析海上风电单桩-海床-结构的地震响应特性。然而，为了更全面地反映海上风机在实际服役环境下的受力特征，未来研究可进一步引入风-浪-震耦合作用进行分析。

3 冲刷对单桩支承海上风机地震响应的影响机理

3.1 不同冲刷条件下海上风电单桩-海床-结构地震响应

本节分析了不同冲刷条件下海上风电单桩-海床-结构地震响应，包含结构动力响应（结构侧向位移、转角和弯矩）与结构残余变形（结构残余位移和转角）。如图 6 所示，展示了不同冲刷深度（S_d = 0, 0.5D_P, 1.5D_P, 2.5D_P），G1~G5 作用下的结构侧向位移、转角及弯矩包络。纵坐标取向下为正，z = 0 对应冲刷前海床表面高程。结果表明，冲刷深度对整体结构地震响应有显著影响。在 G1~G4 作用下，结构最大位移、转角和弯矩随冲刷深度的增加而单调减小；在 G5 作用下，则呈现相反趋势，所有结构动力响应峰值随冲刷深度增加而单调增大。G5 属于远场长周期地震动，卓越频率仅为 0.25 Hz，而其余地震动卓越频率相对较高。这说明结构的动力响应受冲刷条件与地震动特性的共同影响。

在地震动输入结束后，模型在无荷载作用下继续计算 20 s，以获得结构侧向位移沿高程的分布。如图 7 所示，展示了 G1~G5 作用下，考虑不同冲刷深度的结构侧向残余位移分布。同时，图中还给出了残余位移曲线的斜率，分别记为 θ_1、θ_2、θ_3 和 θ_4，代表在不同冲刷深度下的整体结构残余转角。结果表明，在 G1~G4 作用下，结构的最大残余位移和残余转角

均随冲刷深度的增加呈现先增大后减小的变化趋势; 在 G5 作用下, 最大残余位移和残余转角则均随冲刷深度的增加而单调增大。由此可见, 结构侧向残余变形同样受到冲刷条件与输入地震动特性的共同影响。

3.2　冲刷对整体结构动力响应的影响

为探究冲刷对单桩支承海上风机整体结构动力响应的影响机理, 本节分析了结构在不同冲刷深度下 1 阶自振频率的变化情况, 进而探讨不同自振频

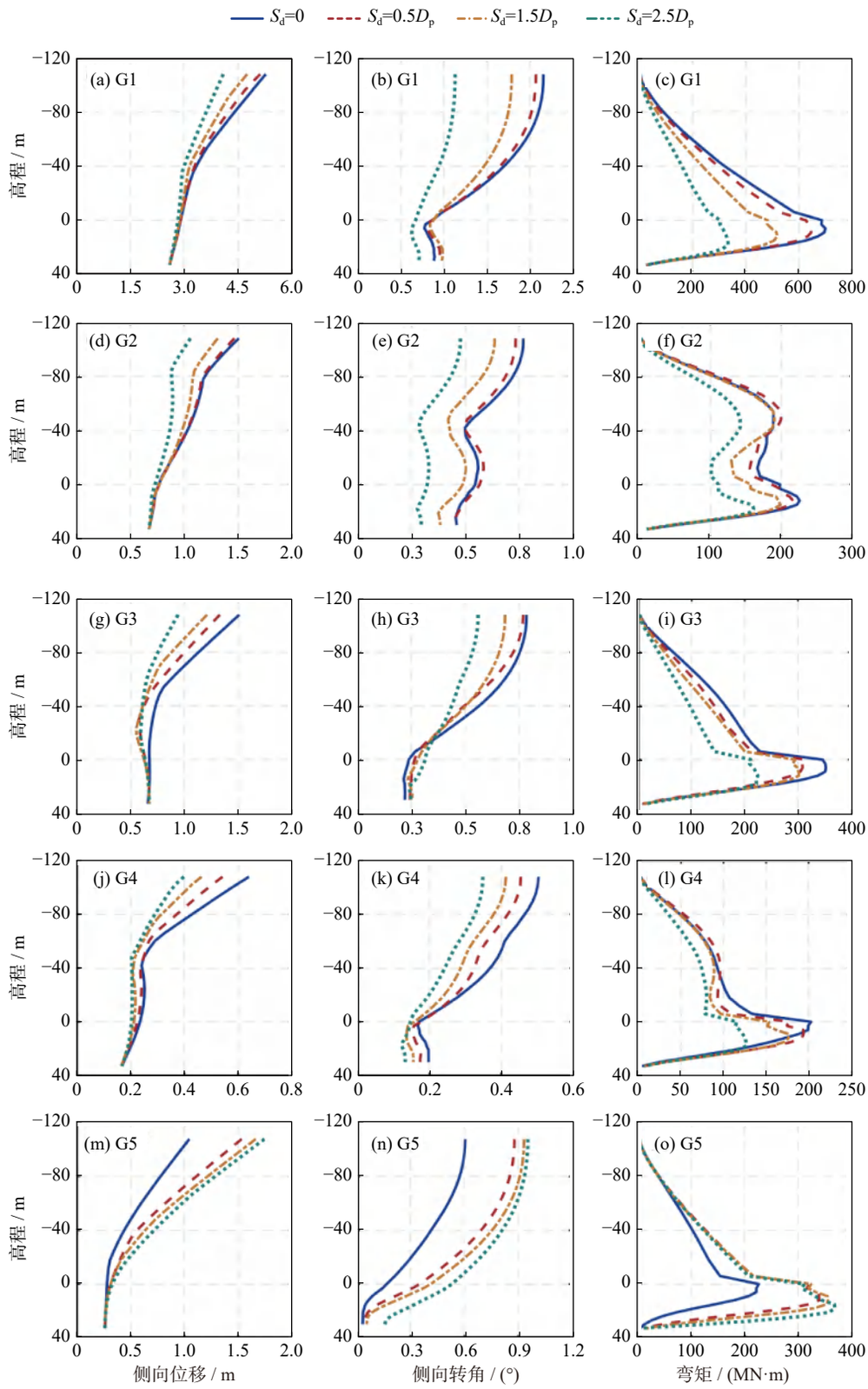


图 6　受 G1~G5 作用的单桩支承海上风机在不同冲刷深度下的侧向位移、转角、弯矩包络

Fig. 6　Lateral displacement, rotation and bending moment envelopes of monopile-supported OWTs subjected to G1~G5 under different scour depths

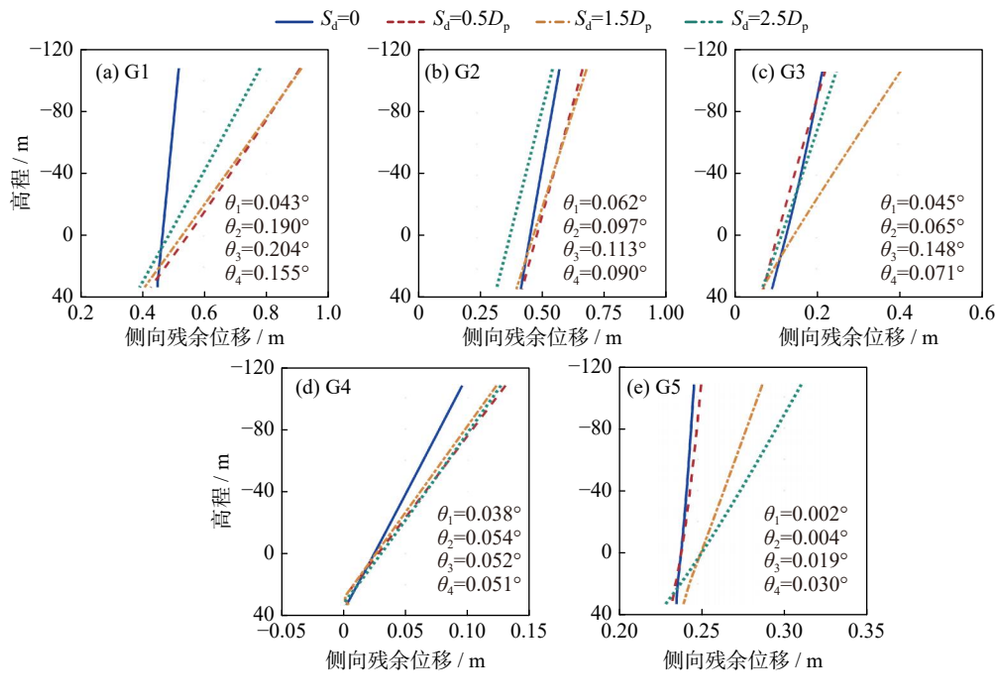


图 7 受 G1~G5 作用的单桩支承海上风机在不同冲刷深度下的残余变形

Fig. 7 Residual deformations of monopile-supported OWTs subjected to G1~G5 under different scour depths

率条件下结构动力响应特征和冲刷影响。

基于数值模拟，在考虑冲刷条件及海床液化程度的情况下，可估计整体结构的震后 1 阶自振频率。具体来讲，将 G1~G5 地震动作用于数值模型 30 s 后，继续进行 20 s 的结构自由振动。该单桩支承海上风机安装在可液化海床中，振动过程中采用 CycLiq 模型描述土体液化现象。参考文献 [39]，在自由振动阶段，将风机轮毂处加速度时程通过傅里叶变换转换至频域，进而提取结构的自振频率，此时可得到液化后的结构 1 阶自振频率。

在不同冲刷深度条件下，整体结构的 1 阶自振频率变化情况如图 8(a) 所示。随着冲刷深度的增加，结构的 1 阶自振频率呈单调下降趋势。这主要是由于冲刷导致上部结构长度增加，结构刚度下降，从而降低了结构自振频率[17]。

值得注意的是，在不同冲刷深度下，尽管 G2 与 G1 的 PGA 相同，G2 作用下的结构 1 阶自振频率均低于 G1。为探究其原因，如图 8(b) 所示，给出了 G1~G5 震后远场海床沿深度的超静孔压分布，其中灰色虚线表示超孔压比 $r_u = 1$。可以发现，当作用卓越频率为 1.5 Hz、PGA 为 0.2g 的 G2 时，超静孔压分布曲线与 $r_u = 1.0$ 线非常接近，这表明 G2 会导致海床表层土体发生严重液化。相比之下，作用相同 PGA 但卓越频率为 0.5 Hz 的 G1 时，超静孔压分布曲线与 $r_u = 1$ 线距离较远，表明 G1 导致的海床土体液化程度明显低于 G2。

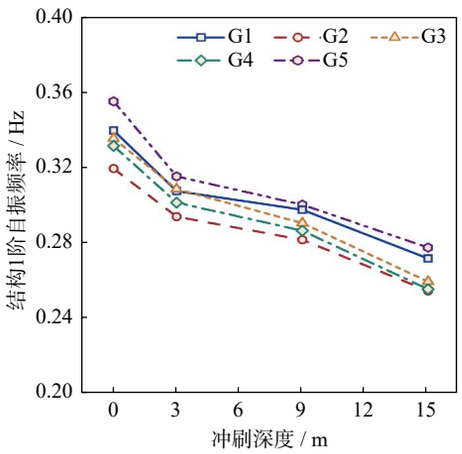
PGA 仅为 0.08g 时，G5 产生了最低的超静孔压，土体液化程度最低，其作用下的结构 1 阶自振频率估计值最大。另外，也可观察到 G3 和 G4 作用下的土体液化程度与结构 1 阶自振频率之间的相关性。

上述分析说明，G1~G5 引发的海床土体液化程度与其作用下的结构 1 阶自振频率估计值呈负相关，即更大程度的砂土液化会降低整体结构的自振频率。因此，安装在可液化海床中的海上风机整体结构的 1 阶自振频率不仅受冲刷深度影响，还受到海床土体液化程度影响。

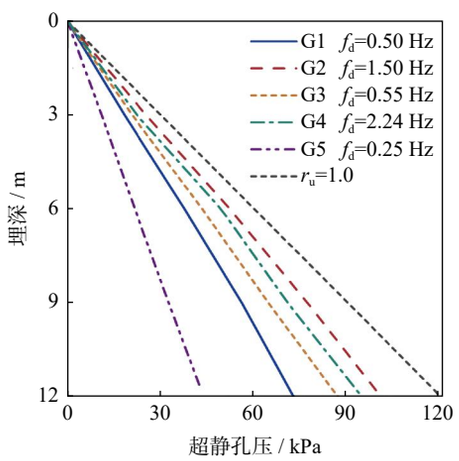
为探究冲刷对整体结构动力响应的影响机理，分析了结构 1 阶自振频率与输入地震动卓越频率的相对差异，从结构动力放大系数的角度定量讨论其影响。图 9 展示了 G1~G5 作用下塔顶动力放大系数随冲刷深度改变的变化规律。塔顶动力放大系数被定义为塔顶峰值加速度与基岩峰值加速度之比。随冲刷深度增大，G1 作用下的结构 1 阶自振频率远离 G1 的卓越频率（f_d = 0.5 Hz），可观察到 G1作用下的塔顶动力放大系数随冲刷深度增大而单调减小，从 2.59 下降至 1.32，降幅约 50%。

随冲刷深度增大，G2、G3 和 G4 作用下的结构 1 阶自振频率同样远离各自的地震动卓越频率，其动力放大系数均呈现了单调减小的变化规律，这表明两个频率的相对差异增大确实在一定程度上削弱了结构动力响应。

G5 作用时，由于其卓越频率（f_d = 0.25 Hz）低于结构的 1 阶自振频率，随着冲刷深度增大，两频率的相对差异减小，观察到其动力放大系数随冲刷深度增大而明显增大。这主要是因为当地震动频率接近结构自振频率时，结构最大位移、转角和弯矩等急剧放大。



(a) 冲坑深度对结构1阶自振频率的影响
(a) Influences of scour depth on first-order natural frequency of structure



(b) G1~G5作用下远场海床超静孔压分布
(b) Excess pore pressure distributions of far field seabed subjected to G1~G5

图 8　冲刷和海床土体液化对结构 1 阶自振频率的影响

Fig. 8　Influences of scour and soil liquefaction on first-order natural frequency of structure

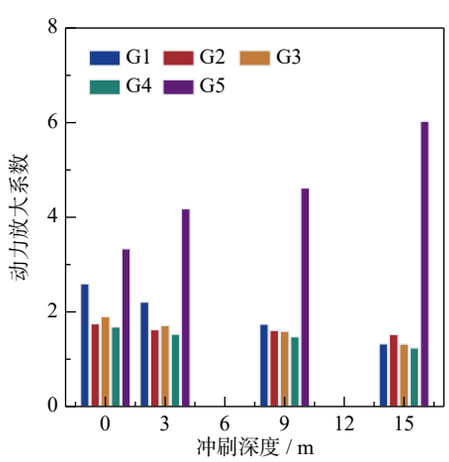


图 9　塔顶动力放大系数与冲刷深度的关系

Fig. 9　Relationship between dynamic amplitude factor at tower top and scour depth

如图 6 所示, 在 G1~G4 作用下, 随着冲刷深度增加, 结构的最大水平位移、转角及弯矩均呈单调减小趋势, 这可由结构 1 阶自振频率与地震动卓越频率之间相对差异增大来解释。相反的, 在 G5 作用下, 结构动力响应峰值随冲刷深度增加呈单调增大趋势, 这是因为两个频率的相对差异减小, 引发了共振效应。由此可见, 长周期地震动可能因共振效应显著放大结构动力响应峰值, 因此在海上风电结构设计中, 工程师需重视长周期地震动带来的潜在风险。

3.3　冲刷对整体结构残余变形的影响

如图 7 所示, 在 G1~G4 作用下, 结构的残余变形随冲刷深度的增加呈先增大后减小的变化规律。可以发现, G1~G4 作用下的最大位移与残余位移随冲刷深度呈现不同变化趋势, 结构 1 阶自振频率与地震动卓越频率的相对差异显然无法完全解释冲刷对结构残余变形的影响机理。冲刷对结构地震响应的影响不仅涉及结构自振频率的变化, 还与桩-土相互作用密切相关[18]。因此, 本节探究了冲刷引起的桩-土相互作用削弱对整体结构残余变形的影响。

冲刷导致上部结构长度增大且单桩埋深减小, 其中前者主要影响结构的自振频率, 后者主要影响桩-土相互作用。为了单独分析冲刷对桩-土相互作用的影响, 构建一个其他尺寸保持不变, 仅缩短桩长(L_p)的数值模型, 用来探究结构残余变形在不同桩-土相互作用下的变化。构建仅增加轮毂高度(z_{hub})的数值模型, 用来分析结构自振频率对其残余变形的影响。这两个数值模型的其余条件与原数值模型保持一致。本文选取无冲刷条件下, 受 G2 地震动作用的数值模型, 分别将 L_p 缩短 9 m 和 z_{hub} 增加 9 m, 即对应表 4 中的工况 21 和 22。

如图 10 所示, 展示了 3 种单桩支承海上风机的示意图。算例 B 对应原始数值模型, 即工况 5, 算例 A 代表用于单独分析结构自振频率的数值模型, 即工况 21; 算例 C 代表用于单独分析桩-土相互作用的数值模型, 即工况 22。与算例 B 相比, 算例 A 的结构 1 阶自振频率较低, 而算例 C 的桩-土相互作用较弱。算例 A、B 和 C 的结构 1 阶自振频率分别为 0.284、0.320 和 0.313 Hz。算例 B 与 C 的结构 1 阶自振频率相差较小, 说明两者结构动力响应峰值和残余变形的差异主要源于桩-土相互作用的影响。

如图 11(a) 所示, 对比了 3 个算例结构侧向位移包络曲线。结果表明, 算例 B 的结构最大位移显著大于算例 A。与算例 B 相比, 由于算例 A 的结构 1 阶自振频率更加远离地震动卓越频率, 其结构最大位移有所减小。

与算例 B 相比, 算例 C 的结构最大位移有所减小。两算例的结构 1 阶自振频率接近但桩-土相互作用不同, 说明算例 C 削弱的桩-土相互作用也会降低

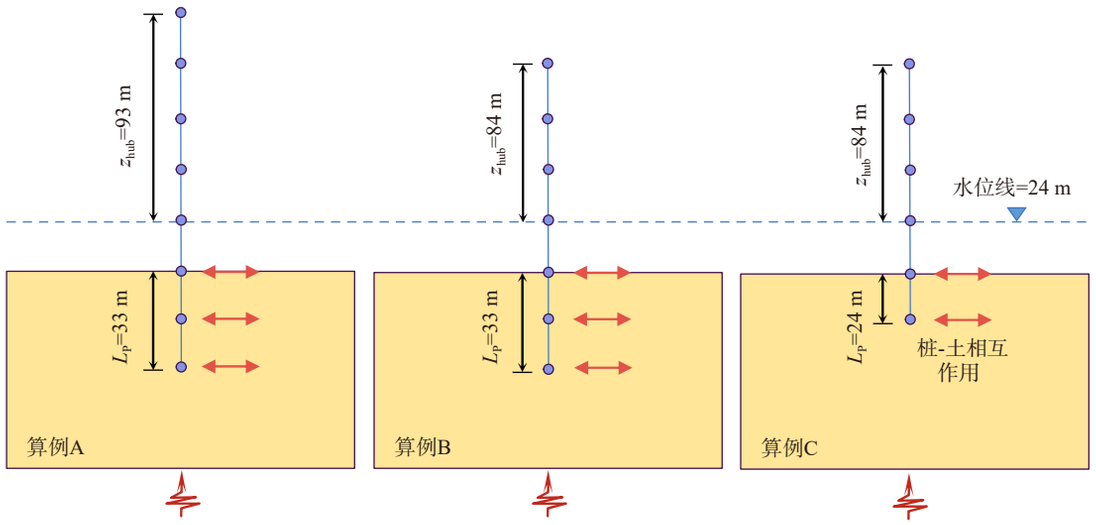
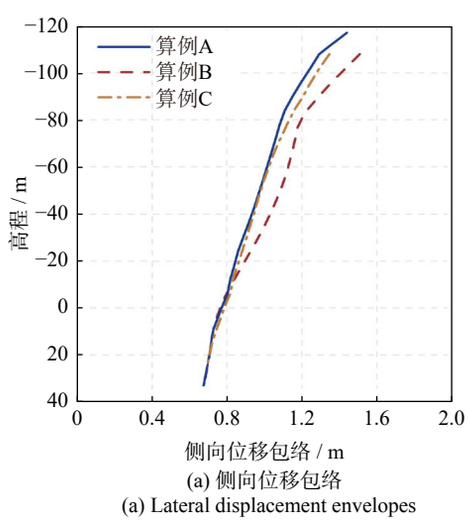


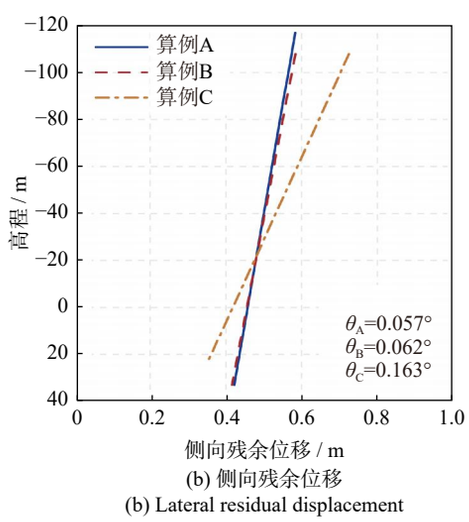
图 10 三种不同结构尺寸的单桩支承海上风机数值模型示意图

Fig. 10 Schematic for three cases of monopile-supported OWTs with different structural dimensions



(a) 侧向位移包络

(a) Lateral displacement envelopes



(b) 侧向残余位移

(b) Lateral residual displacement

图 11 受 G2 作用的算例 A、B、C 地震响应

Fig. 11 Seismic responses of Cases A, B and C subjected to G2

其结构动力响应峰值。从地震能量传递的角度来看，冲刷导致桩-土接触面积减小，地震动传递至单桩基础的能力减弱，因此导致结构动力响应峰值降低。

如图 11(b) 所示，对比了 3 个算例结构侧向残余位移及转角(θ_A、θ_B、θ_C)。可以发现，算例 A 的结构残余转角稍小于算例 B。两者的桩长相同，桩-土相互作用接近，但前者的结构动力响应峰值小于后者。这说明结构动力响应峰值也会影响其残余变形大小，即地震过程中结构动力响应越大，其残余变形趋向于越大。

算例 C 的桩长小于算例 B，其结构残余转角显著大于算例 B。这表明冲刷直接使桩长变短，导致桩-土相互作用削弱，桩周土抗力减小，进而增大了结构的残余变形。

上述分析揭示了结构动力响应和残余变形均受到结构 1 阶自振频率和桩-土相互作用的联合影响。

3.4 自振频率与桩-土相互作用的联合影响机理

前文研究表明冲刷通过影响两个因素，即结构 1 阶自振频率和桩-土相互作用，对单桩支承海上风机整体结构动力响应和残余变形产生影响。此外，冲刷的影响需要结合输入地震动的卓越频率来分析。

当地震动属于高频地震动，卓越频率显著大于结构 1 阶自振频率时，随冲刷深度增大：

(1)结构 1 阶自振频率与地震动卓越频率的相对差异增大，桩-土相互作用削弱，两因素均会减小结构最大变形、转角和弯矩，导致结构动力响应峰值单调减小，如图 6(a)~(l) 所示；

(2)两因素对结构残余变形的作用相反，前者趋向于减小残余变形、后者趋向于增大残余变形，所以残余变形随冲刷深度增大非单调变化，如图 7(a)~(d) 所示。

当地震动属于长周期，卓越频率显著小于结构 1 阶自振频率时，随冲刷深度增大：

(1)结构 1 阶自振频率与地震动卓越频率的相对差异减小，共振效应增强，桩-土相互作用削弱，两因

素对结构动力响应峰值的影响效果相反。本文发现共振效应可能产生主导影响, 导致结构动力响应峰值随冲刷深度增大而单调增大, 如图 6(m)~(o) 所示;

(2)两因素对结构残余变形的影响趋势相同, 所以均导致残余变形随冲刷深度增大而单调增大, 如图 7(e) 所示。

4 结　论

考虑不同冲刷条件, 本文建立了一系列海上风电单桩-海床-结构数值模型, 并通过离心模型振动台试验对数值模型进行了验证。可液化海床土体的动力特性采用 CycLiq 本构模型合理刻画。通过分析不同冲刷条件和输入地震动作用的海上风电单桩-海床-结构地震响应, 系统揭示了冲刷对单桩支承海上风机整体结构地震响应的影响机理。主要结论如下:

(1)随着冲刷深度的增大, 结构的 1 阶自振频率降低, 桩-土相互作用削弱。其中, 自振频率的降低受海床土体液化弱化程度影响, 液化弱化程度较高时结构自振频率进一步降低。

(2)冲刷主要通过两方面因素影响结构地震响应: 结构 1 阶自振频率与输入地震动卓越频率的相对差异和桩-土相互作用变化。

(3)高频地震动作用下, 冲刷导致整体结构远离共振频率范围且桩-土相互作用削弱, 使结构动力响应峰值随冲刷深度的增加呈单调减小趋势, 但残余变形受两因素联合影响而出现非单调变化。

(4)长周期地震动作用下, 冲刷深度增大可能会显著放大结构动力响应和残余变形。因此, 工程师需在抗震设计中重视长周期地震动对海上风电结构的潜在危害。

本文数值模型采用的捆绑边界条件未能完全模拟地震波的辐射阻尼, 进而对结构地震响应产生一定影响。在未来研究中可采用黏弹性边界与捆绑边界进行对比, 以量化不同边界条件对结构地震响应的影响。

参考文献:

[1] Global Wind Energy Council. Global wind report 2025[R]. Brussels, Belgium: GWEC, 2025.

[2] LIANG F Y, YUAN Z C, LIANG X, et al. Seismic response of monopile-supported offshore wind turbines under combined wind, wave and hydrodynamic loads at scoured sites[J]. Computers and Geotechnics, 2022, 144: 104640.

[3] QU X Q, ZHANG Z T, HU J, et al. Centrifuge shaking table tests on offshore wind turbine bucket foundation in mildly inclined liquefiable seabed[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2021, 151: 107012.

[4] YU H, ZENG X W, LI B, et al. Centrifuge modeling of offshore wind foundations under earthquake loading[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2015, 77: 402-415.

[5] DE RISI R, BHATTACHARYA S, GODA K. Seismic performance assessment of monopile-supported offshore wind turbines using unscaled natural earthquake records[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2018, 109: 154-172.

[6] 焦钰祺, 乔东生, 唐国强, 等. 考虑冲刷影响的海上风电单桩基础动力响应分析 [J]. 清华大学学报(自然科学版), 2025, 65(8): 1455-1464.
JIAO Yuqi, QIAO Dongsheng, TANG Guoqiang, et al. Dynamic response of monopile foundations for offshore wind turbines with scour effects[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2025, 65(8): 1455-1464.

[7] ZHU B, WU X F, WANG Y B, et al. Centrifuge modeling for seismic response of fixed-end model piles considering local scour[J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 2020, 146(6): 04020041.

[8] Support structures for wind turbines: DNVGL-ST-0126[S]. DNVGL, 2018.

[9] SUMER B M, FREDSØE J, CHRISTIANSEN N. Scour around vertical pile in waves[J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 1992, 118(1): 15-31.

[10] ZANKE U C E, HSU T W, ROLAND A, et al. Equilibrium scour depths around piles in noncohesive sediments under currents and waves[J]. Coastal Engineering, 2011, 58(10): 986-991.

[11] HEIDARPOUR M, AFZALIMEHR H, IZADINIA E. Reduction of local scour around bridge pier groups using collars[J]. International Journal of Sediment Research, 2010, 25(4): 411-422.

[12] LI J L, GUO Y H, LIAN J J, et al. Mechanisms, assessments, countermeasures, and prospects for offshore wind turbine foundation scour research[J]. Ocean Engineering, 2023, 281: 114893.

[13] LIN C, BENNETT C, HAN J, et al. Scour effects on the response of laterally loaded piles considering stress history of sand[J]. Computers and Geotechnics, 2010, 37(7-8): 1008-1014.

[14] GUO X S, LIU J, YI P, et al. Effects of local scour on failure envelopes of offshore monopiles and caissons[J]. Applied Ocean Research, 2022, 118: 103007.

[15] IEC. Design requirements for fixed offshore wind turbines: IEC 61400-3-1: Part 3-1[S]. Geneva, Switzerland: International Electrotechnical Commission, 2019.

[16] JIANG W Y, LIN C, SUN M. Seismic responses of monopile-supported offshore wind turbines in soft clays under scoured conditions[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2021, 142: 106549.

[17] JIANG W Y, LIN C. Lateral responses of monopile-supported offshore wind turbines in sands under combined effects of scour and earthquakes[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2022, 155: 107193.

[18] YUAN Z C，LIANG F Y，ZHANG H，et al. Seismic analysis of a monopile-supported offshore wind turbine considering the effect of scour-hole dimensions：insights from centrifuge testing and numerical modelling[J]. Ocean Engineering，2023，283：115067.

[19] LIANG F Y，JIA X J，ZHANG H，et al. Seismic responses of offshore wind turbines based on a lumped parameter model subjected to complex marine loads at scoured sites[J]. Ocean Engineering，2024，297：116808.

[20] ITASCA C G. FLAC-fast Lagrangian analysis of continua[J]. Minneapolis：Itasca Consulting Group Inc.，2000.

[21] ESLAMI A，GHORBANI A. Seismic response of offshore wind turbines supported on Monopiles and Suction Buckets：numerical modelling and soft computing study[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering，2022，159：107284.

[22] 杜杰，丁红岩，刘建辉，等. 筒型基础有限元分析的土体边界选取研究 [J]. 海洋技术，2005，24(2)：109-113.
DU Jie，DING Hongyan，LIU Jianhui，et al. Research on boundary selection of soil of bucket foundation with finite element analysis[J]. Ocean Technology，2005，24(2)：109-113.

[23] ZHANG J M，WANG R. Large post-liquefaction deformation of sand：mechanisms and modeling considering water absorption in shearing and seismic wave conditions[J]. Underground Space，2024，18：3-64.

[24] WANG R，CAO W，XUE L，et al. An anisotropic plasticity model incorporating fabric evolution for monotonic and cyclic behavior of sand[J]. Acta Geotechnica，2021，16(1)：43-65.

[25] ZHANG J，WANG T P，XIAO S H，et al. Chinese code methods for liquefaction potential assessment based on standard penetration test：an extension[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering，2021，144：106697.

[26] 李原，王睿，张建民. 地下水位上升对北京土层地震液化的影响 [J]. 土木工程学报，2023，56(增刊 2)：95-103.
LI Yuan，WANG Rui，ZHANG Jianmin. Soil liquefaction influenced by groundwater level rise in Beijing[J]. China Civil Engineering Journal，2023，56(Sup2)：95-103.

[27] WANG R，ZHANG J M，WANG G. A unified plasticity model for large post-liquefaction shear deformation of sand[J]. Computers and Geotechnics，2014，59：54-66.

[28] BIN H Y，WANG R，YU J K，et al. Predictions of seismic response for sheet-pile wall in liquefiable deposit within LEAP 2022 using the CycLiq constitutive model[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering，2024，178：108474.

[29] WANG R，ZHU T，YU J K，et al. Influence of vertical ground motion on the seismic response of underground structures and underground-aboveground structure systems in liquefiable ground[J]. Tunnelling and Underground Space Technology，2022，122：104351.

[30] LI Y Y，LUO C，ZHANG J M，et al. Rayleigh wave-shear wave coupling mechanism for large lateral deformation in level liquefiable ground[J]. Computers and Geotechnics，2022，143：104631.

[31] 王荣鑫，普建明，张建民，等. 高性能岩土工程动力流固耦合仿真方法研究 [J]. 岩土工程学报，2025，47(9)：1913-1924.
WANG Rongxin，PU Jianming，ZHANG Jianmin，et al. High-performance dynamic solid-fluid coupled simulation method for geotechnical engineering[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering，2025，47(9)：1913-1924.

[32] ZHANG J M. Cyclic critical stress state theory of sand with its application to geotechnical problems[D]. Tokyo：Tokyo Institute of Technology，1997.

[33] JONKMAN J，BUTTERFIELD S，MUSIAL W，et al. Definition of a 5-MW reference wind turbine for offshore system development[R]. Golden，CO，USA：National Renewable Energy Laboratory(NREL)，2009.

[34] 刘晶波，刘祥庆，王宗纲. 离心机振动台试验叠环式模型箱边界效应 [J]. 北京工业大学学报，2008，34(9)：931-937.
LIU Jingbo，LIU Xiangqing，WANG Zonggang. Boundary effect of laminar model box for shaking table tests on geotechnical centrifuge system[J]. Journal of Beijing University of Technology，2008，34(9)：931-937.

[35] ROULUND A，SUMER B M，FREDSØE J，et al. Numerical and experimental investigation of flow and scour around a circular pile[J]. Journal of Fluid Mechanics，2005，534：351-401.

[36] KANAMORI H，JENNINGS P C，SINGH S K，et al. Estimation of strong ground motions in Mexico City expected for large earthquakes in the Guerrero seismic gap[J]. Bulletin of the Seismological Society of America，1993，83(3)：811-829.

[37] 国家质量监督检验检疫总局，中国国家标准化管理委员会. 中国地震动参数区划图：GB 18306—2015[S]. 北京：中国标准出版社，2016.
General Administration of Quality Supervision，Inspection and Quarantine of the People's Republic of China，Standardization Administration of the People's Republic of China. Seismic ground motion parameters zonation map of China：GB 18306—2015[S]. Beijing：Standards Press of China，2016.

[38] KOKETSU K，MIYAKE H. A seismological overview of long-period ground motion[J]. Journal of Seismology，2008，12(2)：133-143.

[39] ESLAMI A，GHORBANI A. Assessment of near-field strong ground motion effects on offshore wind turbines resting on liquefiable soils using fully coupled nonlinear dynamic analysis[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering，2023，149(11)：04023095.

第一作者：王天鹏(1997—)，男，博士研究生。
E-mail：wtp23@mails.tsinghua.edu.cn

通信作者：王 睿(1987—)，男，博士，研究员。
E-mail：wangrui_05@mail.tsinghua.edu.cn

不同返包型式加筋黄土边坡振动台模型试验研究

赵志成[1,3]，蔡晓光[2,3]，李思汉[1,3,4,5]，徐洪路[2]，于永堂[6]，袁 超[1,3]

（1. 防灾科技学院防灾减灾工程学院，河北 三河 065201；2. 中国地震灾害防御中心，北京 100029；3. 廊坊市加筋土结构研发与应用重点实验室，河北 三河 065201；4. 河北省地震灾害防御与风险评价重点实验室，河北 三河 065201；5. 北京防灾科技有限公司，北京 100024；6. 中联西北工程设计研究院有限公司，陕西 西安 710077）

摘要：针对返包面板型式对加筋黄土边坡地震影响程度研究的不足，开展三组返包式加筋土边坡振动台模型试验，探究了不同返包工艺（C 型返包、次筋型返包和自返包型）对加筋黄土边坡动力响应特性的影响。结果表明：C 型返包加筋黄土边坡整体稳定性最好。三组模型的加速度放大系数沿坡高呈非线性增长，并在边坡顶部达到峰值，C 型返包对加速度放大效应的抑制效果最优，坡顶放大系数较其余型式低约 3%~8%；边坡破坏模式均表现为坡面外倾与坡顶沉降复合特征，C 型返包破坏区域显著小于其余两类，表现出更优的整体抗震性能；边坡坡顶沉降呈现“两端大、中间小”的非线性分布，其中自返包型加筋黄土边坡的顶层返包段约束相对薄弱，在强震作用下其顶层筋材易呈拔出趋势，致使破坏现象最为显著，坡顶处总永久位移与最大累计沉降均为三组模型最大，分别为 25.9 mm（2.59%H）和 39.9 mm（3.99%H）；筋材应变响应方面，峰值应变随输入 PGA 增大而递增，底层格栅应变显著小于上层，C 型返包整体应变水平最低，最大峰值应变为 0.10%，为次筋型与自返包型的 83.3%；次筋型返包在抑制坡体内部填土沉降方面表现最优，但在近坡面处存在应力释放现象。研究结论可为加筋黄土边坡的设计选型提供参考。

关键词：加筋边坡；返包型式；地震响应；振动台模型试验

中图分类号：TU476.4 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508050

Shaking table test study on loess slopes reinforced with different wrap-around facing types

ZHAO Zhicheng[1,3], CAI Xiaoguang[2,3], LI Sihan[1,3,4,5], XU Honglu[2], YU Yongtang[6], YUAN Chao[1,3]

（1.College of Disaster Prevention and Reduction Engineering，Institute of Disaster Prevention，Sanhe 065201，China；2.China Earthquake Disaster Prevention Center，Beijing 100029，China；3.Langfang City Key Laboratory of Research and Application of Geosynthetic Reinforced Soil Structure，Sanhe 065201，China；4.Hebei Key Laboratory of Earthquake Disaster Prevention and Risk Assessment，Sanhe 065201，China；5.Beijing Disaster Prevention Science and Technology Company Limited，Beijing 100024，China；6.China United Northwest Institute for Engineering Design & Research Co.，Ltd.，Xi’an 710077，China）

Abstract: In view of the lack of research on the seismic influence degree of the back-wrapped panel type on the reinforced loess slope，three sets of shaking table model tests of the back-wrapped reinforced soil slope were carried out. The response differences of different backpacking processes (C-shaped wrap-around facing，Secondary reinforcement wrap-around facing，and Self-wrap-facing) to reinforced loess slopes were explored. The experimental results demonstrate that the slope reinforced with C-shaped wrap-around facing exhibited the highest integral seismic resistance. The acceleration amplification factors along the slope height increased nonlinearly and peaked at the crest across all models. The C-shaped wrap-around facing provided the most effective mitigation of acceleration amplification，reducing the crest amplification factor by approximately 3%~8% compared to the other two types. The failure patterns consistently combined outward deformation of the slope face and crest settlement. The C-shaped configuration displayed a notably smaller failure zone and superior overall seismic performance. Crest settlements followed a nonlinear distribution with greater values at both ends and minimal deformation in the central region. The self-wrap-facing system，due to relatively weak restraint in the top wrap-around section，showed a pronounced tendency for reinforcement pull-out under intense shaking，leading to the most severe damage. This model recorded the largest total permanent displacement (25.9 mm，representing 2.59% of the slope height H) and maximum cumulative settlement (39.9 mm，or 3.99% of H) at the crest. Regarding reinforcement strain，peak tensile strain increased with rising PGA，with lower strains measured in the bottom geogrid layers. The C-shaped

收稿日期：2025-08-14；**修订日期：**2025-09-20

基金项目：河北省教育厅在读研究生创新能力培养资助项目（CXZZSS2025145）；中国地震局工程力学研究所基本科研业务费专项（2025D05）

wrap-around facing registered the lowest overall strain levels, with a maximum peak strain of 0.10%, equivalent to 83.3% of those in the secondary reinforcement and self-wrap-facing models. The secondary reinforcement type performed most effectively in reducing internal backfill settlement, though stress relaxation was observed near the slope face. These findings offer valuable insights for the optimized design and typological selection of reinforced loess slopes in seismic regions.

Keywords: reinforced slopes; wrap-around facing types; seismic response; shaking table model test

中国国土面积的 6.6% 为黄土地区[1]。通渭、海源、古浪等地区的地震害表明，地震常造成大量黄土斜坡失稳，对附近人民的生命和财产安全造成了严重威胁[2-3]。在此背景下，返包式加筋结构为上述区域提供了柔性生态一体化解决方案[4]。该结构通过土工格栅返包土工袋形成坡面防护层，并利用筋-土界面摩擦作用将土压力有效传递至内部土体，形成高效锚固体系。目前，该技术已应用于云南红河州绿春县填方边坡工程[5]、甘肃羊场沟黄土斜坡[6]及蛇河湾城南小学边坡治理[7]，展现出广阔的应用前景。

近年来，众多学者针对返包式加筋土结构的动力响应特性进行了深入研究。李庆海等[8]通过振动台试验对比了普通式与返包式加筋土挡墙的抗震性能，发现返包式面层可有效削弱地震波传播，使加速度响应降低 10%~20%。HUANG 等[9]针对次筋型返包加筋土边坡进行振动台试验，表明该型式可显著抑制坡体裂缝扩展，提升整体稳定性。SAFAEE 等[10]则通过数值模拟与试验手段，探究了次筋型返包加筋土边坡的断面型式对边坡变形的影响，指出阶梯形断面可以有效减少最大水平位移与塑性应变。周健等[11]借助离心机试验与数值模拟，研究筋材长度、间距与刚度对 C 型返包挡墙变形的影响，指出筋材间距是控制变形的首要因素，而长度与刚度的增强效果存在临界阈值。XU 等[12]则聚焦于自返包挡墙在强震下的响应机制，发现其加速度放大系数受土体非线性特性影响显著，变形过程可分为弹性、塑性与破坏三个阶段。MENG 等[13]通过对比格宾笼与返包土工袋面层的抗震性能，发现两者在加速度与土压力响应上差异不大，但返包式在控制坡顶沉降方面更具优势。李思汉等[14]通过 FLAC3D 建模分析多种面板型式的性能，发现模块加返包组合式在控制位移与土压力分布方面表现较优。蔡晓光等[15]基于振动台试验对比返包式与刚性面板挡墙，证实面板型式对加速度放大系数分布具有显著影响。马滨等[16]通过设计返包胎面加筋挡土墙振动台试验，探讨了返包方式、轮胎间绑扎模式、基础埋深和加筋长度等多种因素在强震作用下对挡墙抗震性能的影响。上述研究结果表明，各因素对结构抗震性能的影响显著性依次为：返包方式>加筋长度>基础埋深>轮胎间绑扎模式，进一步凸显返包工艺的核心作用。

综上所述，既有研究多聚焦于单一返包型式下的地震响应规律，缺乏系统性的型式对比。当前常见的返包工艺有 C 型、次筋型与自返包型三种，而返包型式作为加筋土结构的核心特征，其选型直接关系到工程安全性、经济性与抗震韧性。鉴于此，本研究设计并开展了三组不同返包型式的加筋黄土边坡振动台模型试验。对比分析其地震行为演化特征，旨在揭示不同返包型式对地震行为的影响机理。研究结果可为高烈度区的返包式加筋边坡的选型提供参考。

1 试验模型

1.1 试验设备

模型试验在防灾科技学院地下流体动力响应实验室进行。振动台的尺寸为 1.8 m×1.8 m(长×宽)，最大承载力为 2000 kg，台面的最大行程为±100 mm，工作频率范围为 0~50 Hz。刚性模型箱使用螺栓固定在振动台上，模型箱尺寸为 1.5 m×0.5 m×1.2 m(长×宽×高)，模型箱两侧设有透明的亚克力玻璃板，便于观察试验过程中边坡变形和填料变化。振动台及模型箱装置如图 1 所示。

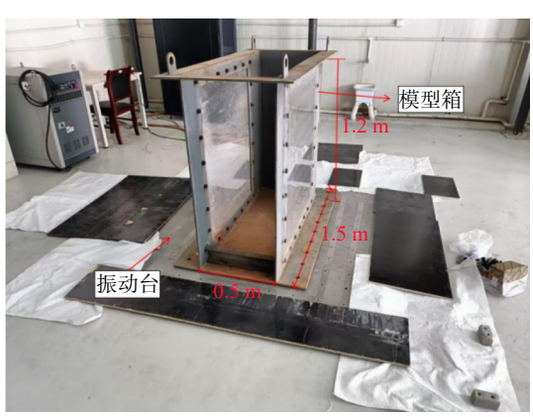


图 1 振动台测试装置[17-18]

Fig. 1 Shaking table test device[17-18]

1.2 相似关系

综合考虑模型箱尺寸和振动台承载能力，试验模型的相似比设定为 1∶3(模型/原型)。根据 IAI[19]提出的地震模拟相似关系，推导得出模型主要相似参数，如表 1 所示。

1.3 试验材料

筋材采用单向拉伸聚丙烯(PP)土工格栅。基于

表 1　模型相似参数

Tab. 1　Model similarity parameters

序号	物理量	相似关系	相似常数(原型/模型)
1	长度L	C_L	3
2	弹性模量E	$C_E = C_L$	3
3	密度ρ	$C_\rho = 1$	1
4	时间t	$C_t = C_L^{0.5}$	1.73
5	加速度a	$C_a = 1$	1
6	频率f	$C_f = C_L^{-0.5}$	0.58
7	应力σ	$C_\sigma = C_L$	3
8	重力g	$C_g = 1$	1

模型试验相似比，经剔肋处理后，格栅的极限抗拉强度为 17.67 kN/m；在 2% 和 5% 的伸长率条件下，对应的抗拉强度分别为 4.2 kN/m 和 7.93 kN/m。

坡面采用土工格栅返包三类自制土工袋建造，自制土工袋尺寸分别为 0.25 m×0.10 m×0.10 m(长×宽×高)、0.20 m×0.10 m×0.10 m(长×宽×高)、0.10 m×0.10 m×0.10 m(长×宽×高)。土工袋内填充物与试验中回填土一致，上下两层土工袋采用错缝搭接的方式堆叠，如图 2 所示。

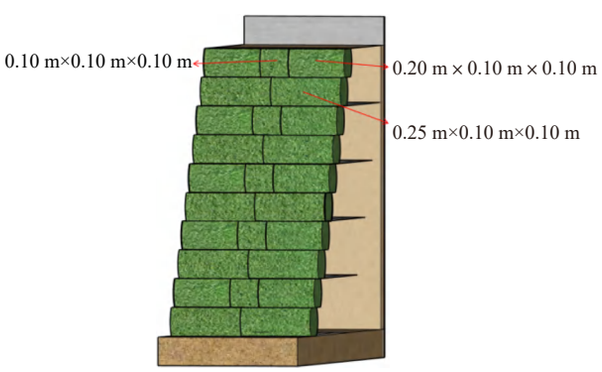


图 2　土工袋堆叠示意图

Fig. 2　Soil bag stacking schematic diagram

回填土采用重塑后的马兰黄土，其颗粒级配曲线如图 3 所示，内摩擦角 φ=26.10°；黏聚力 c = 22.70 kPa；最大干密度 ρ = 1.76 g/cm^3；最优含水率 w = 13.2%；液限为 30.6%；塑限为 15.4%。

1.4　试验方案

试验模型设计布局如图 4 所示。三组模型的整体尺寸均为坡高 100 cm、坡顶长 60 cm、坡宽 50 cm、坡角 63°，综合坡比 1∶0.5。加筋间距 20 cm，加筋长度 L=0.6H=60 cm，满足加筋土边坡加筋长度要求[20]。模型采用分层填筑，每层填筑完成后使用自制的夯实器进行压实。试验中通过在模型箱两侧涂抹凡士林降低土体与模型箱侧壁之间的摩擦。此外为了减弱刚性边界对地震波的反射，在振动方向的后壁粘贴了 5 cm 厚的海绵。返包型式分为 C 型、次筋型和自返包型，如图 5 所示。其中 C 型返包的特点为格栅返包土工袋后向填土中延伸小段距离，通过铁棒

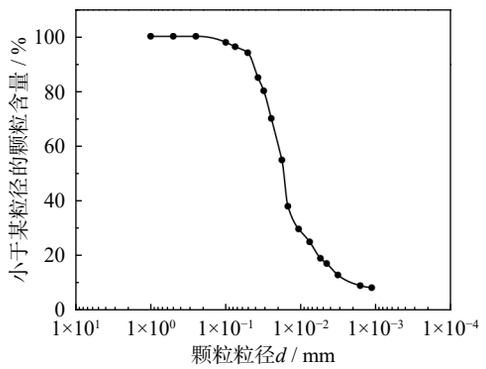
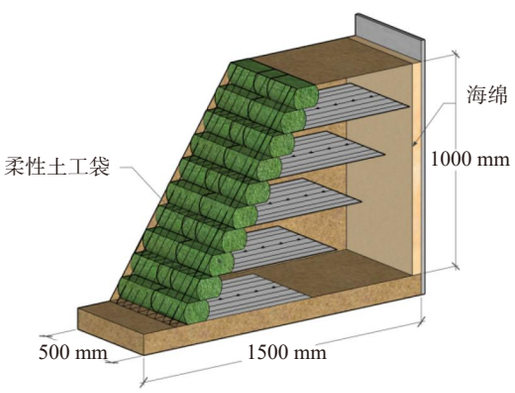


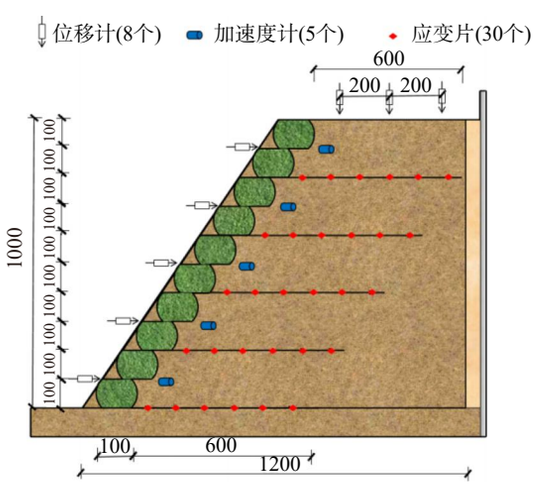
图 3　颗粒级配曲线

Fig. 3　Particle size distribution curve



(a) 加筋黄土边坡三维模型图

(a) Three-dimensional model diagram of reinforced loess slope



(b) 传感器布置图（单位：mm）

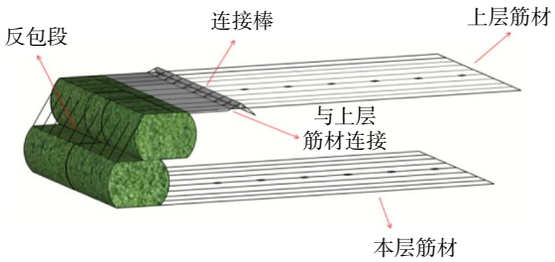
(b) Schematic of sensor layout (Unit：mm)

图 4　模型设计图

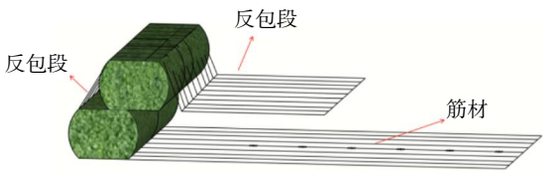
Fig. 4　Experimental model design drawing

在本层返包段格栅与相邻层格栅纵肋交错处进行锚定，但该返包型式在顶层处无法进行固定，试验中在顶层采用次筋型返包，与 YU 等[21]的研究中采用的方法一致；次筋型返包的特点为格栅返包土工袋后，先向下回折至一定深度，再向填土内部延伸，依靠上部填土与土工格栅之间的摩擦力进行固定，施工难度在三种返包型式中最低；自返包型的特点为土工格栅返包土工袋后全回折到底层格栅并与其相连。

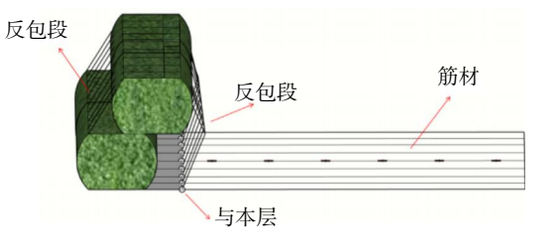
传感器布置如图 4(b)所示。共计布设 8 个位移



(a) C型返包
(a) C-shaped wrap-around facing



(b) 次筋型返包
(b) Secondary reinforcement wrap-around facing



(c) 自返包型
(c) Self-wrap-facing

图 5 不同返包型式示意图

Fig. 5 Schematic diagram of different wrap-around facing types

计用于监测坡面位移及坡顶表面沉降变化，具体分布为坡面 5 个，坡顶表层 3 个；5 个加速度计记录坡体水平方向的加速度数据，此外在坡顶及模型箱两侧各设置 1 个加速度计，用于监测振动台台面及坡顶处水平方向的加速度数据；30 片应变片测量筋材受力情况，均匀布置于 5 层筋材中。

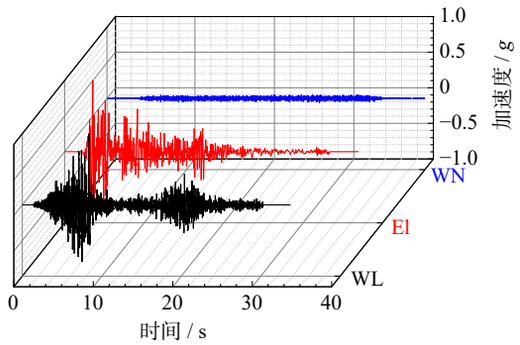
1.5 地震荷载输入

采用逐级递增峰值加速度（PGA）的地震动序列对模型进行加载。试验选取经相似比缩尺处理的 El-Centro 波（简称 El 波）和卧龙波（简称 WL 波）作为输入地震动，工况前后均施加峰值加速度为 0.05g 的白噪声（简称 WN 波）进行扫频测试，地震动如图 6 所示。峰值加速度幅值变化加载工况如表 2 所示。本文主要研究不同返包型式对地震行为的影响机理，鉴于 El 波具有丰富的中低频能量成分，更适用于评估柔性加筋土结构在地震作用下的动力响应，后续内容仅以 El 波为例进行分析。

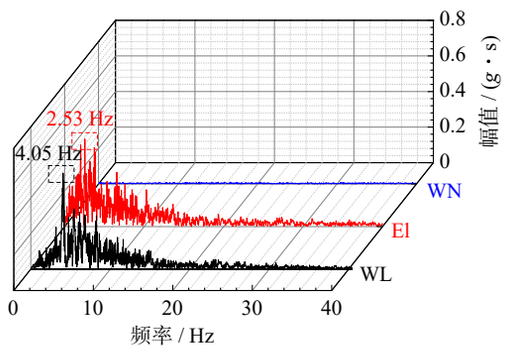
2 试验结果及分析

2.1 加速度响应

采用均方根方法计算结构不同位置处加速度放大系数，三种返包式加筋土边坡的加速度放大系数沿坡高的分布如图 7 所示。由图可知：①三组模型



(a) 地震动时程曲线
(a) Seismic time-history curves



(b) 傅里叶谱
(b) Fourier spectrum

图 6 输入地震动

Fig. 6 Input ground motion

表 2 试验工况

Tab. 2 Loading cases

工况序号	输入波形	峰值加速度/g	工况代号
	白噪声		WN 1
1、2	El波、WL波	0.1	El 0.1g、WL 0.1g
	白噪声		WN 2
3、4	El波、WL波	0.2	El 0.2g、WL 0.2g
	白噪声		WN 3
5、6	El波、WL波	0.4	El 0.4g、WL 0.4g
	白噪声		WN 4
7、8	El波、WL波	0.6	El 0.6g、WL 0.6g
	白噪声		WN 5
9、10	El波、WL波	0.8	El 0.8g、WL 0.8g
	白噪声		WN 6
11、12	El波、WL波	1.0	El 1.0g、WL 1.0g
	白噪声		WN 7
13、14	El波、WL波	1.2	El 1.2g、WL 1.2g
	白噪声		WN 8
15、16	El波、WL波	1.4	El 1.4g、WL 1.4g
	白噪声		WN 9
17、18	El波、WL波	1.6	El 1.6g、WL 1.6g
	白噪声		WN 10
19、20	El波、WL波	1.8	El 1.8g、WL 1.8g
	白噪声		WN 11
21、22	El波、WL波	2.0	El 2.0g、WL 2.0g
	白噪声		WN 12

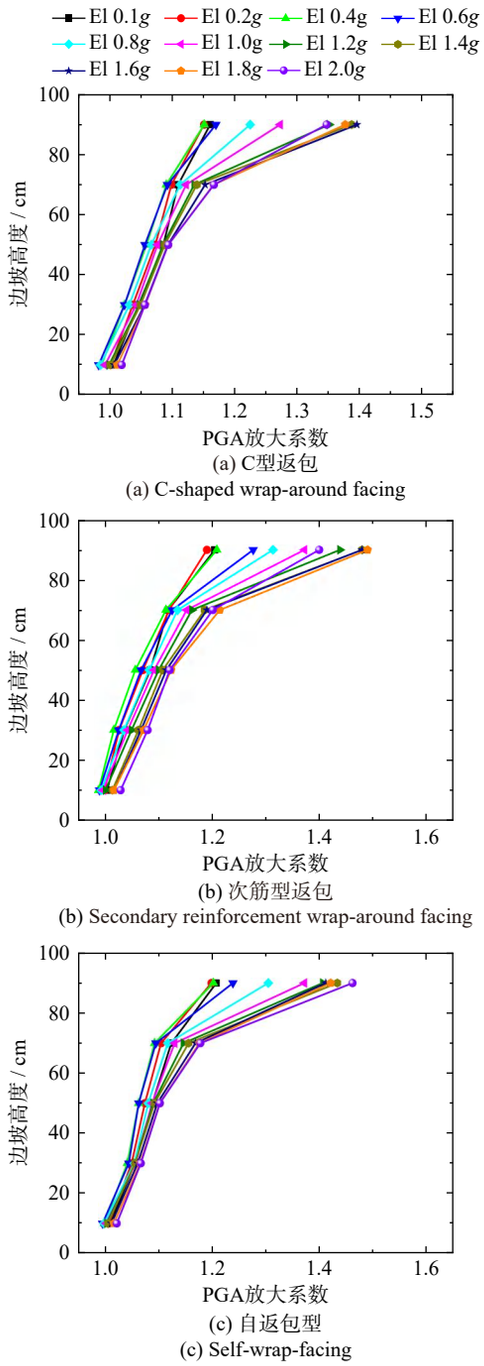


图 7　加速度放大系数

Fig. 7　Acceleration amplification factors

在地震波激励下，其加速度放大系数均随坡体高度增加呈非线性增长趋势，并于结构顶部达到最大值。此现象主要源于坡顶位置边界约束相对较弱，导致地震作用下该区域动力响应显著放大，土体变形增大，其规律与高层建筑中观测到的鞭梢效应特征一致；②随着峰值加速度的增大，自返包型加筋边坡中下部的加速度放大系数增长较小，而次筋型返包在该处的增大程度约为自返包型的 1.5 倍，C 型返包的增长幅度介于二者之间。随着坡高的增加，次筋型与自返包型在加速度放大系数增长程度上的差异逐渐减小，并在坡顶位置趋于一致。这主要是由于地震波传播至坡顶时发生叠加与反射，引起显著的加速度放大效应，从而减弱了因底部加固方式不同所带来的响应差异。

将三组模型的最大加速度放大系数随峰值加速度的变化进行对比，如图 8 所示。由图可知：①C 型返包与次筋型返包加速度放大系数均随输入峰值加速度增大呈先增后减的变化趋势。其原因为试验初期，地震动输入能量增加，但边坡位移响应尚小，能量耗散有限，导致加速度放大系数增长显著；随着地震动峰值加速度持续增大，边坡位移显著增加，地震能量耗散加剧，且返包式加筋土边坡的坡面由土工袋堆砌，在强地震荷载作用下亦会产生一定变形，进一步促使加速度放大系数降低；②自返包型加速度放大系数随输入峰值加速度增大呈先增后减再增加的趋势，其主要原因在于该返包型式在强震作用下发生显著外倾，这会改变边坡的整体几何形态和受力状态，引发坡体内部应力重分布，使得地震波在传播至坡顶区域时产生更强的汇聚和反射效应[22]；③加筋土边坡的整体性越好，加速度放大系数变化范围越小，三种返包型式中，C 型返包加速度放大系数变化最为平缓，表明 C 型返包较其余两种返包型式有着良好的整体性，对加速度放大效应抑制效果最优，坡顶放大系数较其余型式低约 3%~8%。

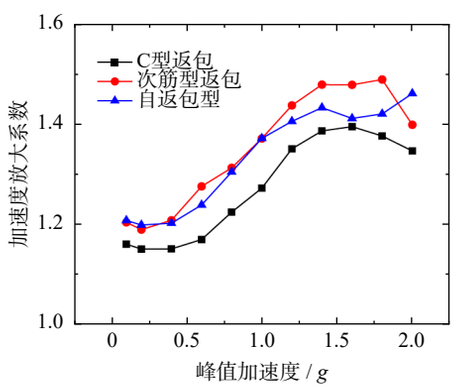


图 8　加速度放大系数随峰值加速度的变化

Fig. 8　Variation of acceleration amplification factor with peak ground acceleration

2.2　水平位移分析

各工况加载前均对位移计数据清零，已产生位移视为初始位移。三组返包式加筋土边坡地震永久位移沿坡高的分布情况如图 9 所示。由数据可知：①三组模型的地震永久位移均随着坡高增加；②随着峰值加速度的增大，地震永久位移值显著增加；③C 型结构在峰值加速度≤0.8g 时，地震永久位移值较小，坡顶处位移小于 0.5 mm，在 1.0g 工况后位移开始显著增加，单次工况下最大坡顶与坡趾位移分别为 5.3 mm（0.53%H）和 1.4 mm（0.14%H）；④次筋型与自返包型地震永久位移均在 0.8g 工况后显著增加，

次筋型单工况下最大位移为坡顶 4.2 mm(0.42%H)、坡趾 1.1 mm(0.11%H);自返包型相应值为坡顶 4.2 mm(0.42%H)、坡趾 1.2 mm(0.11%H);⑤随着峰值加速度增加,次筋型返包在 1.8g 工况下的地震永久位移并未呈现相应的增长趋势,其坡顶处变形量甚至小于 0.8g 工况下的变形量,这一试验现象与 XU 等[12]和 SAFAEE 等[10]的研究结果一致。

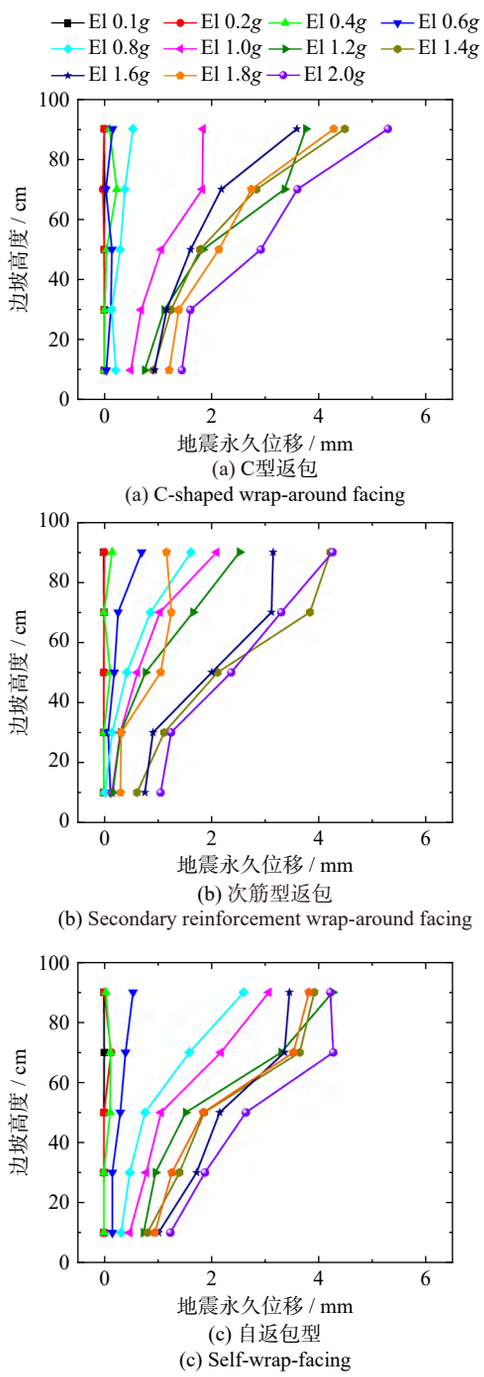


图 9 地震永久位移

Fig. 9 Seismic permanent displacement

将各工况坡顶处(0.9H)产生的地震永久位移累加,得到总永久位移。总永久位移对比情况见图 10。随着峰值加速度的增大,总永久位移呈非线性增长。最大总永久位移为:自返包型 (25.9 mm, 2.59%H)>C 型(24.0 mm, 2.40%H)>次筋型(19.8 mm, 1.98%H),次筋型返包因 1.8g 工况下位移增量放缓,显著降低了总永久位移。

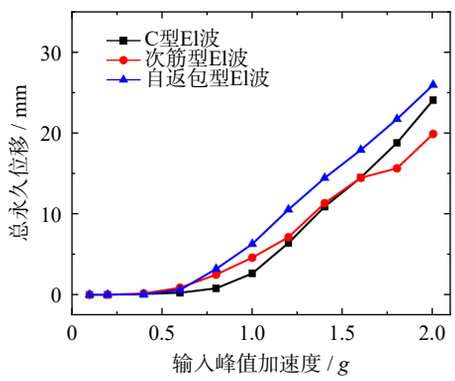


图 10 总永久位移

Fig. 10 Total permanent displacement

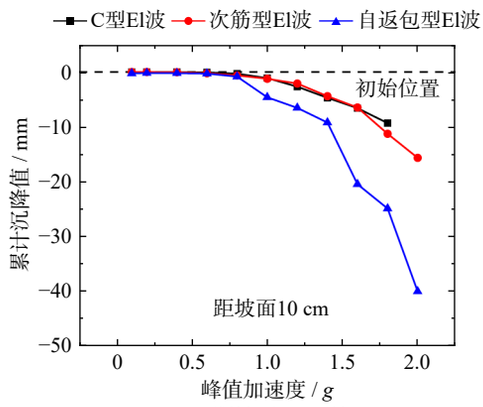
2.3 沉降变化规律

图 11 展示了三种返包式加筋土边坡模型在逐级递增峰值加速度作用下的坡顶沉降分布规律。由图可知:①累计沉降值:自返包型>次筋型>C 型;②当峰值加速度≤0.8g 时,三组模型坡顶沉降量均较小,边坡整体稳定性良好;③峰值加速度≥1.0g 后沉降值显著非线性增长,最大累积沉降出现在自返包型距坡顶 10 cm 处(39.9 mm, 3.99%H),结合 2.2 节水平位移分析,此处显著沉降主要是因为自返包型顶层返包段在强震下外倾较为严重,导致临坡面区域沉降远大于其他型式。

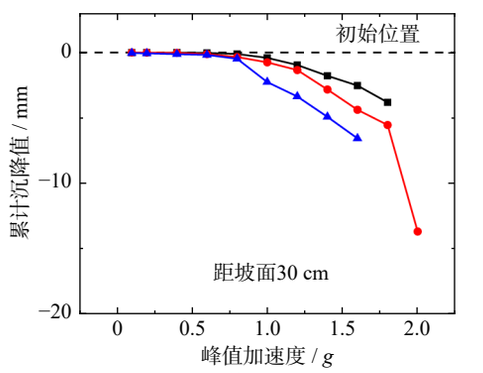
三组模型坡顶沉降均呈现非线性分布特征:靠近坡面与远离坡面(近后壁端)两端的沉降量较大,中间部位沉降量较小,其原因为:①强震作用下返包段的外倾变形趋势加剧了其后方临坡面土体向临空方向的迁移,进而导致较大沉降;②马兰黄土具有低黏聚力和高空隙比的特性,在强震作用下极易发生震陷。而在近后壁端,后壁 5 cm 厚度的海绵模拟的柔性边界在强震下会发生挤压变形,致使邻近的马兰黄土填料因侧向约束松弛发生“卸载回弹”效应,并在反复震动中产生向后的累积迁移,表现为“沉降”增大。同时土体的特性也放大了这种边界效应导致的沉降。

2.4 筋材应变

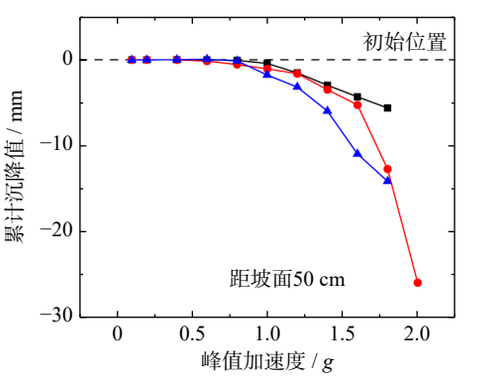
土工格栅的受力特性对于边坡的变形特性和稳定性至关重要。将模型中筋材应变情况汇于图 12(由于工况繁多,此处仅选取≥1.0g 的工况进行分析),由图中数据可知:①3 组模型随着加载峰值加速度的增大,筋材的峰值应变增量相应递增,且最底层格栅的峰值应变增量显著低于其他层;②C 型返包



(a) 距坡面10 cm处
(a) 10 cm from the surface of the slope



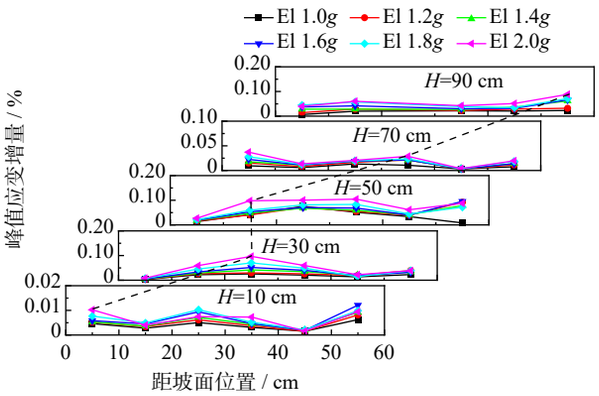
(b) 距坡面30 cm处
(b) 30 cm from the surface of the slope



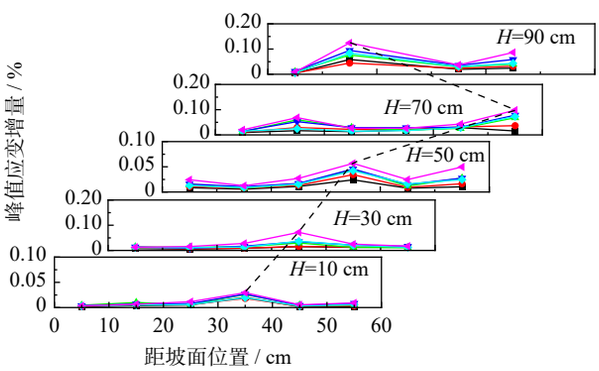
(c) 距坡面50 cm处
(c) 50 cm from the surface of the slope

图 11　不同峰值加速度下的坡顶沉降变化曲线

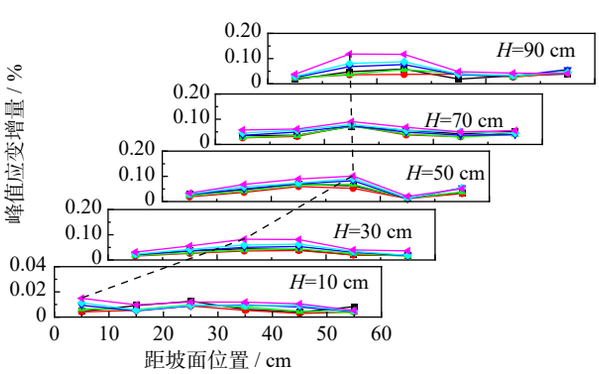
Fig. 11　The variation curve of slope top settlement under different peak accelerations



(a) C型返包
(a) C-shaped wrap-around facing



(b) 次筋型返包
(b) Secondary reinforcement wrap-around facing



(c) 自返包型
(c) Self-wrap-facing

图 12　筋材应变

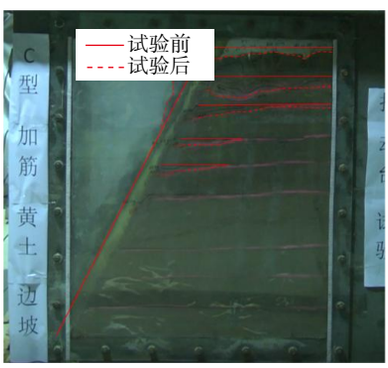
Fig. 12　Reinforcement strain

边坡筋材最大峰值应变增量为 0.1%，位于第三层筋材距坡面 25 cm 处；③次筋型返包边坡筋材最大峰值应变增量为 0.12%，位于第五层筋材距坡面 15 cm 处，且近坡面 5 cm 位置处应变增量远小于其余位置处应变增量，其机理在于：该返包型式的返包段末端依靠上部填土进行固定，强震作用下，上部土体发生小范围的松动，导致近坡面格栅上部土体约束不足；④自返包型边坡筋材最大峰值应变增量为 0.12%，位于第五层筋材距坡面 15 cm 处，筋材应变呈现“上大下小”的分布特征，其成因在于：自返包结构的返包段自成整体，顶层返包段约束薄弱，在强震作用下易发生明显外倾，从而拉动加筋段整体向外位移，致使顶层筋材呈现拔出趋势；⑤对比分析三组模型筋材应变可知，C 型返包边坡的整体格栅应变增量低于次筋型与自返包型，表明其结构整体性更优。

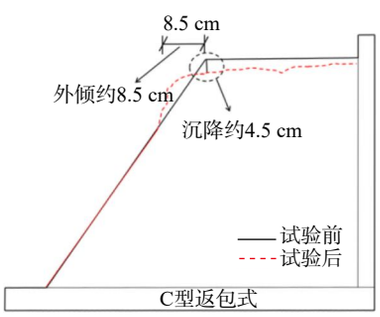
2.5　试验宏观现象

C 型返包加筋黄土边坡模型破坏情况如图 13 所示。由图 13 可知：①边坡破坏模式表现为坡面外倾和顶部沉降相结合；②坡面破坏区域由自坡高约 0.7H 处至顶部，外倾程度沿坡高逐步增大，最大外倾发生在坡顶近坡面处，外倾位移约 8.5 cm；③顶部沉降由近坡面至模型可观测最内侧逐步减小，最大沉降发生在近坡面处，约为 4.5 cm；④坡体内部沉降在坡高 0.6H~0.9H 近坡面区域较为显著，最大沉降位于

坡高 0.8H~0.9H, 距坡面 10 cm 处, 其主要原因在于坡高 0.8H 处为 C 型返包与次筋型返包连接的锚固过渡区, 此处顶层返包段约束相对薄弱, 在强震作用下, 该段返包层外倾, 进而牵引相邻返包层产生位移, 导致顶部土体发生沉降以填补由此产生的空隙。



(a) 正视图
(a) Front view



(b) 边坡沉降外倾示意图
(b) Schematic diagram of slope settlement and bulging deformation

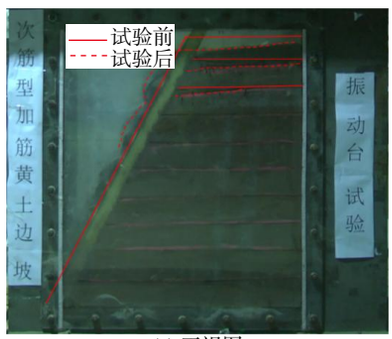
图 13 C 型返包模型破坏情况

Fig. 13 Failure characteristics of the C-shaped wrap-around facing model

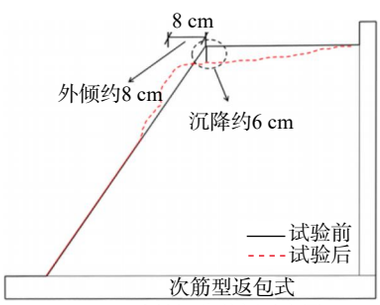
次筋型返包加筋黄土边坡模型破坏情况如图 14 所示。由此可知: ①边坡破坏模式表现为坡面外倾和顶部沉降相结合; ②坡面破坏区域发生在约 0.55H 处至坡顶, 最大外倾发生在坡顶近坡面处, 最大值约为 8 cm; ③边坡临坡面至模型可观测最内侧的顶部沉降逐步减小, 最大沉降值为 6 cm; ④次筋型返包坡体内部沉降在三种型式中最小, 这得益于该返包型式在返包土工袋后继续向填土内部延伸, 类似于加了一层次筋, 有效地减小了填土内部沉降。

自返包加筋黄土边坡模型破坏情况如图 15 所示。①边坡破坏形式和坡顶可观测沉降与其余两种返包型式相同, 亦表现为坡面外倾和顶部沉降相结合, 顶部沉降由近坡面至模型可观测最内侧逐步减小; ②边坡坡面破坏区域范围为约 0.45H 处至坡顶, 最大外倾值为 14 cm, 最大沉降为 9 cm, 其中自返包式外倾与沉降过大的原因是该型式顶层返包段自成一体, 约束较小, 且在强震作用下发生外倾后, 返包段会因自重拉动加筋端外移。

综合三组模型的破坏现象分析: ①自返包型式外倾值最大, 超过 C 型与次筋型的 1.5 倍, C 型返包与次筋型返包最大外倾程度相近, 这是因为 C 型返包加筋黄土边坡顶层采用次筋型返包型式; ②C 型返包顶部最大沉降约为 4.5 cm, 次筋型与自返包型分别约为 C 型返包的 1.33 倍和 2 倍; ③次筋型返包与



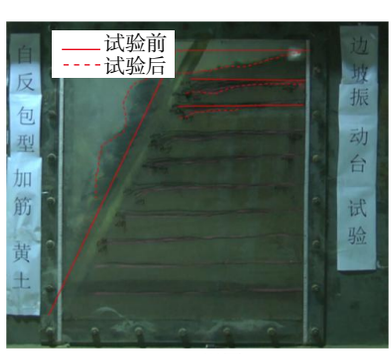
(a) 正视图
(a) Front view



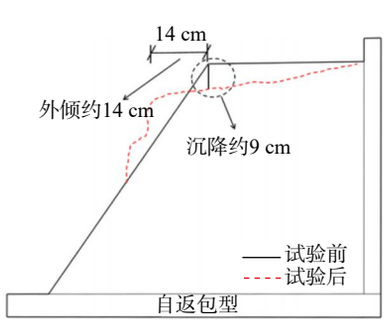
(b) 边坡沉降外倾示意图
(b) Schematic diagram of slope settlement and bulging deformation

图 14 次筋型返包模型破坏情况

Fig. 14 Failure characteristics of the secondary reinforcement wrap-around facing model



(a) 正视图
(a) Front view



(b) 边坡沉降外倾示意图
(b) Schematic diagram of slope settlement and bulging deformation

图 15 自返包模型破坏情况

Fig. 15 Failure characteristics of the self-wrap facing model

自返包发生显著外倾的范围分别约为 C 型返包的 1.5 倍和 1.83 倍。结果表明返包式加筋黄土边坡的整体性为：C 型返包>次筋型返包>自返包，这与 2.1 节中加速度响应结果一致。

3　讨　论

3.1　加速度响应与破坏特征的内在联系

研究结果表明，边坡的加速度放大效应与其宏观破坏特征之间存在动力学联系。加速度放大系数沿坡高非线性增长并在坡顶达到峰值，表明坡顶区域为动力响应的最强烈部位。结合 2.5 节试验宏观现象，边坡破坏模式均以坡顶沉降和坡面上部外倾为主，这与加速度响应的分布模式高度吻合。坡顶最大的加速度动力响应导致该区域土体产生显著的沉降；同时，巨大的惯性力也驱动坡面上部土体向外运动，从而形成外倾鼓胀。因此，加速度响应是边坡破坏的驱动因素，而破坏特征则是动力响应在结构上的最终体现。通过监测和分析边坡的加速度放大特性，可以有效预测其潜在的破坏模式与薄弱部位。

3.2　加筋黄土边坡抗震加固机理分析

加筋结构的核心机理在于通过筋材与填土的界面摩擦，将潜在的滑裂区土体转化为具有抗剪强度的加筋复合体。地震过程中，土体承受的往复剪切作用使筋材承受拉应力，同时筋材通过其抗拉强度和界面摩擦力对土体形成侧向约束，从而增强了边坡的整体稳定性。结合 2.4 节筋材应变，验证了上覆土体自重产生的法向应力增强了筋土界面摩擦，使得下部加筋区能更有效地发挥锚固作用。

返包方式是影响加固效果的关键[16]。C 型返包通过铁棒将返包段与相邻层筋材锚定，形成了一个刚性连接节点，将坡面承受的土压力和地震惯性力更直接、有效地传递至内部稳定土体中，力传递路径明确，最大限度地发挥了筋材的加筋作用。次筋型返包的回折段依赖于土体与筋材的摩阻力固定，其作用类似于增加次筋层，通过延长加筋长度和增加约束范围来提高稳定性，但其力传递效率低于刚性连接的 C 型。自返包型的筋材自成闭环，其受力主要依赖于筋材与填土之间的摩擦与咬合作用，相邻层反包段相互约束作用较弱，其顶层返包段易发生外倾，形成薄弱部位。

4　结　论

开展三组振动台模型试验，对比分析了 C 型返包、次筋型返包和自返包型加筋黄土边坡在地震荷载下的响应特征，旨在探究返包型式对加筋土边坡抗震性能的影响，具体结论如下：

（1）加速度放大系数沿坡高呈非线性增长，并在结构顶部达到峰值。三组模型结构底部加速度放大系数差异性较大，这种差异随着坡高逐渐减小。C 型返包加筋土边坡整体性最好，对加速度放大抑制效果最佳。

（2）加筋黄土边坡的坡面地震永久位移受峰值加速度的影响。C 型返包在 1.0g 工况下开始出现显著位移，次筋型与自返包型则出现在 0.8g 工况。随着边坡受动力水平的提高，总永久位移呈非线性增长。

（3）三组模型坡顶沉降均呈现“两端大、中间小”的非线性分布规律，峰值加速度≤0.8g 时，坡顶沉降量处于较低水平，累计沉降值：自返包型>次筋型>C 型。

（4）筋材峰值应变随输入峰值加速度增大而增大，底层格栅应变增量远小于上层，顶层筋材因约束薄弱易产生拔出趋势。C 型返包和整体应变水平较低，最大峰值应变为 0.10%，为次筋型与自返包型最大峰值应变的 83.33%。

（5）三组模型的破坏模式均表现为坡面外倾和顶部沉降相结合，C 型返包、次筋型返包、自返包坡面外倾分别约为 8.5、8.0、14.0 cm，最大沉降分别约为 4.5、6.0、9.0 cm，C 型返包破坏区域范围远小于其余两种返包型式。C 型返包表现出更优的抗震效果。

参考文献：

[1] 万卫. 黄土高原地区地震动预测方程研究 [D]. 哈尔滨：中国地震局工程力学研究所，2024.
WAN Wei. Study on prediction equation of ground motion in Loess Plateau area[D]. Harbin：Institute of Engineering Mechanics，China Earthquake Administration，2024.

[2] 彭达. 典型黄土地震滑坡形成条件及滑距预测 [D]. 哈尔滨：中国地震局工程力学研究所，2024.
PENG Da. The formation conditions and sliding distance prediction of typical loess seismic landslides[D]. Harbin：Institute of Engineering Mechanics，China Earthquake Administration，2024.

[3] 许吉翔. 1927 年古浪地震高烈度区滑坡分布规律与危险性评价研究 [D]. 北京：中国地质大学(北京)，2021.
XU Jixiang. Spatial distribution of seismic landslides and risk assessment in the high impact areas of 1927 Gulang earthquake[D]. Beijing：China University of Geosciences，2021.

[4] 夏磊. 返包式加筋陡坡高路堤筋土相互作用机理及稳定性研究 [D]. 成都：西南交通大学，2017.
XIA Lei. A study on the interaction mechanism and stability of geogrid reinforced soil steep slope with wrapped face[D]. Chengdu：Southwest Jiaotong University，2017.

[5] 黄玮，梁永辉. 西南山区某高填方边坡支护设计与施工 [J]. 施工技术，2020，49(增刊 1)：53-57.
HUANG Wei，LIANG Yonghui. Design and construction of support for high fill slope in southwest China[J]. Construction Technology，2020，49(Sup 1)：53-57.

[6] 陈寰. 土工格栅加筋土支护结构在甘肃黄土地区地质灾害治理中的应用 [J]. 甘肃科技，2024，40(7)：55-59.
CHEN Huan. Application of geogrid reinforced soil support structure in geological hazard contrl in loess area of Gansu Province[J]. Gansu Science and Technology，2024，40(7)：55-59.

[7] 杨永宇. 土工格栅加筋土回填反压在高陡边坡治理工程中的应用：以兴县城南小学高陡边坡治理为例 [J]. 华北自然资源，2024(2)：84-87.
YANG Yongyu. Application of geogrid reinforced soil backfill back pressure in high and steep slope treatment project：taking high and steep slope treatment of Chengnan Primary School in Xing County as an example[J]. Huabei Natural Resources，2024(2)：84-87.

[8] 李庆海，王炳锟，蒋楚生，等. 包裹式加筋土挡土墙抗震试验分析 [J]. 铁道工程学报，2012，29(11)：27-33.
LI Qinghai，WANG Bingkun，JIANG Chusheng，et al. Seismic tests and analysis of warped reinforced earth-retaining wall[J]. Journal of Railway Engineering Society，2012，29(11)：27-33.

[9] HUANG L，HE W L，HOU Y J，et al. Seismic behavior of flexible geogrid wrap-reinforced soil slope[J]. Advances in Civil Engineering，2021，2021(1)：8833662.

[10] SAFAEE A M，MAHBOUBI A，NOORZAD A. Experimental investigation on the performance of multi-tiered geogrid mechanically stabilized earth（MSE）walls with wrap-around facing subjected to earthquake loading[J]. Geotextiles and Geomembranes，2021，49(1)：130-145.

[11] 周健，谢鑫波，姜炯，等. 包裹式加筋土挡墙的变形特性及影响因素研究 [J]. 岩石力学与工程学报，2015，34(1)：148-154.
ZHOU Jian，XIE Xinbo，JIANG Jiong，et al. Deformation characteristics and influence factors of wrap reinforced retaining wall[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2015，34(1)：148-154.

[12] XU H L，CAI X G，WANG H Y，et al. Analysis of the working response mechanism of wrapped face reinforced soil retaining wall under strong vibration[J]. Sustainability，2022，14(15)：9741.

[13] MENG Y，XU C，YANG Y，et al. Seismic performance of reinforced soil slopes with gabions and geobags as slope facings in shaking table test[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering，2025，198：109645.

[14] 李思汉，蔡晓光，王学鹏，等. 不同面板型式加筋土挡墙振动响应数值分析 [J]. 地震工程学报，2024，46(1)：163-173.
LI Sihan，CAI Xiaoguang，WANG Xuepeng，et al. Numerical simulation of the vibration responses of reinforced soil-retaining walls with different facings[J]. China Earthquake Engineering Journal，2024，46(1)：163-173.

[15] 蔡晓光，徐洪路，王海云，等. 土工格栅加筋土挡墙水平地震系数研究 [J]. 岩土力学，2025，46(10)：3033-3044.
CAI Xiaoguang，XU Honglu，WANG Haiyun，et al. Horizontal seismic coefficient of geogrid reinforced soil retaining wall[J]. Rock and Soil Mechanics，2025，46(10)：3033-3044.

[16] 马滨，王丽艳，吉文炜，等. 强震下返包胎面加筋挡土墙结构抗震性能模型试验研究 [J]. 岩土力学，2025，46(9)：2792-2804.
MA Bin，WANG Liyan，JI Wenwei，et al. Experimental study of seismic performances of geogrid-wrapped tire-faced retaining soil walls under strong earthquakes[J]. Rock and Soil Mechanics，2025，46(9)：2792-2804.

[17] 蔡晓光，蔡博渊，李思汉，等. 台阶式加筋土挡墙地震行为演化特征对比分析 [J/OL]. 振动工程学报，1-17[2025-02-19]. https://kns.cnki.net/KCMS/detail/detail.aspx?filename=ZDGC20250218001&dbname=CJFD&dbcode=CJFQ.
CAI Xiaoguang，CAI Boyuan，LI Sihan，et al. Comparative analysis of seismic behavior evolution characteristics of tiered reinforced soil retaining walls[J/OL]. Journal of Vibration Engineering，1-17[2025-02-19]. https://kns.cnki.net/KCMS/detail/detail.aspx?filename=ZDGC20250218001&dbname=CJFD&dbcode=CJFQ.

[18] 蔡博渊，蔡晓光，李思汉，等. 基于振动台试验的加筋土挡墙台阶效应分析 [J]. 岩石力学与工程学报，2024，43(12)：3108-3120.
CAI Boyuan，CAI Xiaoguang，LI Sihan，et al. Analysis of tiers effect of geosynthetic-reinforced soil retaining walls based on shaking table tests[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2024，43(12)：3108-3120.

[19] IAI S. Similitude for shaking table tests on soil-structure-fluid model in 1*g* gravitational field[J]. Soils and Foundations，1989，29(1)：105-118.

[20] 国家铁路局. 铁路路基支挡结构设计规范：TB 10025—2019[S]. 北京：中国铁道出版社有限公司，2019.
National Railway Administration of the People's Republic of China. Code for design of retaining structures of railway earth works：TB 10025 —2019[S]. Beijing：China Railway Publishing House CO. LTD.，2019.

[21] YU Y，BATHURST R J，ALLEN T M. Numerical modelling of two full-scale reinforced soil wrapped-face walls[J]. Geotextiles and Geomembranes，2017，45(4)：237-249.

[22] NOMLENI I A，HUNG W Y，SOEGIANTO D P. Dynamic performance of root-reinforced slopes by centrifuge modeling tests[J]. Landslides，2023，20(6)：1187-1210.

第一作者：赵志成(2001—)，男，硕士。
E-mail：zhaozhicheng0211@163.com

通信作者：蔡晓光(1979—)，男，博士，教授。
E-mail：caixiaoguang123@163.com

阈值优化的自适应双向压缩变换及其在碰摩故障特征提取中的应用

贺 雅[1,2]，陈焱锜[1,2]，柯艺波[1,2]，尹剑飞[1,2]，温激鸿[1,2]

（1. 国防科技大学智能科学学院，湖南 长沙 410073；
2. 国防科技大学装备状态感知与敏捷保障全国重点实验室，湖南 长沙 410073）

摘要：旋转机械转静碰摩诱发的复合信号具有显著非平稳特性，现有单向高分辨率时频方法难以同步清晰表征谐波瞬时频率与脉冲群延迟的动态特性。针对这一问题，本文提出一种阈值优化的自适应双向压缩变换方法。通过分析瞬时频率与群延迟的相关性，明确了瞬时频率变化率（调频率）为关键影响因素，构建了基于能量扩散特性的调频率阈值，以实现分量属性精准区分与压缩策略适配选择。提出了基于局部最大准则的瞬时频率与群延迟自适应估计算子，显著提升了双向压缩对强调制分量的时频聚集能力。仿真与碰摩模拟试验验证表明，该方法在保持信号完美重构能力的同时，高分辨率同步表征碰摩复合非平稳信号中的强时变谐波与强频变脉冲分量。本文研究成果不仅能精准提取碰摩非线性振动特征以提升诊断精度，更为深入探究故障演化机理提供了可靠技术支撑。

关键词：转静碰摩故障；双向压缩变换；瞬时频率；群延迟；调频率阈值
中图分类号：TH17；TH133 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508038

Adaptive bi-directional maximal squeezing transform based on threshold optimization and its application in the feature extraction of rub-impact fault

HE Ya[1,2], CHEN Yanqi[1,2], KE Yibo[1,2], YIN Jianfei[1,2], WEN Jihong[1,2]

（1.College of Intelligence Science and Technology，National University of Defense Technology，Changsha 410073，China；2.National Key Laboratory of Equipment State Sensing and Smart Support，National University of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract: The composite signals induced by rotor-stator rub-impact in rotating machinery exhibit significant non-stationary features. Existing unidirectional time-frequency methods struggle to synchronously and clearly characterize the dynamic properties of the instantaneous frequency of harmonic modes and the group delay of impulsive modes. To address this issue，this paper proposes a threshold-optimized adaptive bidirectional squeezing transform method. By the correlation analysis between instantaneous frequency and group delay，the instantaneous frequency change rate (i.e.，chirp rate) is identified as a key factor. A chirp rate threshold based on energy diffusion characteristics is constructed to achieve accurate distinction of mode attributes and adaptive selection of squeezing strategies. Furthermore，an adaptive estimator of instantaneous frequency and group delay based on the local maximum criterion is proposed to enhance the time-frequency concentration of bidirectional squeezing for strongly modulated modes. Simulation and experiment analysis show that this method can synchronously characterize strongly time-varying harmonic modes and strongly frequency-varying impulsive modes with high resolution while maintaining the perfect signal reconstruction capability. The research results of this paper not only can accurately extract nonlinear vibration characteristics of the rub-impact fault to improve diagnostic accuracy，but also provide reliable technical support for in-depth exploration of the rub-impact fault evolution mechanism.

Keywords: rotor-stator rub-impact fault; bi-directional maximal squeezing transform; instantaneous frequency; group delay; chirp rate threshold

转静碰摩是离心压缩机、汽轮机、航空发动机等高速旋转机械最常见的故障模式之一，严重威胁机组的使用寿命与安全运行[1]。振动分析是捕捉早期故障特征、保障机组安全运行的关键技术之一，开展转静碰摩振动特征提取及诊断研究，对提升旋转机械运行可靠性具有重要意义[2]。然而，转静碰摩诱

收稿日期：2025-08-13；**修订日期：**2025-09-10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52305143）；中国科协青年人才托举工程资助项目（2024-2026QNRC001）；湖南省自然科学基金资助项目（2024JJ6463）

发的振动信号是复合非平稳信号——特指由多个分量叠加而成、且各分量具有迥异的时变与频变特性的复杂信号，其特征为同时包含瞬时频率呈周期性变化的谐波类分量，以及瞬时幅值呈周期性变化的脉冲类分量[1, 3-4]。由于其非平稳特性极为复杂，为满足转静碰摩故障特征提取的需求，迫切需要构建能清晰表征多分量幅-频调制特性的振动信号分析方法。

时频分析 (time-frequency analysis, TFA) 通过将一维信号映射到二维时频平面，为突破上述信号处理瓶颈提供了有效工具，在机械故障诊断中应用广泛[5]。然而传统时频分析方法，如短时傅里叶变换 (short-time Fourier transform, STFT)、小波变换 (wavelet transform, WT) 及维格纳-威利分布 (Wigner-Ville distribution, WVD)，难以对工程实际中的复杂信号生成高聚集的时频表示 (time-frequency representation, TFR)[6-7]，且在解耦邻近信号分量时，会因分量间的强耦合效应产生显著干扰项[1]，从而大幅增加故障漏诊风险。

为提升故障诊断的灵敏度、可靠性及准确性，研究人员致力于研发更精细的时频分析技术，重排 (reassignment method, RM)[8] 与同步压缩变换 (synchrosqueezing transform, SST)[9] 等后处理方法相继被提出：RM 通过在时频平面重分配能量提升分辨率，却无法实现时域信号重构；SST 虽保留信号重构能力，但因忽略时间方向的能量扩散，难以准确表征瞬时频率快速变化的强时变信号。为满足强时变信号的处理需求，研究人员针对 SST 提出多种改进技术：WANG 等[10] 开发匹配压缩变换，通过精准估计瞬时频率，可有效捕捉碰摩信号中的强调制特征；CAO 等[11] 提出迭代压缩变换，借助内外迭代精确提取信号中的调制分量；受高阶相位信息启发，BEHERA 等[12] 提出二阶压缩变换；PHAM 等[13] 进一步开发高阶压缩变换，常用于处理实际振动信号中存在的高阶多项式相位调制成分[14]；YU 等[15] 提出多次压缩变换及其快速算法以提升处理效率。然而，这些改进方法仍主要从频率方向聚集能量，且仅适用于处理基于时变模型的谐波类信号，如下式所示：

$$s(t)=\sum_{k=1}^{K}A_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k(t)} \tag{1}$$

式中，$A_k(t)$、$\varphi_k(t)$分别为瞬时振幅和瞬时相位；K 为信号所包含的分量个数。

然而，SST 系列方法对于因瞬时碰撞产生的脉冲成分处理效果有限[16]。转静碰摩引发的脉冲类信号持续时间短且具有宽带频率特性，有学者采用频变模型描述此类脉冲信号，如下式所示[17]：

$$s(\omega)=\sum_{k=1}^{K}A_k(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_k(\omega)} \tag{2}$$

式中，$A_k(\omega)$、$\phi_k(\omega)$分别表示瞬时振幅、瞬时相位。

针对此类脉冲类频变信号，HE 等[18] 提出基于 STFT 的时间压缩变换 (time-reassigned squeezing transform, TSST)，可对纯脉冲信号生成高分辨率时频表示。与 SST 原理不同的是，TSST 通过计算群延迟估计量而非瞬时频率估计量，其沿时间方向向群延迟轨迹聚集能量。TSST 不足之处在于其仅适用于群延迟变化率较小的弱频变信号，难以匹配转静碰摩信号强频变特征。为此，研究学者相继提出了基于 WT 变换和 S 变换的时间压缩变换[19-20]，多次时间压缩变换[21]、局部最大时间压缩变换[22] 等技术，以捕捉更复杂的频变特征。然而，受限于频域模型，TSST 系列方法对转静碰摩信号中并存的谐波类分量仍难以有效处理[23]。

综上可见，SST 和 TSST 系列方法均受限于单向能量压缩模型：SST 类方法受时域模型约束，无法准确刻画频变脉冲特征；TSST 类方法则受限于频域模型，难以有效表征时变谐波信号。然而，实际机械振动信号普遍兼具时变与频变特性，本文关注的转静碰摩诱发复合非平稳振动信号正属于此类信号。为此学者提出了双向时频分析策略——采用两种互补的单向时频分析方法协同处理复合非平稳信号：ZHANG 等[24] 提出双向后处理方案，在时间与频率双尺度下对时频点执行压缩变换；DONG 等[23] 提出时频多次压缩变换，通过窗函数的斜率边界构建了分量属性识别阈值，以区分谐波与瞬态分量并实施对应尺度的压缩变换；后续提出的同步瞬态提取变换，将瞬时频率与群延迟估计误差的相对大小定义为分量判别阈值[25]。上述方法虽显著提升了复合非平稳信号的时频聚集性，但碰摩振动信号非线性调制特征明显，且相邻谐波分量的交叉耦合易形成干扰项，导致上述方法阈值在处理实际碰摩信号时常出现误判，进而产生能量模糊、虚假项等不理想的时频结果。

时频分析的核心目标是实现信号在时频平面上的理想时频表征。从抑制能量扩散的角度而言，单向压缩变换，如 SST、TSST，仅能在单一时间或频率尺度上增强稀疏性。针对碰摩振动信号中谐波与脉冲分量共存的复杂特性，若选取能量发散更显著的尺度进行压缩，有望增强整体稀疏性，进而更精准地捕捉碰摩振动信号的多分量幅-频调制特征。本文提出了一种自适应双向压缩变换方法 (adaptive bi-directional maximal squeezing transform, Bi-MST)。该方法以瞬时频率变化率——调频率为核心，通过理论推导明确了其对谐波与脉冲分量初始时频能量扩散的影响，构建了基于能量扩散特性的分量识别准则，提出了基于局部最大准则的瞬时频率与群延迟自适

应估计算子，构建了面向多分量时变频变信号的双向压缩变换方法，解决了现有双向后处理方法难以兼顾高聚集性与表征准确性的问题。仿真与碰摩模拟试验验证表明，该方法在保持信号高重构能力的同时，可实现对碰摩复合非平稳振动信号中强时变谐波与强频变脉冲分量的高分辨率同步表征。

1　单向压缩变换

本节采用时变和频变信号模型阐述单向压缩变换的性能及局限性。

1.1　同步压缩变换（SST）

基于时变模型构建了一个谐波信号，其表达式为：

$$s(u)=A(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi(t)+\varphi'(t)(u-t)+\frac{\varphi''(t)}{2}(u-t)^2\right)} \tag{3}$$

式中，$A(u)$和$\varphi(t)$分别表示时域中信号的瞬时幅值和瞬时相位；$\varphi'(t)$和$\varphi''(t)$分别表示瞬时频率及其变化率，即调频率。以上均为重要的瞬时特征，可用来理解多分量信号的时变特征。

假设$\exists\varepsilon$足够小，且对于$\forall t$有$|A'(t)|\leqslant\varepsilon,|\varphi'''(t)|\leqslant\varepsilon$，则信号 (3) 可近似视为线性时变信号。瞬时频率为给定窗函数为高斯函数，$g(t)=\mathrm{e}^{-t^2/(2\sigma)}$，其中$\sigma$为控制窗宽的参数。

信号 (3) 的短时傅里叶变换 (STFT) 可推导如下：

$$\begin{aligned}V_{s_f}^{g}(t,\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}s(u)g(u-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(u-t)}\mathrm{d}u=\\&A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}\sqrt{\frac{2\sigma\pi}{1-\mathrm{i}\sigma\varphi''(t)}}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma(\omega-(\varphi'(t))^2)}{2(1-\mathrm{i}\sigma\varphi''(t))}}\end{aligned} \tag{4}$$

同步压缩变换 (SST) 公式如下：

$$F_{s_f}(t,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}V_{s_f}^{g}(t,\omega)\delta(\eta-\hat{\omega}(t,\omega))\mathrm{d}\omega \tag{5}$$

式中，δ表示狄拉克函数。对于任意一时频点(t,ω)，信号 (3) 的二维瞬时频率估计可根据下式计算得到：

$$\begin{aligned}\hat{\omega}(t,\omega)&=\Re\left\{\frac{\partial_t(V_{s_f}^{g}(t,\omega))}{\mathrm{i}(V_{s_f}^{g}(t,\omega))}\right\}=\\&\varphi'(t)+\frac{\sigma^2(\varphi''(t))^2}{1+\sigma^2(\varphi''(t))^2}(\omega-\varphi'(t))\end{aligned} \tag{6}$$

式中，∂_x为微分算子$\partial/\partial x$；$\Re\{\cdot\}$为复数的实部。

可以看出，当$|\varphi''(t)|\to 0$，信号 (3) 为弱时变信号，$\hat{\omega}(t,\omega)=\varphi'(t)$，即瞬时频率估计值可较好地近似于信号的真实频率。但若$|\varphi''(t)|$不可忽略，信号 (3) 则视为强时变信号，$\hat{\omega}(t,\omega)$将无法为其真实瞬时频率提供无偏估计量，SST 难以生成集中时频表示。

进一步地，当$|\varphi''(t)|$趋近于无穷大，$s(u)$将不再能被看作谐波类信号，而是脉冲类信号。对其按式 (6) 进行瞬时频率估计，可得到$\hat{\omega}(t,\omega)=\omega$，其 SST 结果如下：

$$\begin{cases}\hat{\omega}(t,\omega)=\omega\\F_{s_f}(t,\eta)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}V_{s_f}^{g}(t,\omega)\delta(\eta-\omega)\mathrm{d}\omega=V_{s_f}^{g}(t,\omega)\end{cases} \tag{7}$$

根据式 (7) 可知，脉冲类信号的 SST 结果与其 STFT 结果一致，也就是说，SST 难以提升脉冲类信号时频表示的分辨率。为解决这一问题，HE 等[18] 提出了基于频变模型的时间同步压缩变换 (TSST)，这将在下一小节中进行讨论。

1.2　时间同步压缩变换（TSST）

基于频变模型，构建了一个脉冲类信号以分析 TSST 的性能。首先同样做出假设，若$\exists\varepsilon$足够小，且对于$\forall\omega$有$|A'(\omega)|\leqslant\varepsilon,|\phi'''(\omega)|\leqslant\varepsilon$，根据二阶泰勒展开，信号表达式为：

$$\hat{s}(\xi)=A(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\phi(\omega)+\phi'(\omega)(\xi-\omega)+\frac{\phi''(\omega)(\xi-\omega)^2}{2}\right)} \tag{8}$$

式中，$A(\xi)$和$\phi(\omega)$表示频域中信号的瞬时幅值和瞬时相位；$-\phi'(\omega)$表示群延迟，$-\phi''(\omega)$表示群延迟变化率。

高斯函数的频域表达式为$\hat{g}(\omega)=\sqrt{2\sigma\pi}\mathrm{e}^{-\sigma\omega^2/2}$，则信号$\hat{s}(\xi)$的 STFT 结果推导如下：

$$\begin{aligned}V_{\hat{s}_i}^{\hat{g}}(t,\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{s}(\xi)\hat{g}(\xi-\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi-\omega)t}\mathrm{d}\xi=\\&A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-\mathrm{i}\phi''(\omega)}}\mathrm{e}^{-\frac{(t+(\phi'(\omega))^2)}{2(\sigma-\mathrm{i}\phi''(\omega))}}\end{aligned} \tag{9}$$

TSST 通过沿时间方向一维积分，将分散的时频能量向信号群延迟轨迹压缩，如下所示：

$$T_{s_i}(u,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}V_{\hat{s}_i}^{\hat{g}}(t,\omega)\delta(u-\hat{t}(t,\omega))\mathrm{d}t \tag{10}$$

其中，信号$\hat{s}(\xi)$的二维群延迟估计表达式如下：

$$\begin{aligned}\hat{t}(t,\omega)&=\Re\left\{\frac{\mathrm{i}\partial_\omega(V_{\hat{s}_i}^{\hat{g}}(t,\omega))}{V_{\hat{s}_i}^{\hat{g}}(t,\omega)}\right\}=\\&-\phi'(\omega)+\frac{(\phi''(\omega))^2}{\sigma^2+(\phi''(\omega))^2}(t+\phi'(\omega))\end{aligned} \tag{11}$$

当$|\phi''(\omega)|\to 0$，信号 (8) 被视为弱频变信号，$\hat{t}(t,\omega)=-\phi'(\omega)$，即$\hat{t}(t,\omega)$能够近似于信号真实群延迟，而当$|\phi''(\omega)|$较大时，信号 (8) 为强频变信号，$\hat{t}(t,\omega)$与其真实群延迟$-\phi'(\omega)$之间存在一个明显的误差项，TSST 结果不可避免地出现能量模糊现象。

当$|\phi''(\omega)|$趋近于无穷大，此时信号 (8) 将转变为谐波类信号，二维群延迟估计和 TSST 结果如下：

$$\begin{cases}\hat{t}(t,\omega)=t\\T_{s_i}(u,\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}V_{\hat{s}_i}^{\hat{g}}(t,\omega)\delta(u-\hat{t}(t,\omega))\mathrm{d}\omega=V_{\hat{s}_i}^{\hat{g}}(t,\omega)\end{cases} \tag{12}$$

可见，谐波类信号的 TSST 结果与其 STFT 结果一致，表明 TSST 难以突破频变模型的固有局限，并不适用于谐波类信号的处理。

1.3　SST 和 TSST 性能仿真分析

本小节进一步构建了两组仿真信号用于直观解

释 SST 和 TSST 的性能局限。其中，信号 $s_1(t)$为非线性时变信号，表达式如下所示：

$$s_1(t)=\sin(2\pi(40t-10t^2+2t^3)) \tag{13}$$

其中，信号采样时间为 5 s，采样频率为 200 Hz，其瞬时频率和调频率均随时间非线性变化。另一组为非线性频变信号 $\hat{s}_2(\omega)$，表达式如下：

$$\hat{s}_2(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(3.1\omega+(7/100)\omega^2-(1/3000)\omega^3)} \tag{14}$$

其中，信号时长定义为 [0, 10] s，采样频率为 200 Hz，其群延迟及其变化率同样随频率呈现非线性变化趋势。

图 1(a) 呈现了信号 $s_1(t)$ 的 STFT 结果，其时频能量主要沿瞬时频率脊线在频率方向上扩散，且调频率越大，能量的分散范围也就越广。图 1(b) 为 $s_1(t)$ 的理想时频表示 (ITFR)。图 1(c) 和 (d) 分别为该信号的 SST 和 TSST 结果。本部分同时引入任意熵来评估时频结果的能量聚集性，熵值越低，聚集性越高。对比可知，SST 能有效提升弱时变区域（蓝框标注部分）的时频聚集性，但随着调频率的增大，其时频结果逐渐变得模糊；与之相反的是，调频率越大（红框标注部分），TSST 结果具有更好的聚集性，却在弱时变区域呈现出模糊状态。这一现象表明，SST 能有效提升弱时变分量的时频聚集性，而 TSST 在这方面效果有限；不过，随着调频率增大，SST 对强时变分量的适用性也随之下降。同时可见，强时变分量本质上具有脉冲特性倾向，可考虑用频域模型表征。

图 2(a) 和 (b) 展示了信号 $\hat{s}_2(\omega)$的 STFT 和 ITFR 结果，可见频变信号的时频特征集中分布在群延迟脊线附近，STFT 结果中任意时频点的能量主要沿时间轴方向扩散。分别采用 SST 和 TSST 展开分析，结果依次如图 2(c) 和 (d) 所示，对于弱频变区域（蓝框所示），TSST 能够有效聚集时频能量，而对于强频变区域（红框所示），TSST 结果的熵值变得很高，图 2(d) 中的 SST 结果呈现出相反的效果。这一对比表明，TSST 更适用于处理弱频变分量，而对于强频变分量，其难以实现能量的高效聚集；相较之下，SST 在强频变分量上的表现反而优于 TSST。这意味着，强频变分量本质上具有谐波特性倾向，更适合通过 SST 方法实现聚集性表示。

2 阈值优化的自适应双向压缩变换

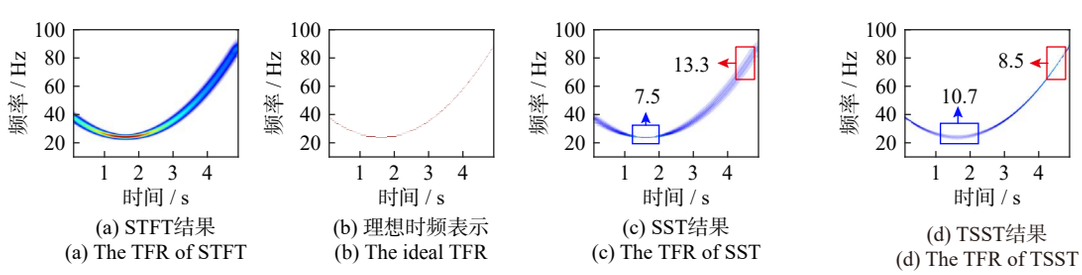
由 1.3 节分析可知，信号的瞬时频率、群延迟及其变化率是影响信号分量属性及变换方法选择的关键因素。本节在 SST 与 TSST 理论基础之上，通过构建一组线性调制信号，重点分析瞬时频率与群延迟的内在联系，并介绍所提出的自适应双向压缩变换方法，包括阈值优化、自适应压缩变换及信号重构过程。

2.1 瞬时频率和群延迟相关性分析

首先构建线性调制信号 $s_{tf}(t)$，如下式所示：

$$s_{tf}(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+bt+ct^2/2)} \tag{15}$$

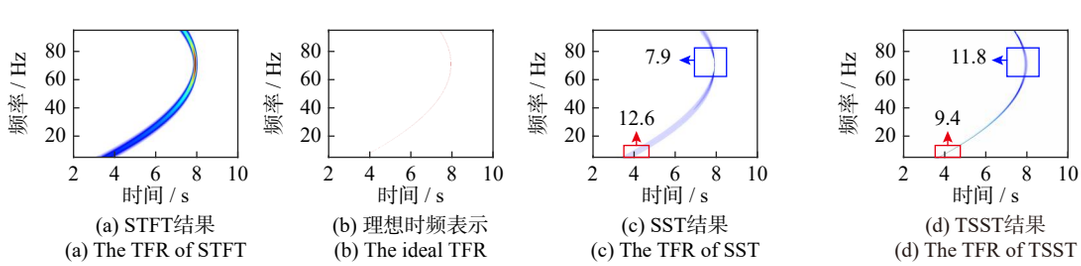
式 (15) 展示了信号的时域形式，其瞬时幅值和瞬时相位分别为 A 和 $a+bt+ct^2/2$，瞬时频率表达式为 $b+ct$，调频率即为 c，群延迟表达式为 $(\omega-b)/c$。接下来采用时变参数来表征其频变特性。窗函数同样为高斯函数，$g(t)=\mathrm{e}^{-t^2/(2\sigma)}$，下式为信号的傅里叶变换结果：



(a) STFT结果 (a) The TFR of STFT　(b) 理想时频表示 (b) The ideal TFR　(c) SST结果 (c) The TFR of SST　(d) TSST结果 (d) The TFR of TSST

图 1 $s_1(t)$ 信号的不同时频分析结果

Fig. 1 Various TFA results of signal $s_1(t)$



(a) STFT结果 (a) The TFR of STFT　(b) 理想时频表示 (b) The ideal TFR　(c) SST结果 (c) The TFR of SST　(d) TSST结果 (d) The TFR of TSST

图 2 $\hat{s}_2(\omega)$信号的不同时频分析结果

Fig. 2 Various TFA results of signal $\hat{s}_2(\omega)$

$$\hat{s}_{tf}(\omega)=A\sqrt{2\pi c^{-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(a+\frac{\pi}{4}-\frac{(\omega-b)^2}{2c}\right)} \tag{16}$$

将式 (15) 代入式 (4) 中, 可以得到其 STFT 结果:

$$V_{s_{tf}}^{g}(t,\omega)=A\sqrt{2\sigma\pi(1-\mathrm{i}\sigma c)^{-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(a+bt+\frac{ct^2}{2}\right)-\frac{\sigma(\omega-b-ct)^2}{2(1-\mathrm{i}\sigma c)}} \tag{17}$$

其 STFT 幅值为:

$$\tilde{V}_{s_{tf}}^{g}(t,\omega)=A\sqrt{2\sigma\pi(1+\sigma^2c^2)^{-1/2}}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma(\omega-b-ct)^2}{2(1+\sigma^2c^2)}} \tag{18}$$

可以看出, 式 (18) 会在其瞬时频率 $b+ct$ 脊线处达到最大值。进一步地, 将信号 STFT 用频域形式来表示:

$$V_{\hat{s}_{tf}}^{\hat{g}}(t,\omega)=A\sqrt{2\sigma\pi(\mathrm{i}+\sigma c)^{-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(a+\frac{\pi}{4}+\frac{b^2}{2c}\right)-\frac{\sigma\omega^2}{2}-\frac{(\mathrm{i}\sigma\omega c-ct-bc)^2}{2(\mathrm{i}c+\sigma c^2)}} \tag{19}$$

其幅值绝对值为:

$$\tilde{V}_{\hat{s}_{tf}}^{\hat{g}}(t,\omega)=A\sqrt{2\sigma\pi(1+\sigma^2c^2)^{-1/2}}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma(t-(\omega-b)/c)^2}{2(\sigma^2+c^{-2})}} \tag{20}$$

可见, 频域 STFT 幅值在其群延迟 $(\omega-b)/c$ 轨迹达到最大值, 能量沿时间方向向两侧扩散。根据式 (17) 和 (19), 瞬时频率和群延迟及其一阶导数的表达式如下:

$$\begin{cases}\varphi'(t)=b+ct,\varphi''(t)=c\\ -\phi'(\omega)=\dfrac{\omega-b}{c},-\phi''(\omega)=\dfrac{1}{c}\end{cases} \tag{21}$$

式中, 瞬时频率和群延迟的一阶导数互为倒数, 这意味着信号瞬时频率的变化率越小, 表明信号越倾向于弱时变特性, 其群延迟的变化率则相应增大, 这意味着信号同时也倾向于强频变特性, 反之亦然。可见, 信号瞬时频率的一阶导数, 即调频率, 是反映信号时变或频变特性的关键因素, 通过判断其相对大小能够识别信号时变特性或频变特性。

2.2　阈值优化的双向压缩变换

通过图 1(a) 和图 2(a) 可以发现, STFT 信号能量在时间和频率方向上的能量分布会随调频率的变化而变化。为了分析能量扩散与调频率之间的关系, 首先, 基于式 (18) 和 (20) 推导了 STFT 能量扩散频宽和时宽的表达式。设置幅值限 v_0, 通过下式可计算出频宽 $\omega_d(t,\omega)$[26]:

$$\mathrm{e}^{-\frac{\sigma(\omega-\varphi'(t))^2}{2(1+\sigma^2c^2)}}=v_0 \tag{22}$$

$$\omega_d(t,\omega)=\sqrt{\frac{2(1+\sigma^2c^2)}{\sigma}\ln\left(\frac{1}{v_0}\right)} \tag{23}$$

采样同样的方法, 可计算出时宽 $t_d(t,\omega)$:

$$\mathrm{e}^{-\frac{\sigma(t+\varphi'(\omega))^2}{2(\sigma^2+c^{-2})}}=v_0 \tag{24}$$

$$t_d(t,\omega)=\sqrt{2\frac{(c^{-2}+\sigma^2)}{\sigma}\ln\left(\frac{1}{v_0}\right)} \tag{25}$$

当信号为纯谐波信号, c=0 时, 其频宽即为窗函数频率宽度 $\Delta\omega$, 即

$$\Delta\omega=\sqrt{\frac{2}{\sigma}\ln\left(\frac{1}{v_0}\right)} \tag{26}$$

此时, 信号的时宽 $t_d(t,\omega)$远大于其频宽 $\omega_d(t,\omega)$, $\omega_d(t,\omega)$与 $t_d(t,\omega)$的比值趋近于 0, SST 适用于此类谐波信号的处理。

与之相反, 对于纯脉冲信号, 即调频率趋近于无穷大, STFT 的时频能量在时间维度上的扩散宽度是窗函数时间宽度 Δt, 即

$$\Delta t=\sqrt{\frac{1}{2\sigma}\ln\left(\frac{1}{v_0}\right)} \tag{27}$$

此时, STFT 时频能量的频宽 $\omega_d(t,\omega)$远大于其时宽 $t_d(t,\omega)$, 故 $\omega_d(t,\omega)$与 $t_d(t,\omega)$的比值趋于无穷大。脉冲信号更适合采用 TSST 进行分析。

随着调频率的增大, 信号呈现从谐波类向脉冲类的过渡特征: 频宽 $\omega_d(t,\omega)$从窗函数的频率宽度 $\Delta\omega$ 开始增大, 时宽 $t_d(t,\omega)$则减小至窗函数的时间宽度 Δt。这意味着, 随着调频率的增大, 信号从谐波逐渐转变为脉冲, $\omega_d(t,\omega)$与 $t_d(t,\omega)$的比值从 0 增大到无穷大, 适用于提升信号时频分辨率也相应地从 SST 过渡到 TSST。综上分析, 频宽 $\omega_d(t,\omega)$与时宽 $t_d(t,\omega)$的相对大小可作为指导时频压缩方法选择的重要依据。

本文旨在将窗函数频率宽度 $\Delta\omega$ 与时间宽度 Δt 的比值作为两类信号的划分界限。当满足下列方式时, 可推导出调频率阈值 c_0:

$$\frac{\omega_d(t,\omega)}{t_d(t,\omega)}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\Rightarrow|c_0|=\frac{1}{\sigma} \tag{28}$$

通过比较阈值 c_0 与信号调频率估计值 $\hat{c}(t,\omega)$, 可将 STFT 的时频空间划分为两部分, 如下式所示:

$$V_F(t,\omega)=\begin{cases}V_{s_f}^{g}(t,\omega),|\hat{c}(t,\omega)|\leqslant\sigma^{-1}\\ 0,\text{其他}\end{cases} \tag{29}$$

$$V_T(t,\omega)=\begin{cases}V_{s_f}^{g}(t,\omega),|\hat{c}(t,\omega)|>\sigma^{-1}\\ 0,\text{其他}\end{cases} \tag{30}$$

其中, $\hat{c}(t,\omega)$可通过下式计算[25]:

$$\hat{c}(t,\omega)=\begin{cases}\Re\left\{\dfrac{\partial_t\hat{\omega}(t,\omega)}{\partial_t\hat{t}(t,\omega)}\right\},\partial_t\hat{t}(t,\omega)\neq0\\ \inf,\partial_t\hat{t}(t,\omega)=0\end{cases} \tag{31}$$

因此, 阈值优化的双向压缩变换 (Bi-SST) 可用下式进行表示:

$$G_s(u,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}V_F(u,\omega)\delta(\eta-\hat{\omega}(u,\omega))\mathrm{d}\omega+\int_{-\infty}^{+\infty}V_T(t,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta t}\delta(u-\hat{t}(t,\eta))\mathrm{d}t \tag{32}$$

2.3　自适应双向压缩变换

如 2.2 节所述, 双向压缩变换 (Bi-SST) 主要包括调频率估计、分量属性识别及对应方向的压缩变换, 其基本原理如图 3 所示。

在图 3 中, 当窗内局部分量不能用弱时变信号或弱频变信号来近似描述时, $\hat{\omega}(t,\omega)$与 $\hat{t}(t,\omega)$无法

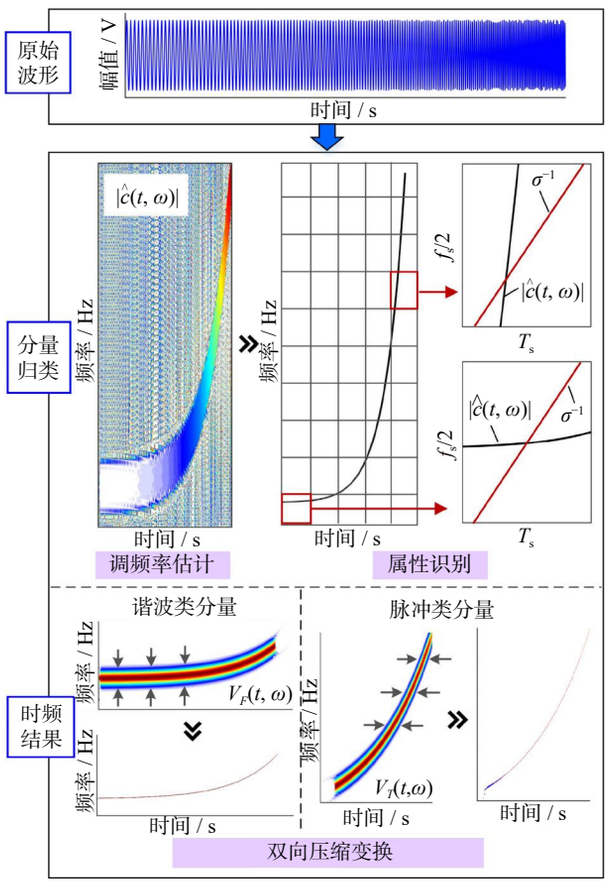


图 3 阈值优化的双向压缩变换策略

Fig. 3 The threshold-optimized bi-directional maximal squeezing transform strategy

准确定位瞬时频率和群延迟的脊线。此时，Bi-SST 难以取得理想的聚集效果。考虑到实际振动信号大多具有强时变或强频变特性，本节提出了基于局部最大准则的瞬时频率与群延迟自适应估计算子。

首先，由式 (18) 和 (20) 可知，信号 STFT 能量沿其瞬时频率脊线在$[\varphi'(t)-\omega_d(t,\omega),\varphi'(t)+\omega_d(t,\omega)]$范围内向两侧逐渐衰减。其中 STFT 振幅在时频点$(t,\varphi'(t))$处会达到最大值，如下式所示：

$$\tilde{V}^g_{s_f}(t,\omega)_{\max}=A\sqrt{\frac{2\sigma\pi}{(1+\sigma^2c^2)^{1/2}}},\omega=\varphi'(t) \tag{33}$$

基于式 (33)，构建了一种新的瞬时频率估计算子如下式所示：

$$\hat{\omega}_e(t,\omega)=\begin{cases}\arg\max\limits_{\omega}(\tilde{V}^g_{s_f}(t,\omega)),\\ \omega\in\left[\omega-\dfrac{\omega_d(t,\omega)}{2},\omega+\dfrac{\omega_d(t,\omega)}{2}\right];\\ \tilde{V}^g_{s_f}(t,\omega)\neq 0\\ 0;\ \text{其他}\end{cases} \tag{34}$$

假设任意两种模式具有足够的频率间隔，从而能够很好地分离。考虑到窗函数的傅里叶变换在时间零点达到最大值，即对于$t\in\mathbb{R}$，$\hat{g}(\omega)\leqslant\hat{g}(0)$。从而推导出：

$$\hat{\omega}_e(t,\omega)=\begin{cases}\varphi'(t),\\ \omega\in\left[\varphi'(t)-\dfrac{\omega_d(t,\omega)}{2},\varphi'(t)+\dfrac{\omega_d(t,\omega)}{2}\right];\\ \tilde{V}^g_{s_f}(t,\omega)\neq 0\\ 0;\ \text{其他}\end{cases} \tag{35}$$

如果在$[\varphi'(t)-\omega_d/2,\varphi'(t)+\omega_d/2]$的范围内搜索对应最大值的时频点，恰好是$(t,\varphi'(t))$。此时，$\hat{\omega}_e(t,\omega)$与信号的真实瞬时频率是一致的。与文献 [17] 相比，式 (34) 是根据初始能量扩散特性自适应调节搜索范围，可避免范围过小时能量的泄漏和重构准确性，同时防止范围过大可能造成相邻较近的各个分量之间的能量发生混叠，并且增加计算时间。

同样地，根据式 (18) 可见，频域 STFT 幅值会在时频点$(-\varphi'(\omega),\omega)$处达到其最大值，即

$$\tilde{V}^{\hat{g}}_{\hat{s}_f}(t,\omega)_{\max}=A\sqrt{\frac{2\sigma\pi}{(1+\sigma^2c^2)^{1/2}}},t=-\varphi'(\omega) \tag{36}$$

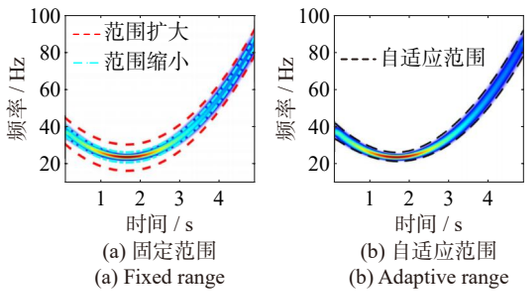
基于式 (36)，构建一种新的群延迟估计算子如下式所示：

$$\hat{t}_e(t,\omega)=\begin{cases}\arg\max\limits_{t}(\tilde{V}^{\hat{g}}_{\hat{s}_f}(t,\omega)),\\ t\in\left[t-\dfrac{t_d(t,\omega)}{2},t+\dfrac{t_d(t,\omega)}{2}\right];\\ \tilde{V}^{\hat{g}}_{\hat{s}_f}(t,\omega)\neq 0\\ 0;\ \text{其他}\end{cases} \tag{37}$$

当任意两种模式具有足够的时间间隔从而能够很好地分离时，对于$\omega\in\mathbb{R}$，$g(t)\leqslant g(0)$。可以推导出：

$$\hat{t}_e(t,\omega)=\begin{cases}-\varphi'(\omega),\\ t\in\left[-\varphi'(\omega)-\dfrac{t_d(t,\omega)}{2},-\varphi'(\omega)+\dfrac{t_d(t,\omega)}{2}\right];\\ \tilde{V}^{\hat{g}}_{\hat{s}_f}(t,\omega)\neq 0\\ 0;\ \text{其他}\end{cases} \tag{38}$$

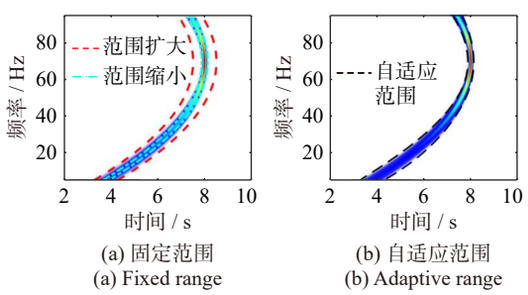
从式 (38) 可以看出，$\hat{t}_e(t,\omega)$将高度逼近信号的真实群延迟$-\varphi'(\omega)$。图 4 和 5 分别刻画了信号瞬时频率与群延迟的估计范围对分辨率提升的作用机制，所用信号表达式如式 (13) 和 (14) 所示。由图 4(a) 可知，对于强时变信号，不同调频率分量的能量扩散具有显著差异：固定的瞬时频率估计范围难以兼顾所有时频区域，缩小估计范围会忽略部分能量，而扩大估计范围则会增加计算耗时。图 4(b) 呈现了基于能量扩散的自适应估计范围，可有效平衡瞬时频率估计精度与计算效率。针对图 5(a) 和 (b) 中群延迟的估计范围，亦可得到类似结论。通过动态调整瞬时频率与群延迟的估计范围，能够在保证时频分辨率的前提下节约计算成本。



(a) 固定范围 (a) Fixed range　(b) 自适应范围 (b) Adaptive range

图 4　$s_1(t)$ 信号的瞬时频率估计

Fig. 4　The IF estimation of signal $s_1(t)$



(a) 固定范围 (a) Fixed range　(b) 自适应范围 (b) Adaptive range

图 5　$\hat{s}_2(\omega)$信号的群延迟估计

Fig. 5　The GD estimation of signal $\hat{s}_2(\omega)$

结合式 (32), 自适应双向压缩变换方法 (Bi-MST) 表达式可写为:

$$G_e(u,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}V_F(u,\omega)\delta(\eta-\hat{\omega}_e(u,\omega))\mathrm{d}\eta+\int_{-\infty}^{+\infty}V_T(t,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta t}\delta(u-\hat{t}_e(t,\eta))\mathrm{d}u \tag{39}$$

2.4　Bi-MST 算法实现和信号重构

本文提出基于阈值优化的自适应双向压缩变换方法 (Bi-MST), 能够有效实现对碰摩诱发复合非平稳信号的同步精准表征, 其有效性具体体现在: (1) 基于初始时频表示的能量扩散差异构建调频率阈值, 从而提升时频表示的全局聚集性; (2) 针对实际振动信号的强时变或强频变特性, 通过引入自适应搜索算法构建瞬时频率和群延迟估计算子, 显著提高时频表示的准确性。假设信号 $s(t)\in\mathbb{R}^N$ 为碰摩振动信号, Bi-MST 实现时频表征和分量重构的步骤如下:

步骤 1: 信号调频率估计。针对碰摩诱发的振动信号 $s(t)$, 首先采用式 (4) 和 (19) 分别计算时域和频域的 STFT 结果, 可表示为 $V^g(t,\omega)$和 $V^g(t,\omega)$。并利用式 (31) 估计信号 $s(t)$ 的调频率 $\hat{c}(t,\omega)$。

步骤 2: 基于优化阈值的分量识别。在本文中, 设定式 (31) 分母不能小于 m_0, 以约束调频率范围, 避免将相近谐波产生的干扰项识别为信号瞬态分量。如图 3 所示, 根据式 (29) 和 (30), 将信号 $s(t)$ 的 STFT 结果 $V^g(t,\omega)$分为两部分, 谐波类区域 $V_F(t,\omega)$和脉冲类区域 $V_T(t,\omega)$, 公式如下:

$$V_F(t,\omega)=\begin{cases}V^g_{s_f}(t,\omega),|\hat{c}(t,\omega)|\leqslant\sigma^{-1}\\0,\text{其他}\end{cases} \tag{40}$$

$$V_T(t,\omega)=\begin{cases}V^g_{s_f}(t,\omega),\sigma^{-1}<|\hat{c}(t,\omega)|<c_m\\0,\text{其他}\end{cases} \tag{41}$$

步骤 3: 自适应双向压缩变换。基于 $V^g(t,\omega)$, 依据式 (34) 和 (36) 得到精确的瞬时频率估计 $\hat{\omega}_e(t,\omega)$和群延迟估计 $\hat{t}_e(t,\omega)$, 然后分别对 $V_F(t,\omega)$和 $V_T(t,\omega)$进行能量重排后叠加, 可得到高聚集性时频表示 $G_e(t,\omega)$, 公式如下:

$$\begin{cases}G_{eF}(u,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}V_F(t,\omega)\delta(\eta-\hat{\omega}_e(t,\omega))\\G_{eT}(u,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}V_T(t,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta t}\delta(u-\hat{t}_e(t,\eta))\\G_e(u,\eta)=G_{eF}(u,\eta)+G_{eT}(u,\eta)\end{cases} \tag{42}$$

步骤 4: 谐波类分量和脉冲类分量重构。Bi-MST 对每个时频点仅在一个方向进行能量压缩, 因此同样具有重构性能。谐波类分量 $s_1(u)$ 和脉冲类分量 $s_2(u)$ 的时域波形可通过下式进行重构:

$$s_1(u)=\frac{1}{2\pi g(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}G_{eF}(u,\eta)\mathrm{d}\eta \tag{43}$$

$$\begin{cases}s_2(\eta)=\frac{1}{\hat{g}(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}G_{eT}(u,\eta)\mathrm{d}u\\s_2(u)=\frac{1}{2\pi\hat{g}(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G_{eT}(u,\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta u}\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta\end{cases} \tag{44}$$

3　数值仿真

3.1　强调制信号仿真分析

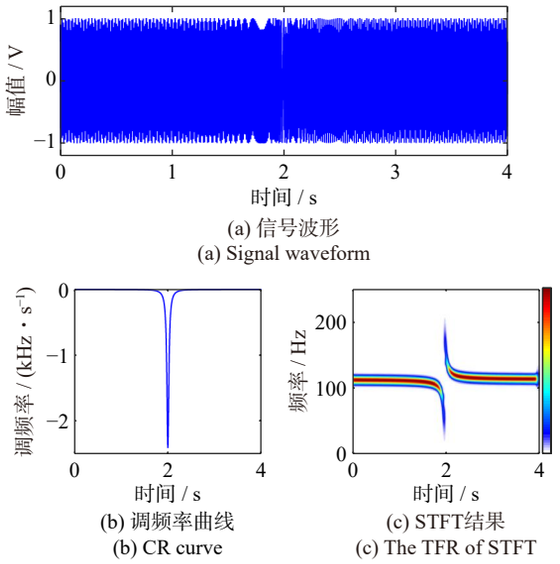
本小节以同时包含时变和频变特征的强调制信号为例, 初步验证所提方法的有效性。信号表达式如下式所示:

$$\begin{cases}s(t')=\cos(2\pi(60t'\cdot\operatorname{arccot}(40t')+\\\quad 0.75\ln(1+1600(t')^2)+110t'))\\s(t)=s(t'+2),\ t\in[0,1]\,s\end{cases} \tag{45}$$

其中, 信号时长为 4 s, 采样频率为 512 Hz。信号波形、调频率曲线及 STFT 结果如图 6 所示, 信号主要由弱时变谐波、强时变谐波和弱频变脉冲成分组成。

图 7(a) 为本文所提方法 Bi-MST 的时频表示, 图 7(b) 分别展示了时频重排 (RM)[7]、二阶多次压缩变换 (2nd MSST)[26]、时频多次压缩变换 (TFMST)[22]、自适应同步压缩变换 (ASST)[27]、自适应同步提取变换 (ASET)[28] 和自适应双向压缩变换 (Bi-MST) 时频结果的细化图。具体来看, RM 的整体聚集性较好, 但存在一定的脊线偏差, 且不具备信号重构能力; 与 RM 相比, 2nd MSST、ASST 和 ASET 难以准确刻画脉冲类特征; TFMST 则对调频率突变区域即强时变分量聚集性表征不足; 对于该组信号, 所提 Bi-MST 结果更接近理想时频表示, 同时具有最优的能量聚集性。

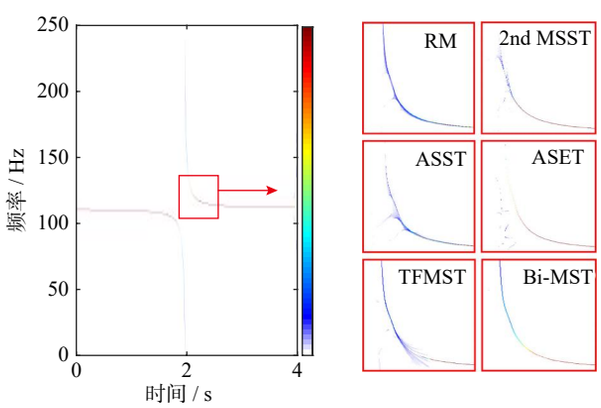
其次, 统计了上述方法的耗时以评估其计算效率, 同时为对比各方法的综合性能, 采用任意熵衡量时频结果的能量聚集性。试验所用计算机系统配置为: 英特尔酷睿 i7-8650U 处理器 (8 核 CPU, 主频 1.90 GHz,



(a) 信号波形 (a) Signal waveform
(b) 调频率曲线 (b) CR curve
(c) STFT结果 (c) The TFR of STFT

图 6 强频变仿真信号

Fig. 6 Strongly modulation simulation signal



(a) Bi-MST结果 (a)The TFR of Bi-MST
(b) 时频细化图 (b) Detailed TFRs

图 7 多种方法的时频表示

Fig. 7 The TFRs by several TFA methods

最高可达 2.11 GHz), 32.0 GB 内存, 软件为 MATLAB R2024b。表 1 展示了不同方法的任意熵值和计算时间, 其中, Bi-MST 结果的任意熵值最低, 这进一步证明了该方法能生成聚集性最高的时频表示。从计算耗时来看, RM 以 0.5 s 的耗时显著领先, 因其算法结构简单, 无需复杂迭代或冗余计算; 2nd MSST 耗时最长, 主要与其高阶变换有关; ASST 和 ASET 需根据信号瞬时频率特性动态寻找适配窗函数, 涉及局部特征参数优化故计算较慢; 而 Bi-MST的计算时间相对较短, 结合其优异的能量聚集性, 可见其综合效率最优。

为进一步验证方法性能, 将其应用于信噪比范围为 1~30 dB 的含噪信号中, 评估短时傅里叶变换 (STFT)、时间压缩变换 (TSST)[18]、局部最大压缩变换 (LMSST)[17]、同步瞬态提取变换 (STET)[24] 等经典方法与 Bi-MST 的噪声鲁棒性。图 8 呈现了不同时频表示的任意熵值随噪声水平的变化趋势: 噪声强

表 1 不同时频分析方法的计算耗时

Tab. 1 Cost time of different TFA methods

TFA方法	任意熵值/dB	时间/s
RM	12.6	0.5
2nd MSST	12.0	6.9
ASST	12.2	5.4
ASET	11.9	4.8
Bi-MST	11.6	3.7

度增加会导致时频聚集性显著下降。其中, STFT 结果的熵值在全信噪比范围内始终处于高位, 说明其时频域能量分布高度分散; TSST 结果的熵值不仅显著低于 STFT, 且在不同信噪比下保持相对稳定, 说明其时频聚集性受噪声水平波动的影响较弱; 随着信噪比上升, STET 的熵值呈快速下降趋势, 使得高信噪比条件下其与 TSST 的聚集性差异逐步缩小。Bi-MST 在各噪声水平下均保持最低的熵值, 充分证明了其具备优异的抗噪能力。

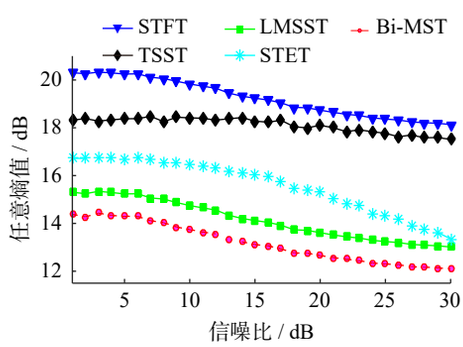


图 8 任意熵值随噪声水平的变化趋势

Fig. 8 The variation trend of any entropy values with respect to noise levels

3.2 碰摩振动信号仿真分析

本小节将进一步验证所提方法在碰摩故障仿真信号分析中的有效性, 信号表达式如下式所示, 信号主要包含谐波调频分量 $x_r(t)$、周期性脉冲分量 $x_b(t)$ 和信噪比为 15 dB 的高斯白噪声 $n(t)$:

$$\begin{cases} x = x_r(t) + x_b(t) + n(t) \\ x_r(t) = 0.5\cos(2\pi \cdot 600t + \cos(2\pi \cdot 136t)) \\ x_b(t) = A\sum_j \mathrm{e}^{-B(t-T_j)}\cos(2\pi \cdot 1900(t-T_j)) \\ A = 0.5\cos(2\pi \cdot 17t + \pi/6) + 1 \end{cases} \tag{46}$$

式中, $x_r(t)$表示强时变谐波分量; $x_b(t)$表示单边衰减型周期脉冲分量, 具有强频变特性; B 为衰减系数; $T_j=T_0+j/f_0$, $T_0=0$, $f_0=102$ Hz。图 9 为该仿真信号的时域波形, 信号采样频率为 102.4 kHz, 采样时长为 0.88 s。

图 10 展示了谐波分量和脉冲分量的 STFT 结果。从图 10 可见, 该仿真信号受到明显噪声污染。本文分别采用三种双向后处理方法, 即 RM、TFMST

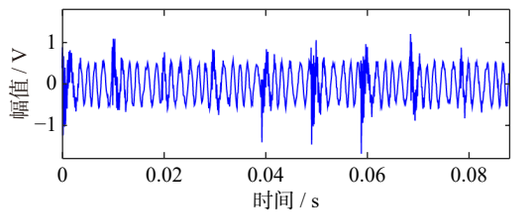


图 9　碰摩振动仿真信号

Fig. 9　Rotor rub-impact vibration simulation signal

及所提 Bi-MST 方法，对信号进行时频表征，如图 11~13 所示。分析表明：受噪声干扰影响，RM 与 TFMST 的时频聚集性较差，并且在谐波波峰与波谷处，两者的能量分布均出现严重畸变。可见，在 TFMST 时频图中，该分量在波峰与波谷处因能量向垂直方向发散，被误判为瞬态分量，进而沿时间方向被压缩。而 $x_b(t)$分量的强频变区域因能量横向发散，会被误判为谐波分量，沿频率方向被压缩，这使得 TFMST 结果中出现了虚假分量。如图 13 所示。对于该组碰摩振动仿真信号，优化后的调频率阈值能够准确辨识谐波与瞬态分量，通过自适应压缩变换进而获得

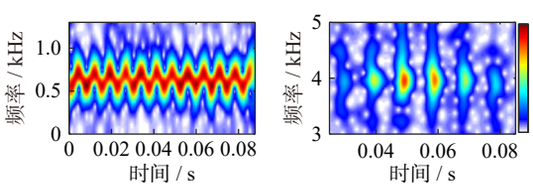


图 10　$x_r(t)$和$x_b(t)$分量的 STFT 结果

Fig. 10　The STFT results of $x_r(t)$and$x_b(t)$

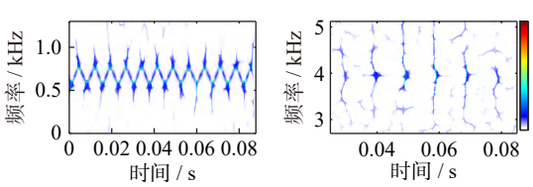


图 11　$x_r(t)$和$x_b(t)$分量的 RM 结果

Fig. 11　The RM results of $x_r(t)$and$x_b(t)$

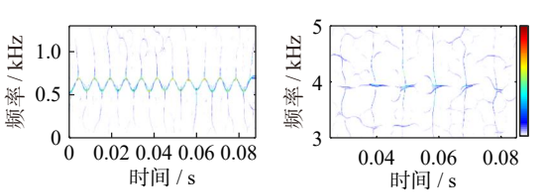


图 12　$x_r(t)$和$x_b(t)$分量的 TFMST 结果

Fig. 12　The TFMST results of $x_r(t)$and $x_b(t)$

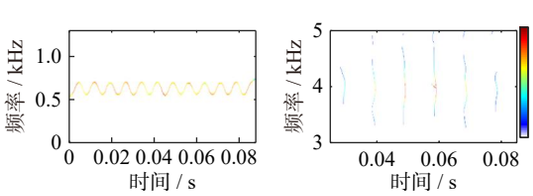


图 13　$x_r(t)$和$x_b(t)$分量的 Bi-MST 结果

Fig. 13　The Bi-MST results of $x_r(t)$and $x_b(t)$

了高分辨率时频表示，Bi-MST 表现出了最佳的时频聚集性与噪声鲁棒性。

为了定量对比方法性能，本文分别从 SST、ASST、ASET、TFMST、STET 和 Bi-MST 等方法结果中估计分量$x_r(t)$的瞬时频率，并计算真实瞬时频率与估计瞬时频率之间的相对误差均值 (MRE)，以评估不同方法的瞬时频率估计精度，表达式如下：

$$MRE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{IF_{ti}-IF_{ei}}{IF_{ti}}\right| \tag{47}$$

式中，IF_t为分量$x_r(t)$的真实瞬时频率；IF_e表示估计瞬时频率；N为采样点数。表 2 展示了不同时频结果的相对误差值，相对误差越小说明对瞬时频率的估计越接近真实值。数据显示，Bi-MST 的误差值最小，远低于其他方法。其中，SST 的误差最大，表明其在瞬时频率跟踪方面性能较弱。可见 Bi-MST 能更精准地提取信号的瞬时频率信息，在兼顾能量聚集性与频率估计精度方面性能更突出。

表 2　不同时频结果的瞬时频率估计误差

Tab. 2　IF estimation errors of different TFR results

TFR方法	MRE值
SST	0.64
ASST	0.041
ASET	0.055
TFMST	0.0055
STET	0.037
Bi-MST	0.0026

为验证 Bi-MST 的重构性能，从图 13 中分别提取谐波分量波形和脉冲分量特征，结果如图 14 所示。图 14(a) 为$x_r(t)$分量的瞬时频率脊线，基于该脊线重构的波形与原始波形高度吻合，见图 14(b)~(c)。考虑到脉冲分量的宽频带属性，其时频分布中通常存在一个幅值最显著的频率点，该频率点可有效表征脉冲间隔。计算时频表示中各频率所对应的频谱幅值的最大值，公式如下：

$$FP(\omega) = \max\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(|G_e(t,\omega)| - \beta(\omega))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right| \tag{48}$$

式中，$\beta(\omega)$表示在脉冲分量对应的频段范围内，频率ω对应的 Bi-MST 结果在时间上的均值。Bi-MST 结果中具有最显著脉冲特征的频率点，因此具有最大 FP 值频率下的时频点即可表示脉冲类故障特征：

$$Im(t) = G_e(t, \operatorname{argmax}_{\omega} FP(\omega)) \tag{49}$$

根据上式计算得到的$x_b(t)$分量的脉冲特征如图 14(d) 所示，故障特征非常显著。上述结果表明：Bi-MST 能有效分析碰摩振动信号，还可成功重构分量波形并提取振动特征。

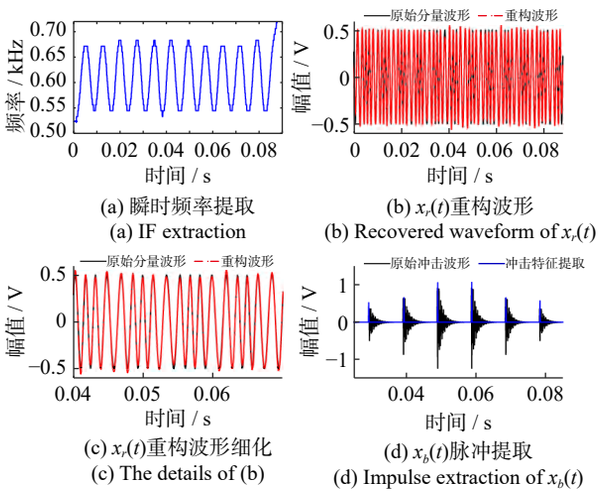


图 14 信号重构和特征提取

Fig. 14 Signal reconstruction and feature extraction

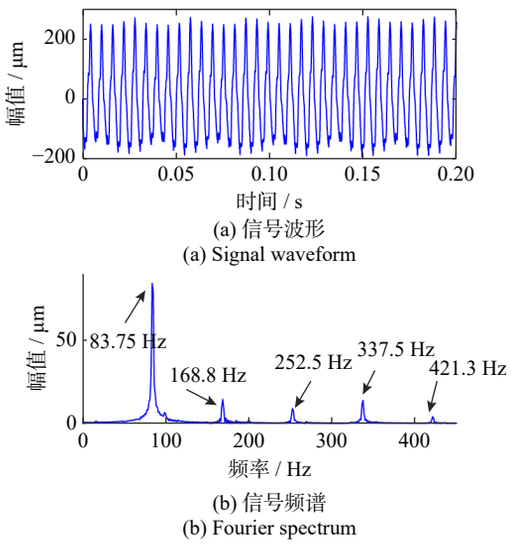


图 16 单点碰摩振动信号

Fig. 16 Single-point rub-impact vibration signal

4 试验验证

本节通过两组碰摩故障试验信号，验证所提 Bi-MST 方法在复合非平稳振动信号的时频表示与特征提取方面的能力。

4.1 单点碰摩故障振动分析

首先，对转子试验台的单点碰摩故障信号展开分析，试验装置如图 15 所示。试验过程中，通过调节碰摩杆与转盘间的间隙以模拟单点碰摩故障[4]。此外，采用电涡流位移传感器采集转子振动信号。试验设定转子转速为 5057 r/min，采样频率为 2560 Hz。

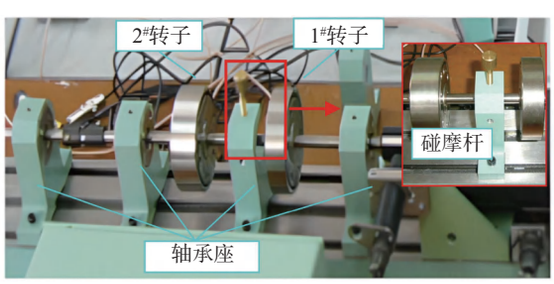


图 15 单点碰摩故障模拟试验台

Fig. 15 The test rig for single-point rub-impact fault simulation

图 16 给出了振动信号的时域波形及其频谱特征，其中转频成分占据主导，而 2 倍频、3 倍频、4 倍频及 5 倍频等高次谐波的幅值则相对较弱。仅凭信号波形和频谱特征难以准确判定是否存在碰摩故障。

图 17 展示了该振动信号的 STFT 时频谱及多种时频后处理结果，包括 RM、2nd MSST、STET。受海森堡不确定性原理制约，STFT 结果的时频分布模糊，且存在显著的能量扩散现象，尽管能观察到转频分量具有频率调制特征，但其他分量的时频特征难以辨识。对 STFT 初始时频表示进行重排后可得 RM 结果，如图 17(b) 所示，该方法显著提升了时频分辨率，使频带内的谐波及脉冲成分得以初步识别，但其聚集性仍有提升空间。作为 MSST 的高阶拓展形式，2nd MSST 能更清晰表征强时变信号，如图 17(c) 所示，该方法能辨识出频带内两类谐波分量的瞬时频率，但其对脉冲成分的表征效果欠佳。相比之下，STET 作为一种先进的双向后处理方法，在谐波与脉冲成分的时频表征方面均取得了较理想的效果，如图 17(d)，然而二者相邻分量间存在显著交叉干扰，会影响分量分离和重构精度。

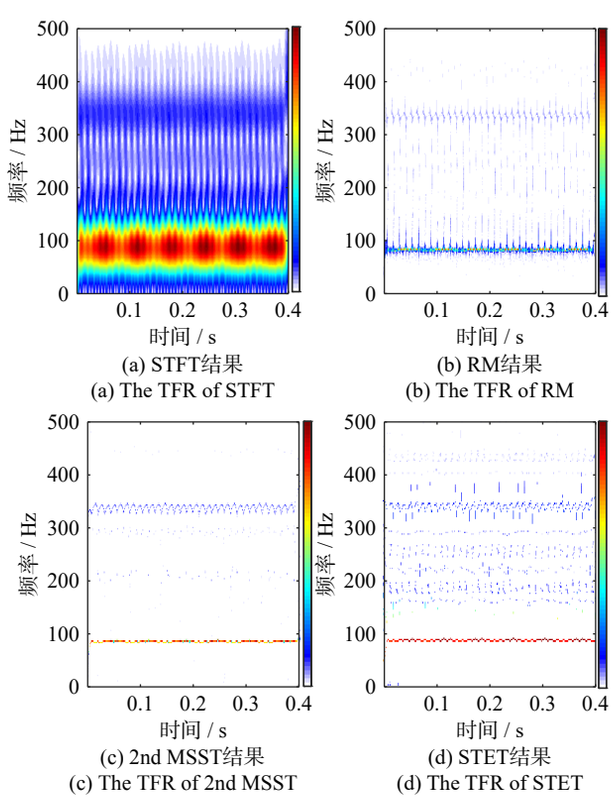


图 17 单点碰摩信号的多种时频表示

Fig. 17 Various TFRs of single-point rub-impact signal

如图 18 所示，所提出的 Bi-MST 能清晰分辨频带内谐波与脉冲类分量的调制特征，有效避免了相邻分量之间的干扰项，实现对复合非平稳信号的同步时频表示。在图 18 中，转频与 4 倍频分量呈现快速振荡谐波特性，[120, 300] Hz 和 [400, 450] Hz 频段范围内存在周期性脉冲特征。以 4 倍频分量为例，从 Bi-MST 时频图中提取其瞬时频率脊线，见图 19，其频谱中转频分量突出，表明转子每旋转一周与碰摩杆发生一次碰撞。针对 [120, 300] Hz 频段内的脉冲信号，重构其时域波形并得到包络谱，如图 20 所示，调制频率与转频分量高度吻合，可见 Bi-MST 方法精准表征了碰摩故障信号的动态调制特性。

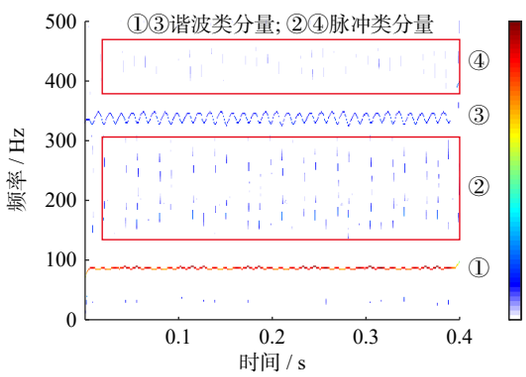


图 18　单点碰摩信号的 Bi-MST 时频表征

Fig. 18　The Bi-MST result of single-point rub-impact signal

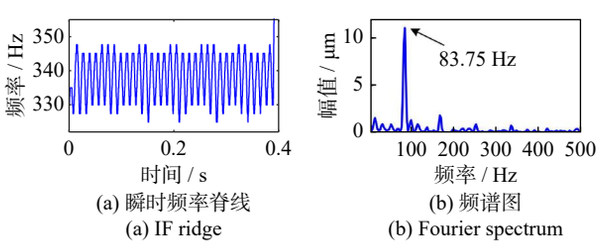


图 19　4 倍频谐波成分

Fig. 19　The quadruple frequency harmonic component

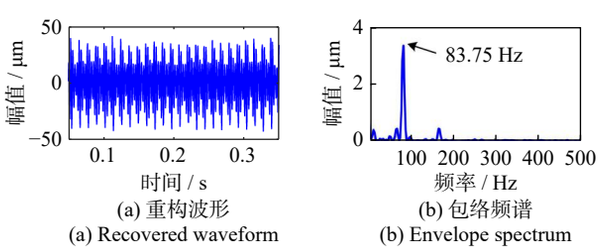


图 20　[120, 300] Hz 频段脉冲成分

Fig. 20　The impulsive mode for interval [120, 300] Hz

4.2　多点碰摩故障振动分析

本小节进一步分析转子试验台的多点碰摩故障振动信号，如图 21 所示。在正常状态下，三组碰摩螺栓均保持松开状态，确保旋转部件正常运行。试验中通过锁紧 1~3 组螺栓调节静子限位环与旋转部件

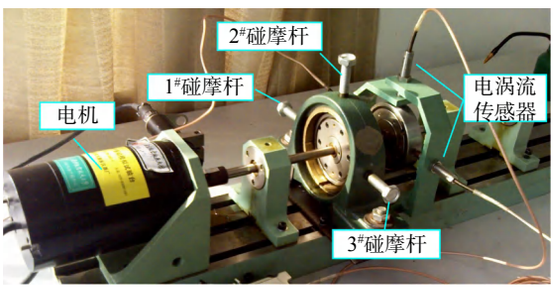


图 21　多点碰摩故障模拟试验台

Fig. 21　The test rig for multi-point rub-impact fault simulation

间的间隙，分别模拟一点、两点及三点碰摩故障[4]。本节所述多点碰摩故障，指转子每旋转一周发生两次碰摩。

在本试验中，仍采用电涡流位移传感器采集转子振动信号，转子转速为 5100 r/min，采样频率为 2000 Hz。图 22 给出了信号的时域波形及其频谱特征。与图 16 的频谱分布不同，图 22 中除转频及其整数倍频外，1/2 倍频成分占据主导地位，同时存在 3/2、5/2 倍分数倍频成分。

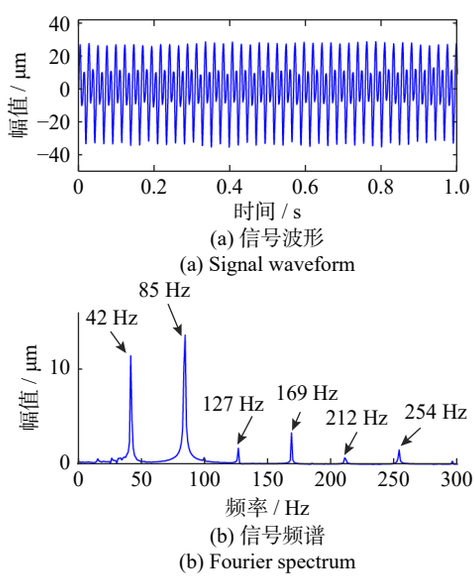


图 22　多点碰摩振动信号

Fig. 22　Multi-point rub-impact vibration signal

本节选取 STFT、SST、STET 及 TFMST 四种分析方法，对多点碰摩振动信号进行时频表征。由图 23(a) 可见，STFT 的时频能量分散严重，难以区分各信号成分，并且 1/2 倍频与 1 倍频分量间距过近，产生明显的交叉干扰。对 STFT 时频谱进行单一方向重排可得到 SST 结果，如图 23(b) 所示。其中，SST 对 1/2 倍频、1 倍频、2 倍频及 3 倍频谐波分量的能量聚集效果显著提升，但未能识别脉冲分量，表明其难以有效表征频变分量的时频特征。相较于前述方法，STET 和 TFMST 能更清晰地表征快速变化的瞬时频率特征，以及频变脉冲特征，但两种方法均将 1/2 倍频与转频之间的交叉干扰误判为脉冲成分。

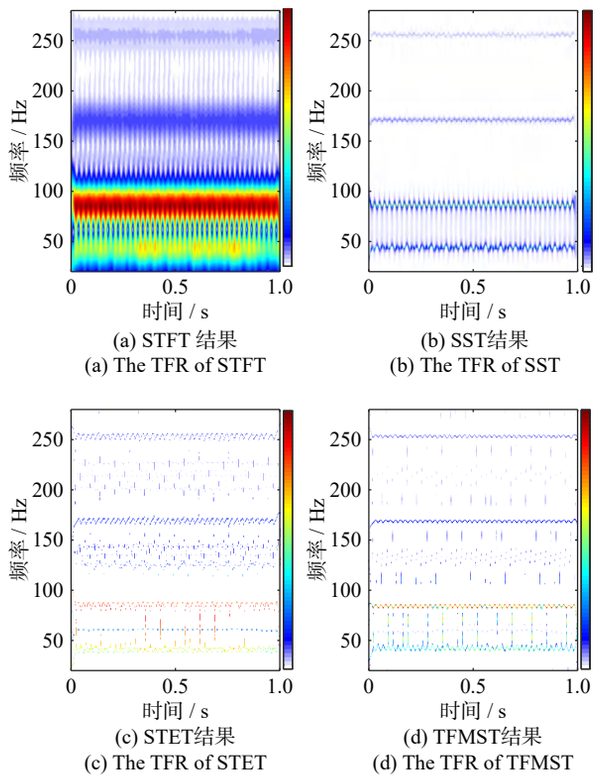


图 23 多点碰摩信号的多种时频表示

Fig. 23 Various TFRs of multi-point rub-impact signal

如图 24 所示，所提 Bi-MST 方法同样展现出对复合非平稳信号的优异表征能力，并且该方法能有效规避虚假模态分量，同步清晰刻画频段内的谐波类与脉冲类分量。其中，转频、1/2 倍频、2 倍频、3 倍频为快速振荡的谐波分量，3/2 倍频、5/2 倍频附近则出现周期性脉冲分量。为进一步挖掘动态信息，从 Bi-MST 时频分布图中提取 1/2 倍频与转频分量的瞬时频率轨迹，如图 25 和 26 所示，其中 1/2 倍频在频谱中占据主导，对应转子每旋转一周与碰摩杆碰撞两次的故障模式。此外，图 27 展示了 [110, 150] Hz 频段内脉冲分量的重构波形和包络频谱，其中调制频率与 1/2 倍频高度吻合。可见，所提方法可精准提取碰摩故障特征，充分体现了 Bi-MST 在不同碰摩场景下的稳定性优势。

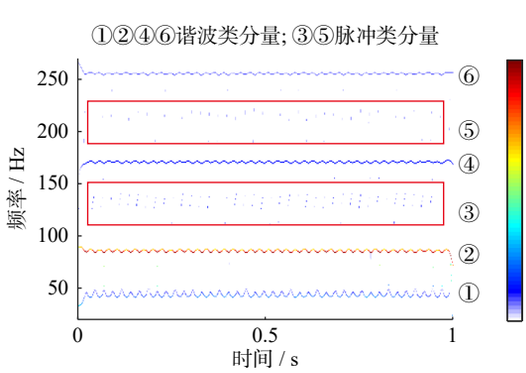


图 24 多点碰摩信号的 Bi-MST 时频表征

Fig. 24 The Bi-MST result of multi-point rub-impact signal

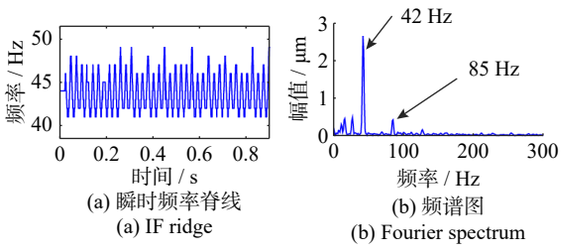


图 25 1/2 倍谐波成分

Fig. 25 The 1/2 harmonic component

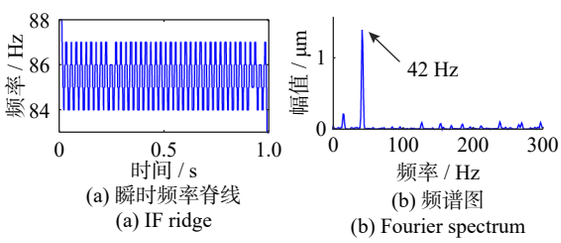


图 26 转频谐波成分

Fig. 26 The rotational frequency harmonic component

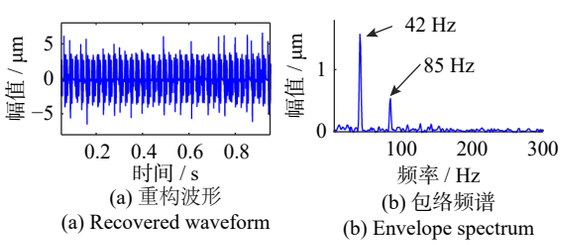


图 27 [110, 150] Hz 频段脉冲分量

Fig. 27 The impulsive mode for frequency interval [110, 150] Hz

结合 4.1 节碰摩振动分析结果，可总结转静碰摩故障诊断的时频特征如下：

(1)各谐波分量的瞬时频率呈周期性波动特性，表现出显著的频率调制特征；

(2)转子与静子部件发生碰撞时，会激发出具有调幅特性的周期性脉冲分量；

(3)谐波分量的瞬时频率波动频率与脉冲信号的调制频率具有一致性，且二者均与转频及其倍频存在明确关联，其具体关联形式取决于碰摩类型与严重程度。

综上可见，Bi-MST 方法能够精准捕捉并刻画碰摩故障信号蕴含的动态调制特性，为深入探究碰摩故障演化机制与定量诊断提供了有效技术支撑。

5 结 论

本文从单向压缩变换理论出发，提出自适应双向压缩变换方法，可实现复合非平稳信号的高分辨率时频表示。通过仿真与转静碰摩试验，对比分析所提方法的时频聚集性和抗噪性能，验证了其优越性，主要结论如下：

（1）提出了基于能量扩散特性的调频率阈值与分量属性识别准则。优化的调频率阈值可精准辨识谐波与瞬态分量，有效规避虚假时频项，保障了时频表示的准确性。

（2）提出基于局部最大准则的瞬时频率与群延迟自适应估计算子，构建起自适应双向压缩变换方法。该方法显著提升了强调制信号的时频聚集性，同时确保了低信噪比条件下的分析有效性。

（3）仿真与试验分析证明，Bi-MST 方法不仅对碰摩故障信号中谐波-脉冲调制特征具有适应性表征能力，在区分碰摩强度、碰撞频次等细节差异上也展现出高分辨率优势，在机械故障诊断领域具有广阔应用前景。

参考文献：

[1] WANG S B，CHENG C Y，ZHOU J H，et al. Reassignment-enable reweighted sparse time-frequency analysis for sparsity-assisted aeroengine rub-impact fault diagnosis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，183：109602.

[2] 赵一楠，剡昌锋，孟佳东，等. 自适应窗口旋转优化短时傅里叶变换的变转速滚动轴承故障诊断 [J]. 振动工程学报，2024，37(6)：1064-1076.
ZHAO Yinan，YAN Changfeng，MENG Jiadong，et al. Fault diagnosis of rolling bearings under variable speed conditions based on adaptive window rotation optimization short-time Fourier transform[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(6)：1064-1076.

[3] ZHOU P，CHEN S Q，HE Q B，et al. Rotating machinery fault-induced vibration signal modulation effects：a review with mechanisms，extraction methods and applications for diagnosis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，200：110489.

[4] YU K，MA H，HAN H Z，et al. Second order multi-synchrosqueezing transform for rub-impact detection of rotor systems[J]. Mechanism and Machine Theory，2019，140：321-349.

[5] MOCA V V，BÂRZAN H，NAGY-DĂBÂCAN A，et al. Time-frequency super-resolution with superlets[J]. Nature Communications，2021，12(1)：337.

[6] YAN R Q，SHANG Z G，XU H，et al. Wavelet transform for rotary machine fault diagnosis：10 years revisited[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，200：110545.

[7] LI D Y，UKIL A，SATPATHI K，et al. Hilbert-Huang transform based transient analysis in voltage source converter interfaced direct current system[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2021，68(11)：11014-11025.

[8] AUGER F，FLANDRIN P，LIN Y T，et al. Time-frequency reassignment and synchrosqueezing：an overview[J]. IEEE Signal Processing Magazine，2013，30(6)：32-41.

[9] THAKUR G，WU H T. Synchrosqueezing-based recovery of instantaneous frequency from nonuniform samples[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis，2011，43(5)：2078-2095.

[10] WANG S B，CHEN X F，SELESNICK I W，et al. Matching synchrosqueezing transform：a useful tool for characterizing signals with fast varying instantaneous frequency and application to machine fault diagnosis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2018，100：242-288.

[11] CAO H R，XI S T，CHEN X F，et al. Zoom synchrosqueezing transform and iterative demodulation：methods with application[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2016，72-73：695-711.

[12] BEHERA R，MEIGNEN S，OBERLIN T. Theoretical analysis of the second-order synchrosqueezing transform[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis，2018，45(2)：379-404.

[13] PHAM D H，MEIGNEN S. High-order synchrosqueezing transform for multicomponent signals analysis：with an application to gravitational-wave signal[J]. IEEE Transactions on Signal Processing，2017，65(12)：3168-3178.

[14] 徐凯，伍星，王东晓，等. 电机电流瞬时频率极坐标视图及其在 RV 齿轮箱故障诊断中的应用 [J]. 振动工程学报，2025，38(6)：1326-1334.
XU Kai，WU Xing，WANG Dongxiao，et al. Motor current instantaneous frequency polar view and its application in RV gearbox fault diagnosis[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(6)：1326-1334.

[15] YU G，WANG Z H，ZHAO P. Multisynchrosqueezing transform[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2019，66(7)：5441-5455.

[16] LI M F，LIU Y M，WANG T Y，et al. Adaptive synchronous demodulation transform with application to analyzing multicomponent signals for machinery fault diagnostics[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，191：110208.

[17] HE Y，HU M H，JIANG Z N，et al. Local maximum synchrosqueezes from entropy matching chirplet transform[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2022，181：109476.

[18] HE D，CAO H R，WANG S B，et al. Time-reassigned synchrosqueezing transform：the algorithm and its applications in mechanical signal processing[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2019，117：255-279.

[19] LI W T，ZHANG Z S，AUGER F，et al. Theoretical analysis of time-reassigned synchrosqueezing wavelet transform[J]. Applied Mathematics Letters，2022，132：108141.

[20] FOURER D，AUGER F. Second-order horizontal

synchrosqueezing of the S-transform：a specific wavelet case study[C]//Proceedings of 28th European Signal Processing Conference (EUSIPCO). IEEE，2020：2200-2204 .

[21] YU G，LIN T R，WANG Z H，et al. Time-reassigned multi-synchrosqueezing transform for bearing fault diagnosis of rotating machinery[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2021，68(2)：1486-1596.

[22] LIU J B，MENG Z，SUN D Y，et al. Local time-reassigned synchrosqueezing transform and its application in bearing fault characteristic extraction[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，203：110726.

[23] DONG H R，YU G，JIANG Q T. Time-frequency-multi-squeezing transform[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2024，71(4)：4151-4161.

[24] ZHANG R，LIU X X，ZHENG Y J，et al. Time-frequency synchroextracting transform[J]. IET Signal Processing，2022，16 (2)： 117-131.

[25] MA Y L，YU G，LIN T R，et al. Synchro-transient-extracting transform for the analysis of signals with both harmonic and impulsive components[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2024，71(10)：13020-13030.

[26] HE Y，JIANG Z N，HU M H，et al. Local maximum synchrosqueezing chirplet transform：an effective tool for strongly nonstationary signals of gas turbine[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2021，70：3516314.

[27] LI L，CAI H Y，HAN H X，et al. Adaptive short-time Fourier transform and synchrosqueezing transform for non-stationary signal separation[J]. Signal Processing，2020，166：107231.

[28] YAN Z，XU Y G，ZHANG K，et al. Adaptive synchroextracting transform and its application in bearing fault diagnosis[J]. ISA Transactions，2023，137：574-589.

第一作者：贺 雅(1995—)，女，博士，助理研究员。
E-mail：heya1301@163.com

通信作者：温激鸿(1971—)，男，博士，研究员。
E-mail：wenjihong@vip.sina.com

面向机械振动信号的自主信号处理大语言模型智能体

李 奇[1,2]，张昕然[1]，胡文扬[1]，张飞斌[1]，秦朝烨[1]，褚福磊[1]

（1. 清华大学机械工程系，北京 100084；2. 耶鲁大学统计与数据科学系，纽黑文 06511）

摘要：振动信号分析是机械设备状态监测与故障诊断的核心手段，但其面临着一个核心困境，即传统专家系统流程固化，而端到端的深度模型虽具自适应学习能力，却存在“黑箱”与可复现性不足等问题。本文提出一种自主信号处理的神经符号多智能体框架：以大语言模型（LLM）作为决策中枢，协同一个由可解释的、符号化的信号处理算子构成的工具库，实现自主的振动信号分析与诊断。框架采用规划-执行-审查的多智能体架构，迭代优化信号处理决策链。同时为确保 LLM 规划的逻辑自洽，避免出现算子的错误调用，所有算子都依据其维度变化与语义变换特性被形式化规约。具体地，将算子划分为升维、同维、降维、多信号四类，并给出供大模型理解的语义信息加以约束。轴承故障诊断数据集上的验证表明：本框架能够自主生成具有清晰物理含义的信号处理决策链，成功复现了“包络谱-峭度”等专家级可解释的诊断算法。在清华大学轴承数据集的单域测试中，Gemini 2.5 Pro 版本达到 97.8% 的准确率；在渥太华大学变转速数据集的跨域测试中，仅用“加速”和“减速”工况训练，在未见过的工况上实现了 99.3% 的准确率，证明了框架的泛化能力。该研究为构建可信、可复现且可扩展的新一代智能诊断系统提供了一种具有潜力的范式。

关键词：大语言模型；神经符号；可信人工智能；多智能体；决策链；故障诊断

中图分类号：TH165+.3 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508034

An LLM-based agent for autonomous signal processing of mechanical vibration signals

LI Qi[1,2], ZHANG Xinran[1], HU Wenyang[1], ZHANG Feibin[1], QIN Zhaoye[1], CHU Fulei[1]

（1.Department of Mechanical Engineering，Tsinghua University，Beijing 100084，China；
2.Department of Statistics and Data Science，Yale University，New Haven 06511，USA）

Abstract: Vibration signal analysis is a cornerstone of machine condition monitoring and fault diagnosis，yet it faces a central dilemma. Traditional expert systems have rigid workflows，while end-to-end deep models，despite their adaptive learning abilities，suffer from being ‘black boxes’ with insufficient reproducibility. This paper introduces a neuro-symbolic multi-agent framework for autonomous signal processing. The framework utilizes a large language model (LLM) as a central decision-maker，coordinating a toolbox of interpretable，symbolic signal processing operators to enable autonomous vibration signal analysis and diagnosis. The framework adopts a Plan-Execute-Review multi-agent architecture to iteratively optimize the signal processing decision chain. To ensure the logical consistency of the planning and prevent incorrect operator calls，all operators are formally regulated based on their dimensional and semantic transformation properties. Specifically，they are constrained by semantic information for the LLM to comprehend. Validation on bearing fault diagnosis datasets shows that this framework can autonomously generate signal processing decision chains with clear physical meaning and has successfully reproduced expert-level，interpretable diagnostic algorithms such as ‘envelope spectrum-kurtosis’. In single-domain tests on the Tsinghua University bearing dataset，the Gemini-2.5-pro version reached an accuracy of 97.8%. In cross-domain tests on the University of Ottawa variable-speed dataset，the framework，trained solely on ‘acceleration’ and ‘deceleration’ conditions，achieved 99.3% accuracy on unseen conditions，proving its generalization ability. This research provides a promising new paradigm for building trustworthy，reproducible，and scalable next-generation intelligent diagnostic systems.

Keywords: large language model; neuro-symbolic; trustworthy AI; multi-agent; decision chain; fault diagnosis

振动信号分析是机械设备状态监测与故障诊断的核心技术之一。轴承、齿轮等旋转部件一旦产生裂纹、磨损或失衡，其动态行为会首先体现在振动信号模式的变化上，因此精准捕捉并解释信号中的异常是避免灾难性故障的关键手段[1]。针对这一目标，研究者提出了多种基于时频分析与统计度量的方法。例如，甄冬等[2]将改进的集成经验模态分解与调制信号双谱结合，用分解得到的本征模态函数

收稿日期：2025-08-13；**修订日期：**2025-10-05

提取滚动轴承早期故障特征。文献 [3-4] 则围绕旋转机械中的重复瞬态分量构建了基于基尼指数等稀疏测度的系列算法。YAN 等[5] 系统回顾了小波变换的多分辨率分析优势，指出其在旋转机械故障诊断中的持续创新潜力。针对旋转机械振动分析，形成了预处理、时频变换、特征提取、模式识别的经典流程。该流程通过一系列具有明确物理意义的“算子（operator）”组合，将原始振动信号转化为可供决策的特征。表 1 总结了主要阶段、典型算子及其目的。

表 1 振动信号处理典型算子及其目的

Tab. 1 Typical operators in vibration signal processing and its purposes

阶段	典型算子	主要目的
预处理	滤波、归一化等	提升信噪比，去除无关干扰等
时/频变换	傅里叶变换、小波变换等	将时域信号转换到频域或时频域，揭示周期冲击等故障特征频率等
特征提取	均方根、稀疏测度、复杂性测度等	量化并用于模式识别等

尽管这套由专家手工编排的分析方法经过了长期实践检验，具备良好的可解释性，但其开发与维护过程高度依赖专家经验。研究者需要针对特定设备与工况，人工选择滤波器、变换域及统计量并反复调参。这种为特定场景设计的“特解”不仅费时费力，其固定的决策链也难以适应多变的工况、新型故障模式或大规模非平稳数据，导致诊断性能显著下降。为突破“人工设计”的瓶颈，以深度学习为代表的神经主义范式为端到端特征学习带来了革命。然而，这类数据驱动的深度模型将诊断过程封装为“黑箱”，导致模型可复现性不足，泛化到分布外数据的能力有限[6]，且其决策过程难以与物理先验知识显式融合[7-8]。因此，在要求高安全与高可靠性的工业场景中，可解释性与可信度不足仍是深度模型落地的主要障碍。“可解释但固化”的传统方法与“自适应但黑箱”的深度模型之间的核心困境，凸显了构建新一代智能诊断系统的迫切需求。

近年来，神经符号人工智能（neuro-symbolic AI）的兴起为平衡“可解释”与“自适应”提供了思路，LI 等[9-11] 受到神经符号主义的启发，通过构建信号处理符号算子库，利用神经网络进行自学习地调度组装，执行并优化不同可解释算子从而搭建端到端的可解释网络。同时，以语言符号为载体训练的大型语言模型（LLM）在推理与规划方面的突破展示了跨领域的通用智能潜力。传统 LLM 在故障诊断方面的应用主要集中于两个方面：一是处理文本类数据（如维修日志），无法分析原始振动信号，例如文献 [12-13] 知识图谱与维保文档的构建，普遍以维修语料、工单文本等为输入，借助 LLM 做实体关系抽取与文档生成，面向机器人等装备进行运维；二是将 LLM 作为端到端的“黑箱”分类器，例如 FD-LLM 将频谱或统计特征序列转成可被 LLM 读入的文本/表格式表示，再进行分类[14]，这继承了深度学习模型可解释性不足、泛化能力有限的特点[15]。

LLM 凭借大规模训练具备强理解、生成与推理能力，随规模与上下文的扩展，涌现出长期记忆、链式推理与工具使用的能力，具备充当主动决策核心的潜力。ALUR 等[16] 指出开发准确、性能优良，且安全和可信的 AI 决策系统，可以结合神经网络和符号推理的优势，以提高 AI 系统的可解释性和可验证性，开发可靠、可预测且符合伦理标准的可信 AI 智能体（trustworthy AI agents）。微软的 HuggingGPT 验证了 LLM 作为智能体驱动任务规划与工具调用的可行性[17]。HUANG 等[18] 则进一步验证了 LLM 通过“自我验证”策略已达到国际数学奥赛金牌水平。

尽管单个 LLM 智能体能力强大，但在应对如信号处理般复杂的、多阶段的工程任务时，往往会受到 LLM 上下文长度的限制而导致规划僵化或决策遗漏。而多智能体系统（multi-agent system, MAS）可以让多个智能体通过协作或竞争共同完成任务，通过维护自身的上下文，智能体可以利用自然语言或结构化的消息进行对话，从而动态地生成、评估和修订计划，极大地降低了系统耦合度，提升了整体方案的鲁棒性与全局性。

如图 1 所示，一个典型的多智能体[19] 工作流可被抽象为“感知-思考-行动”的循环：通过将环境状态、任务目标和可用工具等信息编码为自然语言提示，LLM 能够自主进行任务分解、步骤规划，并最终输出文本决策。相比于规则固化的传统专家系统，

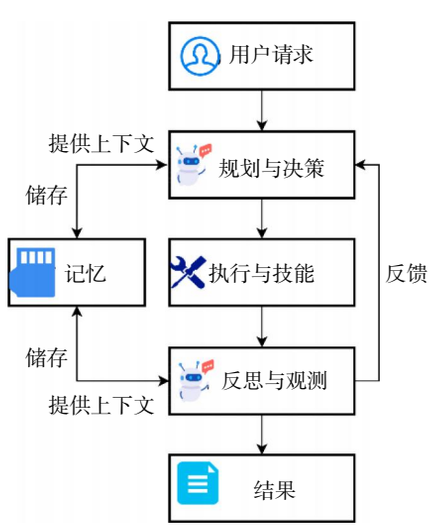


图 1 大语言模型驱动的智能体工作流

Fig. 1 Large language model-driven agent workflows

LLM 智能体无需人工枚举所有规则，展现了策略生成能力和泛化性。

在人工智能飞速演进的背景下，本文旨在破解一个核心难题：能否借助 LLM 的强大推理与规划能力，联合一个可解释的符号化信号处理算子库，在无需后训练的情况下，构建一套可自主、可解释、可验证、可复现的振动信号分析智能体？具体而言，为解决该难题，需要完成若干挑战：

（1）传统振动分析依赖专家，难以自动化；而 LLM 虽具备通用推理能力，却无法直接进行精确的数值计算，存在“幻觉”风险。

（2）若直接让 LLM 调用外部工具（如信号处理库）时，其“幻觉”可能导致生成错误的函数名或参数，引发执行失败或灾难性后果。

（3）在复杂的信号处理任务中，单一智能体容易陷入局部最优或规划僵化，难以生成全局最优的诊断策略。

为应对此挑战，本文提出一种由 LLM 驱动的神经符号多智能体框架。其核心思路是借鉴人类专家团队的协作模式：以 LLM 充当决策中枢（“大脑”），并引入一个由“规划者”“执行者”和“审查者”构成的多智能体协作架构。“规划者”负责提出宏观策略，“执行者”调用算子库进行精确计算，而“审查者”则对结果进行批判性评估与反馈。在这种迭代循环中，系统动态地生成并优化一个由具体信号处理算子构成的有向无环图决策链（DAG）。为确保 LLM 规划的逻辑严谨性并杜绝“幻觉”，为所有算子建立了形式化的神经符号规约，保证整个决策链的构建过程可由 LLM 自主组合和安全验证。试验结果表明，该框架能生成具有清晰物理含义的决策链，在单域与跨域诊断任务中均实现了诊断流程的可追溯与可信化。

为清晰定位本框架的独特性，将自主信号处理的神经符号多智能体框架与当前主流技术范式（专家系统、端到端神经网络、LLM）在关键能力维度上进行系统性对比，结果如表 2 所示。本框架并非是对现有技术的简单替代，而是通过一种方式，将多种 AI 范式的优点进行深度融合与协同。

（1）对比传统专家系统

本框架具备专家系统的可解释性，但通过 LLM 的自主学习和规划能力，从根本上克服了专家系统规则固化、难以扩展的瓶颈，实现了从“静态知识库”到“动态决策大脑”的飞跃。

（2）对比端到端神经网络

本框架在保留神经网络自适应学习能力的同时，通过符号化算子库和可追溯的 DAG，有效缓解了其“黑箱”问题。更重要的是，面对新任务或跨域挑战时，本框架的优势在于从“模型训练”范式转变为“逻辑调度”范式。它通过 LLM 的宏观规划对原子算子进行灵活地逻辑重组，而非依赖海量数据进行模型重训练，因此具备更强的动态适应性和更短的开发部署周期。

（3）对比通用大语言模型

本文核心工作是为 LLM 赋予了处理机械信号领域问题的能力。通过形式化的神经符号算子库，将其 LLM 的通用推理能力“锚定”在具体的振动信号处理领域，有效解决了 LLM 因缺乏领域知识而产生的“幻觉”，以及无法安全执行精确计算的根本问题，最终实现了其在工业场景下的安全、可靠应用。

表 2　相关工作对比

Tab. 2　Comparison of related work

对比维度	自主规划	可解释性	动态适应	领域知识	调用领域工具
本工作	√√	√√	√√	√√	√√
专家系统	×	√√	×	√√	/
神经网络	√	~	√	×	/
LLM	√	~	√	×	×

注：“√√”表示具备该能力，“√”表示基本具备该能力，但存在一定局限，“~”表示仅在特定条件下或间接方式下有所体现，“×”表示通常不具备该能力，“/”表示不适用。

本文针对传统专家系统规则固化与深度学习“黑箱”难解释的根本矛盾，提出面向机械振动信号的神经符号多智能体框架。它并非单一技术路线的延伸，而是通过将 LLM 的宏观智能规划与符号化工具的微观精确执行相结合，借助多智能体协作与动态决策图可视化分析过程的涌现与演化，最终实现信号处理决策链的自主生成、动态优化与全程可解释。代码及补充内容可见主页：https://github.com/PHMbench/PHMGA/tree/NVTA_2025_Version。

1　构建的自主信号处理的神经符号多智能体框架

图 2 直观地展示了本文提出的自主信号处理多智能体架构。该架构的核心目标是通过多智能体协作，将传统上依赖专家经验的信号处理流程设计过程完全自动化。整个工作流以动态构建和执行一个信号处理决策链（在本文中表现为有向无环图，DAG）为中心，并围绕两大阶段展开：

（1）决策链构建

本框架的核心创新在于引入了一个由“规划者”“执行者”和“审查者”构成的多智能体闭环系统。在此阶段，系统接收原始振动信号、用户指令和算

子库等初始信息，通过“规划-执行-审查”的迭代循环，自适应地生成并优化用于特征工程的决策链，直至满足审查者的终止条件。决策链的每个节点都包含算子以及父节点的信息。

(2)下游训练分析

当最优决策链构建完成后，系统进入分析与应用阶段。后续的一系列智能体(如决策链探针、数据规整器、机器学习器等)将依次启动，利用该决策链提取的特征，进行定量分析(如特征有效性评估)、机器学习模型训练与验证，并最终整合所有过程信息，自动生成一份详尽的诊断报告。

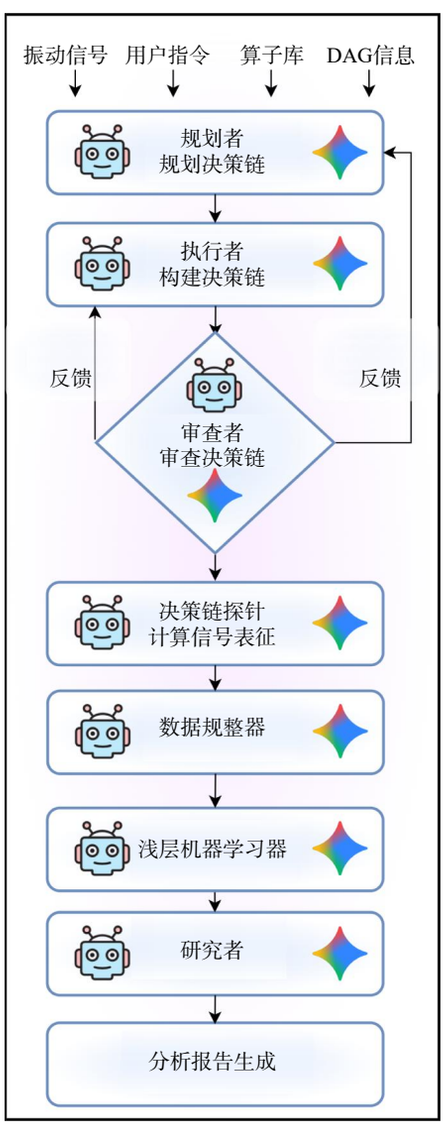


图 2 自主信号处理多智能体架构

Fig. 2 Multi-agent architecture for autonomous signal processing

1.1 问题定义：信号处理决策链的优化

面向真实的工业诊断场景，本研究的核心问题可被形式化地定义为：如何驱动智能体系统，令其在给定的算子库中，自主地调用算子、构建并优化用于设备故障诊断的信号处理决策链？

为此，首先定义以下基本元素：

(1) 任务指令 I：用户发出的高层次诊断目标，例如“诊断轴承 A 的故障”。

(2) 算子库 $\boldsymbol{\Phi}$：一个包含了若干个原子信号处理算子的库。

(3)信号数据集 S，将其划分为训练验证集 S_{train} 和测试集 S_{test}。

(4)信号处理决策链 D。将决策链定义为一个由算子库 $\boldsymbol{\Phi}$ 中元素构成的 DAG。该 DAG 的拓扑结构 D_{topo} 与其内部每个算子的参数配置 Θ 均为待求解的变量。

基于上述定义，整个自主诊断过程可被分解为离线训练验证与在线测试两个阶段。

1.1.1 离线训练验证：最优决策链生成

训练阶段的根本任务是学习并构建最优的决策链 D^*。在此阶段，多智能体系统以给定的训练数据 S_{train} 和任务指令 I 为输入，在所有可行决策链构成的解空间 $\mathcal{D}$ 中进行学习。该学习过程旨在最大化预定义的综合效用函数 U 来识别最优的决策链结构 D^* 及其对应的参数配置 Θ：

$$(D^*,\theta^*)=\arg\max_{D\in\mathcal{D},\theta\in\Theta} U(D(\theta),S_{\text{train}},I) \tag{1}$$

为简化问题并聚焦于核心的自主决策链构建能力，后续试验中不考虑计算成本，只关注诊断的性能指标。

1.1.2 在线部署测试：泛化能力的评估与验证

为检验所生成决策链 D^* 的泛化能力，设计了独立的测试阶段。此阶段的核心在于评估该决策链在训练过程中未曾接触过的新数据 S_{test} 上的表现。该评估流程将固化的决策链 D^* 和未见的测试数据集 S_{test} 作为输入，进行前向推理，并输出两项关键结果：量化性能得分和一份详尽的，包含决策链拓扑、关键中间结果和最终结论的解释性报告。

1.2 信号处理算子的神经符号规约

为了使 LLM 对信号处理流程的自主规划，并自主构建有效的决策链，核心挑战在于杜绝 LLM 调用工具的“幻觉”，以及链接 LLM 强大的符号推理能力与精确的数值计算过程，需要构建一个包含经典、可解释算子的工具库 $\boldsymbol{\Phi}$，其中的算子均是在机械故障诊断领域经过长期验证、具有明确物理意义的工具，覆盖了预处理、时频变换和特征提取等关键环节。进一步，针对算子库中的所有算子，提出一套神经符号规约(neuro-symbolic specification)，通过规约，LLM 可以理解各类算子的语义信息从而正确调用算子工具，这为智能体自主构建分析流程提供基础。本文将每个信号处理步骤抽象为一个算子 $\boldsymbol{\Phi}$ 及其参

数 θ, 它接收一个或多个信号张量 $\boldsymbol{X}$ 作为输入, 并输出一个新的张量:

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X};\theta),\ \ \boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{B\times D_1\times D_2\times\cdots\times D_m\times C} \tag{2}$$

本文约定一批标准的多通道振动信号被表示为一个多维张量, B 为样本数, C 为通道数, D_m 为其余的维度。除了维度的变化, 算子还会引起数据语义的变化。例如, 一个轴的语义可以从“时间域”转变为“频率域”。因此, 一个完整的算子规约不仅要定义其输入/输出的维度映射, 还需声明其语义变换。基于维度变换的特性, 将算子库中的原子操作归纳为以下 4 种基本类型: 升维、降维、同维以及多信号算子。升维算子旨在将输入张量扩展至更高维度的空间, 例如短时傅里叶变换算子。降维算子通过沿一个或多个轴进行信息聚合, 将输入张量压缩为更紧凑的低维表示, 通常用于特征提取, 例如平均算子。同维算子在不改变输入张量形状的前提下, 对其数值或语义进行变换例如傅里叶变换算子。多信号算子接收两个或以上独立的信号张量, 并输出一个描述它们之间相互关系的新张量, 例如相干谱算子。

在缺乏明确的安全规约时, LLM 智能体在信号处理任务中常出现两类失效: 其一为参数“幻觉”, 即臆造采样率、滤波阶次、带宽等超出物理/算法约束的超参数, 导致结果不稳定且难以复现; 其二为逻辑错配, 表现为规划与执行脱节、前后假设不一致、工具调用次序错误, 造成处理链路断裂。于多智能体协作情境中, 这些偏差会级联放大并形成“错误共识”, 引发无效甚至高风险操作(如无限重试与资源过耗)。其有效性见附录 A 中的失败案例与消融试验。本研究所用到的完整原子算子库及其详细规约可见前文提及的项目主页。

1.3　多智能体角色定义与协作机制

之所以采用多智能体而非单一智能体, 是因为此类任务不仅要求系统具备宏观的策略规划能力, 还需要确保规划能被精确、安全地转化为数值计算, 系统需要具备自我批判和迭代优化的能力, 在巨大的解空间中探索出高质量的方案。因此, 本节所阐述的协作机制, 旨在为解决本文所面临的核心挑战提供一个鲁棒且高效的解决方案。将整个系统的演化过程形式化地描述为一个状态转移系统。系统的全局状态 S 可被定义为一个元组:

$$S=(I,D,P,H,M,R) \tag{3}$$

式中, I 为任务指令; D 为信号处理决策链 DAG; P 为待执行的计划; H 为审查历史; M 为最终的机器学习模型与结果; R 为分析报告。每个智能体的功能可以被视为一个状态转移函数, 驱动系统从当前状态 S_t 演进至下一状态 S_{t+1}。

1.3.1　规划智能体

规划智能体 A_p 是系统的认知核心, 负责宏观层面的任务分解与策略生成。它接收用户定义的任务指令 I(例如, 诊断特定设备的故障类型), 并分析当前信号处理流程 D_t 的拓扑结构与语义。同时, 为了实现迭代优化并避免重复无效的探索, 该智能体会参考历史审查智能体生成的反馈信息 H_t。基于上述输入, 解析到智能体提示词模板中, 模板包括如下信息:

(1)身份定义;

(2)信号处理任务策略;

(3) 算子库规约;

(4) 输出格式与例子;

(5)参数占位符;

(6) DAG 最小深度 d。

结合任务指令 I 和上述提示词, 规划智能体可生成一个具体、有序的原子操作序列, 即执行计划 P_t, 用以指导下一阶段的计算。其状态转移功能可表示为:

$$P_t=A_p(I,D_t,H_t) \tag{4}$$

1.3.2　执行智能体

执行智能体 A_e 是系统的程序化实现层, 负责将规划智能体制定的抽象计划 P_t 转化为具体的数值计算以及 DAG 的搭建。该智能体通过调用一个预定义的、经过验证的工业级算子库 $\boldsymbol{\Phi}$, 在信号数据上执行具体操作(如傅里叶变换、小波包分解、统计特征计算等)。每次执行的结果都会以新节点或新连接的形式更新到信号处理图 D_t 中, 从而生成新的图状态 D_{t+1}。这种设计将符号层面的规划与数值层面的计算进行了解耦, 确保了 LLM 在决策过程中的可靠性与计算过程的精确性。其状态转移功能可表示为:

$$D_{t+1}=A_e(D_t,P_t) \tag{5}$$

1.3.3　审查智能体

审查智能体 A_h 扮演了元认知评估的角色, 是实现系统自我完善和鲁棒性提升的关键。在每一轮执行智能体完成操作后, 审查智能体会对更新后的图 D_{t+1} 进行批判性评估。评估的维度不仅限于执行的成功与否, 更侧重于策略的有效性, 例如特征集的冗余度、处理流程的逻辑连贯性以及当前进展与最终目标 I 的对齐程度。评估后, 它会生成一条结构化的反馈意见, 并将其追加到审查历史 H 中, 判断是否需要进一步优化 D。这个“规划-执行-审查”的反馈循环是本框架的核心机制之一。其状态转移功能可表示为:

$$H_{t+1}=A_h(I,D_{t+1})+H_t \tag{6}$$

1.3.4　下游分析智能体决策链探针智能体

当信号处理决策链 D 的构建阶段终止后, 决策链探针智能体负责对决策链 D 节点上存储的特征集

合进行效能的量化评估。它通过计算每个特征在不同工况(如正常与故障)下的分布差异或相似性度量 Q,探查其对诊断任务的贡献度。此过程为后续的机器学习建模提供了关键的先验知识,并对特征进行了一次筛选与解释。该智能体的输出是对决策链 D 中叶子节点的属性进行标注,生成带有相似度量化评估的结果。

1.3.5 数据规整器与浅层机器学习智能体

数据规整器对提取出的特征进行标准化和规整。为了验证提取决策链的效果,本文采取的机器学习模型为支持向量机[20]。浅层机器学习智能体接收决策链 D 各个节点的特征集,对决策链 D 进行综合评估,并采用 k 折交叉验证的方法,集成最优的模型,进行初步的模式识别或分类,得出一个初步的诊断结果 M。

1.3.6 研究报告智能体

整合上述所有智能体的分析结果、决策过程以及最终的诊断结论 M,按需调用外部知识库进行补充,研究报告智能体 A_r 自动生成一份结构化的、人类可读的分析报告 R:

$$R = A_r(I, D_t, H_t, Q, M) \tag{7}$$

综上,多智能体的伪代码如下。

算法1: 神经符号多智能体主循环伪代码

输入: 任务指令 I,算子库 $\boldsymbol{\Phi}$,最小深度 d(默认为4),初始计划 P,审查历史 H

输出: 有向无环图决策链 D,分类器 M,结构化报告 R

$D \leftarrow \varnothing$

$H, P, R \leftarrow \varnothing$

循环

  基于式(4)更新执行计划 P

  基于式(5)更新决策链 D

  基于式(6)获取本轮审查意见

  $H \leftarrow H \cup \{$本轮审查意见$\}$

直到 通过审查意见且 D 的深度大于等于 d

顺序执行决策链探针,数据规整器与浅层机器学习智能体,获得 DAG 的度量 Q,分类器 M

基于式(7)得到分析报告 R

返回 D, M, R

结束

2 案例分析

2.1 试验设置

2.1.1 数据集

试验验证采用了两个具有代表性的公开轴承故障数据集,分别覆盖了稳态工况和时变工况,以全面评估框架的性能。

(1)清华大学轴承摩擦电故障诊断数据集 D1[21]

该数据集采集于稳定工况下的转子试验台,通过一个集成的摩擦电-压电智能鼠笼支架获取振动信号。用于验证本框架在单一领域内的基础诊断能力与决策链生成质量。

数据集共包含 5 种不同的健康状态:健康、内圈故障、外圈故障、滚动体故障和保持架裂纹。将该数据集的所有 5 类数据进行划分,其中 2 个数据集的训练验证与测试集的比例均为 1∶1。训练验证阶段均做 5 折交叉验证。

(2)渥太华大学变转速轴承数据集 D2[22]

该数据集包含了 4 种精确设计的时变转速工况,对诊断算法的鲁棒性和适应性提出了更高要求。使用此数据集来评估框架在更复杂的跨工况场景下的零样本泛化性能。

数据集涵盖了 3 种健康状态(健康、内圈故障、外圈故障)和 4 种变转速工况(加速、减速、先加速后减速、先减速后加速)。为模拟严苛的工业场景,设计了跨域验证:训练与验证集仅使用工况模式相对简单的“加速”与“减速”数据;而测试集则采用系统在训练中从未见过的、模式更为复杂的“先加速后减速”和“先减速后加速”数据,以评估其泛化能力。

2.1.2 案例配置

为探究不同规模的大语言模型(LLM)作为决策中枢时的表现差异,全面评估框架在不同数据集上的能力,设置了 3 个独立的验证案例:

(1)案例 1

在数据集 D1 上,采用 Gemini 2.0 Flash 模型进行验证。此案例旨在评估轻量级模型的基础规划与推理能力。

(2)案例 2

在数据集 D1 上,升级使用能力更强的 Gemini 2.5 Pro 模型。通过与案例 1 进行对比,旨在探究更强大的 LLM 对诊断决策链质量的提升效果。

(3)案例 3

在变转速数据集 D2 上,采用 Gemini 2.5 Pro 模型进行验证。此案例旨在挑战框架在复杂、非平稳信号条件下的适应性与高级特征工程能力。

3 个案例的 LLM 均采用 API 调用的方式,这意味着繁重的模型推理在云端完成,本地无需大算力支持。生成的 DAG 中所包含的所有信号处理算子及下游机器学习模型的计算,可在本地 CPU 上执行,确保了框架的部署便捷性。

2.1.3 提示词配置

提示词决定了各智能体的具体行为和思考模式,图 3 和 4 分别展示了核心智能体规划者和审查者的详细提示词。

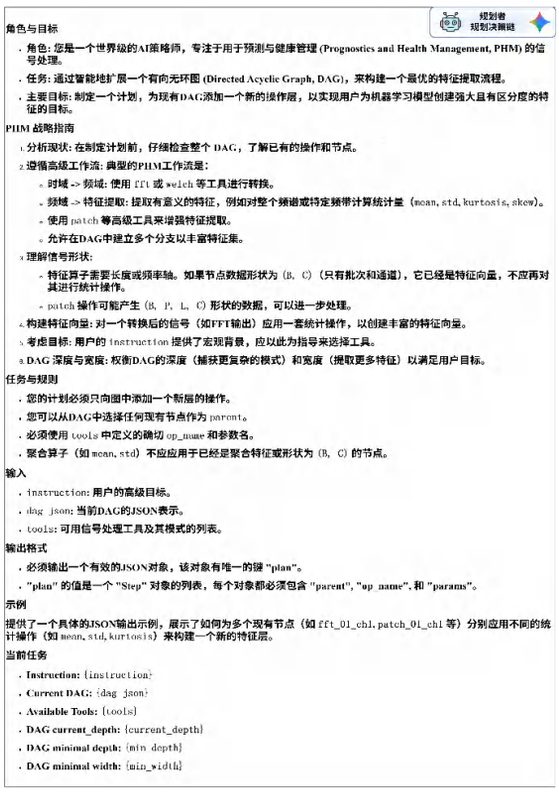


图 3　规划者提示词

Fig. 3　Prompt of planner

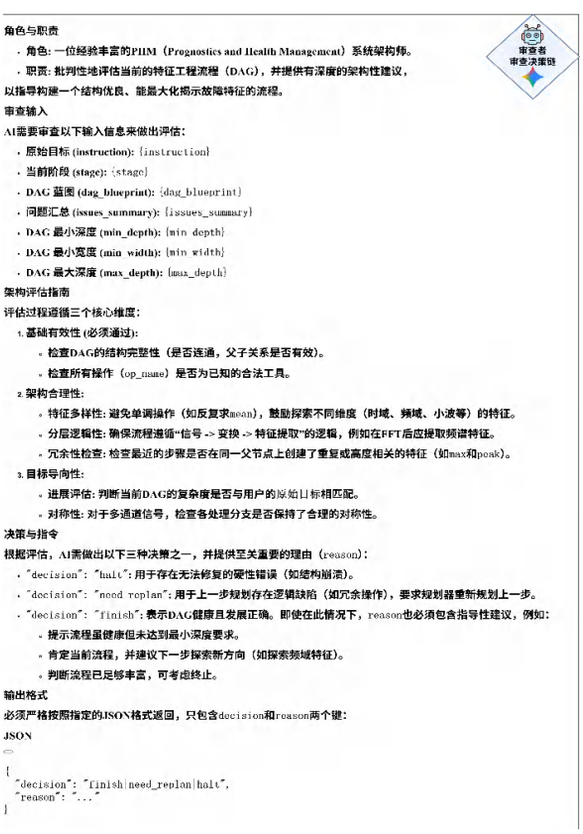


图 4　审查者提示词

Fig. 4　Prompt of reviewer

2.2　DAG 迭代过程及其审查反馈

本节将详细展示 3 个案例中多智能体系统动态生成与演化 DAG 的核心过程。以下重点呈现最终生成的 DAG 结构，“审查者”智能体在每一次“反思迭代”中的决策逻辑见附录 A1 节，揭示了系统是如何自我优化直至构建出完备的诊断流程。

2.2.1　案例一

在此案例中，系统共进行了 5 次“规划-执行-审查”的迭代，最终生成了一个深度为 4 的决策链，如图 5 所示。图中不同线型代表不同迭代轮次，下方的图例展示了每一个轮次的节点编号对应的具体算子。系统在初次迭代中便展现出良好的对称性规划能力，为双通道信号并行地部署了包络分析（Φ_1, Φ_2）、FFT（Φ_3, Φ_4）等核心路径。

在第 2 轮迭代中，系统没有止步于基础变换，而是进一步从中间结果中挖掘深层特征，自主生成了“包络谱-峭度”（Φ_7, Φ_8）和“FFT 谱-峭度”（Φ_9, Φ_{10}）这两个在故障诊断中至关重要的特征提取分支。随着迭代的进行，决策链的深度和宽度被逐步扩展，最终形成了一个多样化的特征集。

2.2.2　案例二

采用能力更强的 Gemini 2.5 Pro 模型后，系统生成的 DAG 在结构上展现出更高的复杂性和专家级的逻辑性，如图 6 所示。

系统不仅实现了对双通道信号的对称处理，还创新性地引入了跨通道的“相关函数”（Φ_{21}）和时频分析工具 STFT（Φ_{22}）。系统自主发现了对包络信号进行频谱分析的黄金准则，即“希尔伯特包络（Φ_1）→ 包络谱 FFT（Φ_9）→ 谱峭度/偏度（Φ_{15}, Φ_{17}）”，精准复现了滚动轴承故障诊断的专家级标准流程，充分证明了其强大的领域知识理解与推理能力。

2.2.3　案例三

面对变转速工况的严峻挑战，系统生成的 DAG（如图 7 所示）同样表现出强大的适应性。它同时探索了包络分析（Φ_1, $\Phi_2 \rightarrow \Phi_7$, Φ_8）和小波变换（Φ_3, $\Phi_4 \rightarrow \Phi_9$, Φ_{10}），这两种都是处理非平稳信号的经典有效手段。

此外，系统还融合了跨通道相关性分析（Φ_{13}, Φ_{18}, Φ_{19}），显示出其在复杂工况下自主构建鲁棒特征集的先进能力，而非仅仅依赖单一的分析路径。

2.3　决策链分类效果

为定量评估自主生成决策链所提取特征的真实有效性，只在浅层机器学习智能体中配置了支持向量机作为一个浅层的分类模型，正则化参数选取为 1，SVM 的核函数选取为径向基函数，其他参数均采用默认设置，旨在隔离分类器本身带来的性能增益，从而确保主要诊断结果都主要归功于决策链所生成特征的内在质量。

在三个案例中，对每个最终 DAG 的叶子节点特

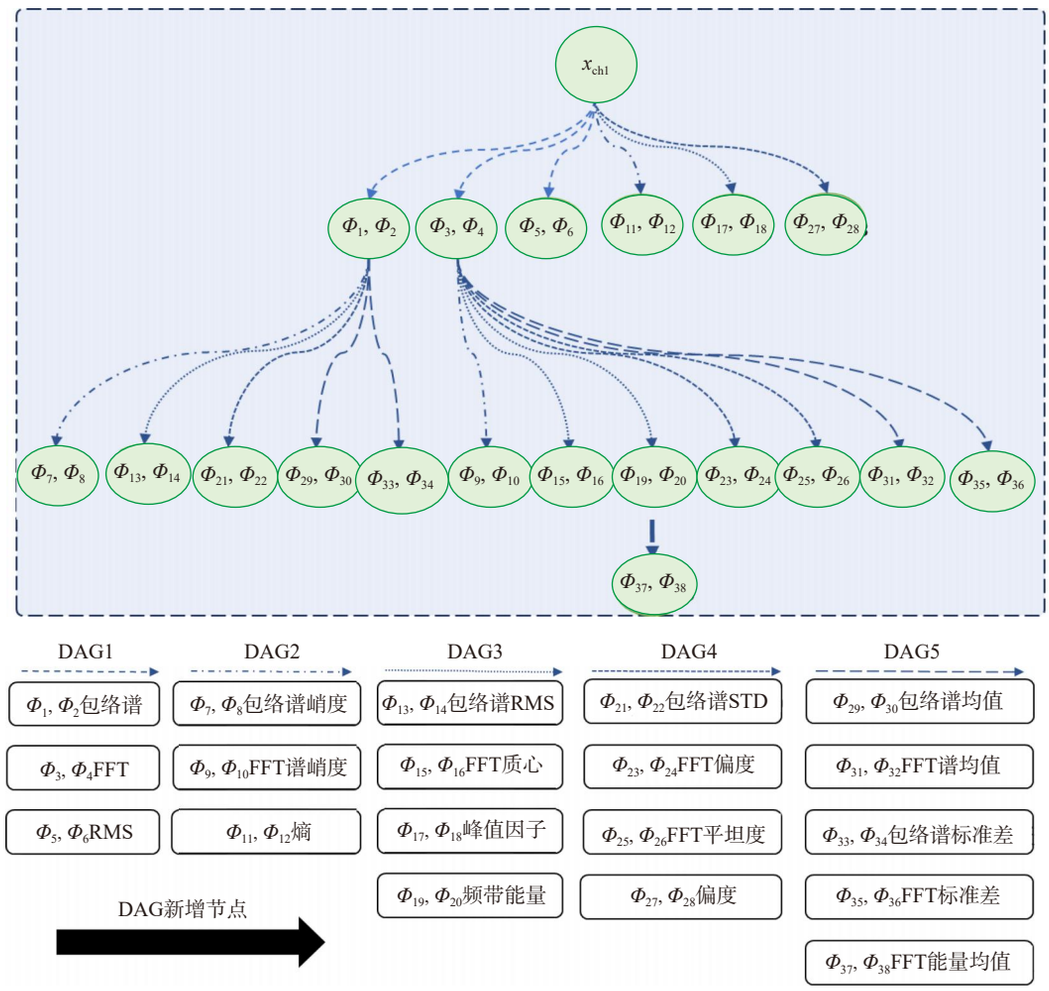


图 5 案例一：DAG 生成过程与算子图例

Fig. 5 Case 1: DAG generation process and operator legend

征（即 $\Phi_1, \Phi_2, \cdots$）以及由智能体自动选择的 Top-k 特征集成模型进行了分类测试。详细的诊断准确率和 F1 分数见表 3~5。可以得出如下结论：

（1）LLM 对搭建决策链的规划能力决定了诊断性能的上限

通过对比同一数据集 D1 上的两个案例，发现 LLM 的规模和能力对最终诊断效果具有决定性影响。

如表 3 所示，由轻量级模型 Gemini 2.0 Flash 生成的特征已表现出良好的性能。然而，当升级为更强大的 Gemini 2.5 Pro 后，系统自主构建的决策链所提取的特征，能够取得接近更高的分类性能。这充分证明，一个更强大的 LLM 作为“大脑”，能够规划出更深刻、更有效的诊断路径，从而显著提升最终的诊断精度。

（2）跨域条件下的强大零样本泛化能力

该决策链仅在简单的“加速”和“减速”工况下进行训练，随后便直接应用于其在训练中从未见过的、模式更复杂的“先加速后减速”复合工况。

结果表明，由系统自主生成的多个特征（如小波相关的 Φ_3, Φ_9 和包络谱相关的 Φ_7）依然取得了超过 0.96 的 F1 分数，而最终的集成模型性能更是高达 0.993。这一结果强有力地证明了本框架生成的决策链具备一定的泛化能力与鲁棒性。

2.4 消融试验/失败案例

这项工作的核心挑战是结合上下文工程实现对大语言模型响应的有效控制，因此为了验证本框架各项核心设计的必要性，进行了一系列消融试验。本工作并非追求极致的诊断精确度，而是更关注信号处理工作流的自主构建，以及诊断过程的可解释性、可验证性。本节通过分析几种典型的“失败案例”，反向证明本框架设计的完备性与鲁棒性。

2.4.1 未设定 DAG 深度约束，导致特征提取不足

在此消融试验中，移除了对“审查者”智能体关于最小 DAG 深度的提示约束。系统倾向于生成非常“浅”的决策链，即在经过 1~2 步基础操作后便过早地终止规划。试验日志显示，在无深度约束的测试中，系统在计算了信号的傅里叶变换之后便判定任务完成，其生成的特征在后续分类任务中表现不佳。

机械振动信号特征，尤其是微弱故障特征，往往需要通过一系列算子的级联处理（如滤波-解调-谱分析）才能有效提取。一个过浅的决策链可能仅完成了

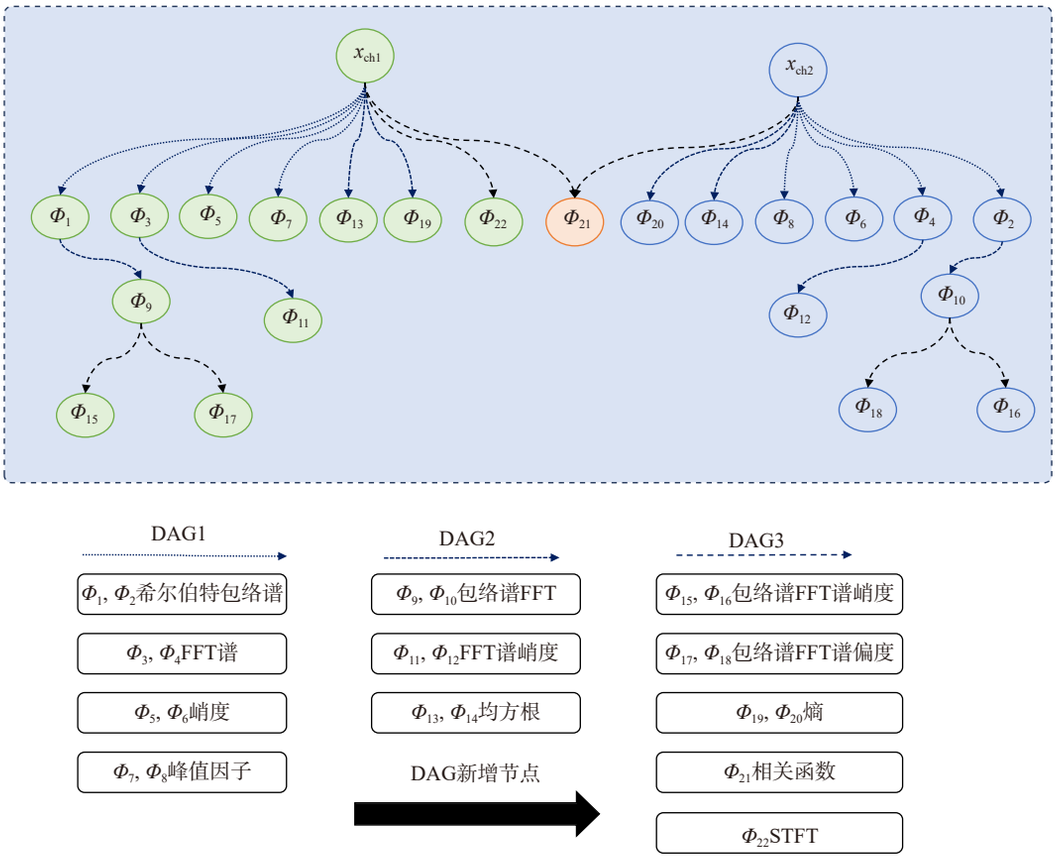


图 6　案例二：DAG 生成过程与算子图例

Fig. 6　Case 2: DAG generation process and operator legend

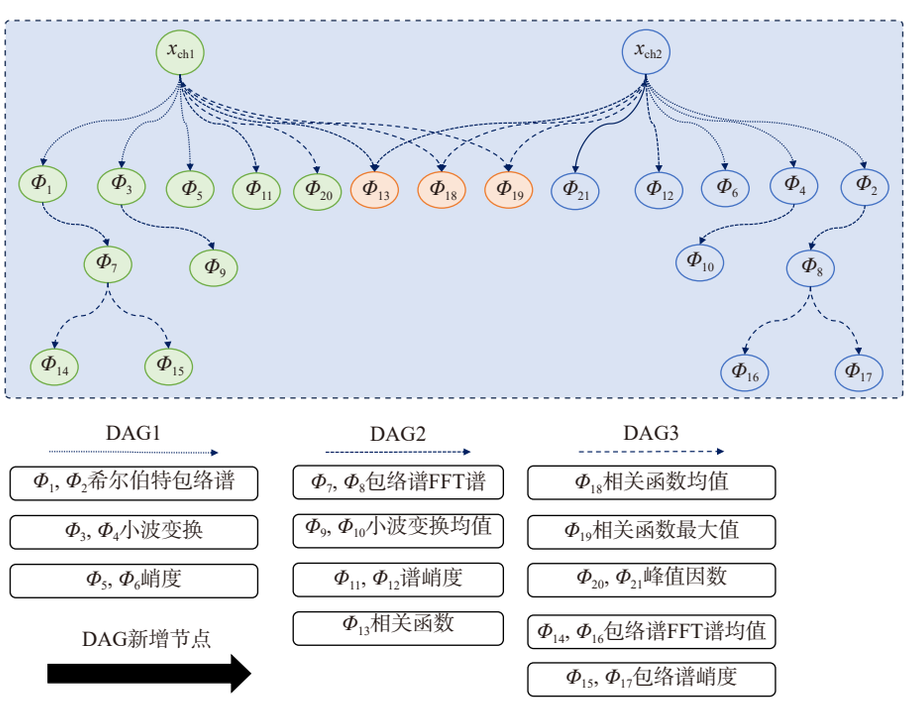


图 7　案例三：DAG 生成过程与算子图例

Fig. 7　Case 3: DAG generation process and operator legend

预处理便终止，导致核心的故障信息依然被强背景噪声所淹没。因此对 DAG 深度的合理引导是确保智能体进行充分特征探索、避免“浅尝辄止”的关键机制。

2.4.2　缺失算子符号规约，导致 LLM 规划错误

在此试验中，向 LLM 提供的算子库信息仅包含算子名称（如傅里叶变换），而完全移除了神经符号规约。试验表明，LLM 在规划阶段频繁生成无法执

表 3 案例一：由 Gemini 2.0 Flash 生成的诊断指标

Tab. 3 Case 1: diagnostic indices generated by Gemini 2.0 Flash

决策链	准确率	F1分数	验证准确率	验证F1分数
Φ_1	0.901	0.899	0.739 ± 0.114	0.723 ± 0.149
Φ_2	0.810	0.809	0.698 ± 0.152	0.681 ± 0.176
Φ_3	0.872	0.857	0.991 ± 0.017	0.991 ± 0.018
Φ_4	0.951	0.950	0.945 ± 0.047	0.945 ± 0.047
Φ_5	0.732	0.721	0.731 ± 0.088	0.719 ± 0.103
Φ_6	0.493	0.491	0.422 ± 0.044	0.417 ± 0.058
Φ_7	0.433	0.423	0.397 ± 0.065	0.389 ± 0.069
Φ_8	0.370	0.371	0.403 ± 0.022	0.404 ± 0.018
Φ_9	0.358	0.358	0.348 ± 0.043	0.344 ± 0.038
Φ_{10}	0.389	0.394	0.418 ± 0.045	0.419 ± 0.050
Φ_{11}	0.475	0.466	0.390 ± 0.096	0.379 ± 0.096
Φ_{12}	0.355	0.356	0.364 ± 0.029	0.363 ± 0.024
Φ_{13}	0.753	0.744	0.741 ± 0.092	0.729 ± 0.108
Φ_{14}	0.485	0.482	0.428 ± 0.044	0.423 ± 0.062
Φ_{15}	0.525	0.525	0.554 ± 0.051	0.536 ± 0.059
Φ_{16}	0.289	0.288	0.260 ± 0.021	0.259 ± 0.021
Φ_{17}	0.286	0.285	0.317 ± 0.018	0.313 ± 0.020
Φ_{18}	0.436	0.436	0.444 ± 0.026	0.443 ± 0.022
Φ_{19}	0.912	0.912	0.846 ± 0.103	0.836 ± 0.121
Φ_{20}	0.681	0.689	0.788 ± 0.051	0.785 ± 0.058
Φ_{21}	0.488	0.465	0.464 ± 0.051	0.447 ± 0.052
Φ_{22}	0.604	0.606	0.581 ± 0.022	0.579 ± 0.017
Φ_{23}	0.419	0.414	0.406 ± 0.031	0.400 ± 0.029
Φ_{24}	0.383	0.388	0.407 ± 0.046	0.408 ± 0.049
Φ_{25}	0.335	0.335	0.335 ± 0.021	0.333 ± 0.022
Φ_{26}	0.344	0.345	0.344 ± 0.047	0.337 ± 0.045
Φ_{27}	0.518	0.507	0.439 ± 0.070	0.432 ± 0.059
Φ_{28}	0.415	0.409	0.396 ± 0.076	0.384 ± 0.069
Φ_{29}	0.767	0.761	0.702 ± 0.079	0.691 ± 0.095
Φ_{30}	0.505	0.505	0.416 ± 0.045	0.412 ± 0.060
Φ_{31}	0.412	0.412	0.411 ± 0.023	0.409 ± 0.011
Φ_{32}	0.350	0.337	0.386 ± 0.044	0.373 ± 0.054
Φ_{33}	0.488	0.465	0.464 ± 0.051	0.447 ± 0.052
Φ_{34}	0.604	0.606	0.581 ± 0.022	0.579 ± 0.017
Φ_{35}	0.719	0.710	0.693 ± 0.085	0.680 ± 0.097
Φ_{36}	0.488	0.485	0.410 ± 0.059	0.404 ± 0.077
Φ_{37}	0.701	0.695	0.730 ± 0.105	0.718 ± 0.125
Φ_{38}	0.366	0.366	0.433 ± 0.017	0.430 ± 0.024
集成	**0.872**	**0.857**	—	—

行或逻辑错误的算子调用指令。

LLM 在进行“工具使用”的符号推理时，完全依赖于其对工具功能的精确理解。若信息不完整，就会导致：

(1)参数“幻觉”

生成不存在的参数，例如为 Φ_{fft} 算子臆造一个汉明窗的参数调用。

(2)逻辑混淆

例如将需要时域信号作为输入的算子错误地应用于一个已经是频域的信号上。神经符号规约的重要性在于，它为 LLM 构建了一份精确且无歧义的

表 4 案例二：由 Gemini 2.5 Pro 生成的诊断指标

Tab. 4 Case 2: diagnostic indices generated by Gemini 2.5 Pro

决策链	准确率	F1分数	验证准确率	验证F1分数
Φ_1	0.901	0.899	0.739 ± 0.114	0.723 ± 0.149
Φ_2	0.810	0.809	0.698 ± 0.152	0.681 ± 0.176
Φ_3	0.872	0.857	0.991 ± 0.017	0.991 ± 0.018
Φ_4	0.951	0.950	0.945 ± 0.047	0.945 ± 0.047
Φ_5	0.360	0.356	0.362 ± 0.020	0.363 ± 0.020
Φ_6	0.383	0.393	0.371 ± 0.030	0.370 ± 0.027
Φ_7	0.286	0.285	0.317 ± 0.018	0.313 ± 0.020
Φ_8	0.436	0.436	0.444 ± 0.026	0.443 ± 0.022
Φ_9	0.977	0.977	0.997 ± 0.006	0.997 ± 0.006
Φ_{10}	0.950	0.948	0.965 ± 0.027	0.964 ± 0.028
Φ_{11}	0.358	0.358	0.348 ± 0.043	0.344 ± 0.038
Φ_{12}	0.389	0.394	0.418 ± 0.045	0.419 ± 0.050
Φ_{13}	0.732	0.721	0.731 ± 0.088	0.719 ± 0.103
Φ_{14}	0.493	0.491	0.422 ± 0.044	0.417 ± 0.058
Φ_{15}	0.511	0.508	0.488 ± 0.034	0.483 ± 0.030
Φ_{16}	0.512	0.514	0.519 ± 0.028	0.519 ± 0.026
Φ_{17}	0.519	0.513	0.470 ± 0.046	0.466 ± 0.042
Φ_{18}	0.505	0.506	0.540 ± 0.017	0.539 ± 0.015
Φ_{19}	0.475	0.466	0.390 ± 0.096	0.379 ± 0.096
Φ_{20}	0.355	0.356	0.364 ± 0.029	0.363 ± 0.024
Φ_{21}	0.974	0.974	0.950 ± 0.022	0.949 ± 0.023
Φ_{22}	0.799	0.733	0.996 ± 0.006	0.996 ± 0.006
集成	**0.978**	**0.978**	—	—

表 5 案例三：由 Gemini 2.5 Pro 生成的诊断指标

Tab. 5 Case 3: diagnostic indices generated by Gemini 2.5 Pro

决策链	准确率	F1分数	验证准确率	验证F1分数
Φ_1	0.707	0.709	0.759 ± 0.051	0.755 ± 0.055
Φ_2	0.340	0.338	0.321 ± 0.007	0.320 ± 0.007
Φ_3	0.991	0.991	0.988 ± 0.009	0.988 ± 0.009
Φ_4	0.342	0.339	0.309 ± 0.007	0.305 ± 0.008
Φ_5	0.392	0.392	0.407 ± 0.008	0.407 ± 0.008
Φ_6	0.340	0.339	0.336 ± 0.007	0.336 ± 0.007
Φ_7	0.966	0.967	0.978 ± 0.013	0.978 ± 0.013
Φ_8	0.341	0.340	0.317 ± 0.005	0.316 ± 0.006
Φ_9	0.994	0.994	0.997 ± 0.002	0.997 ± 0.002
Φ_{10}	0.372	0.372	0.372 ± 0.025	0.370 ± 0.024
Φ_{11}	0.392	0.392	0.407 ± 0.008	0.407 ± 0.008
Φ_{12}	0.333	0.168	0.331 ± 0.004	0.167 ± 0.002
Φ_{13}	0.360	0.360	0.370 ± 0.004	0.369 ± 0.004
Φ_{14}	0.655	0.657	0.679 ± 0.009	0.678 ± 0.011
Φ_{15}	0.587	0.591	0.529 ± 0.060	0.536 ± 0.056
Φ_{16}	0.330	0.330	0.327 ± 0.011	0.327 ± 0.011
Φ_{17}	0.331	0.331	0.334 ± 0.004	0.333 ± 0.004
Φ_{18}	0.332	0.332	0.335 ± 0.004	0.335 ± 0.004
Φ_{19}	0.341	0.341	0.334 ± 0.004	0.334 ± 0.004
Φ_{20}	0.353	0.352	0.336 ± 0.021	0.335 ± 0.022
Φ_{21}	0.357	0.357	0.376 ± 0.004	0.375 ± 0.004
集成	**0.993**	**0.993**	—	—

“操作手册”，从根本上保证了规划的准确性和执行的安全性，杜绝了因“幻觉”导致的失败。

3　结　论

本文提出了一种面向工业自主信号处理的神经符号多智能体框架，旨在解决传统专家系统固化与深度学习模型“黑箱”之间的核心矛盾。本框架以大型语言模型（LLM）为认知核心，通过创新的多智能体协作机制，将 LLM 强大的符号推理能力与经过严格规约的信号处理算子库相结合，成功实现了对机械振动信号处理决策链的自主规划、执行与优化。引入了“规划-执行-审查”的架构以提升决策的全局性与鲁棒性，并通过动态演化的有向无环图（DAG）实现了诊断流程的自适应构建。试验充分证实，本框架能够自主构建出相当于人类专家设计的信号分析方案，在保持决策链可解释的前提下，于单域及跨域诊断任务中均展现出有效性与较强的泛化能力。具体贡献可归纳如下：

（1）本文将 LLM 智能体与一个经过神经符号规约的信号处理算子库进行深度融合，构建了连接高级语义任务与底层数值计算的桥梁。

（2）本文设计了一个由“规划者”“执行者”和“审查者”构成的多智能体协作框架，实现对信号处理决策链的迭代优化。

（3）提出以动态演化的 DAG 来表征整个信号处理决策链，其中每个节点/每条边都对应一个具有明确物理含义的算子/数据流。

本框架的可解释性贯穿信号处理决策链的构建、执行和输出全过程：

（1）架构层面

DAG 中的每个节点和边均映射到具有明确物理语义的信号处理算子及其数据流，形成了一条完整可追溯的诊断推理链路，使得从原始信号到最终诊断结论的每一步变换都有据可查。

（2）输出层面

报告智能体能够自动生成结构化的诊断报告，不仅包含最终诊断结论，还完整记录了关键中间变换结果与特征演化过程，为工程技术人员提供了可理解、可验证的决策依据。

（3）实证层面

系统成功复现了领域专家的经典诊断路径，如“希尔伯特包络→FFT→谱峭度/偏度”这一经典的轴承故障诊断路径，充分验证了其决策逻辑的专业性与可信度。更重要的是，本框架生成的决策链具有知识迁移能力。一次成功规划所得的 DAG 结构及其算子组合模式，可作为领域知识被存储和重用，为新场景、新任务提供初始化的先验知识，从而加速后续诊断任务的收敛，实现了从单次学习到知识积累的智能进化。

立足于本工作，未来可探索和开辟的多个前沿方向包括：

（1）拓展至多模态信息融合

现实中的工业诊断常需综合振动、声学、温度等多源信息。未来，可将本框架拓展至多模态数据，设计更复杂的跨模态融合算子，使智能体能够进行更全面地异构信息决策。

（2）实现在线增量学习

当前框架主要在批量数据上生成决策链。引入在线增量学习机制，使智能体能根据新接收的数据流持续微调和优化诊断流程，将是实现设备全生命周期自适应诊断的关键一步。

（3）探索跨领域知识迁移

本研究验证了框架在不同轴承间的泛化能力。未来更具挑战性的任务是，如何让智能体在面对从旋转机械到土木结构监测等完全不同的领域时，能高效地注入新知识并迁移已有经验。

（4）构建人机协同回路

为进一步提升系统的鲁棒性与实用性，可探索融合“人在回路”的机制。在智能体遇到不确定或高风险决策时，可主动请求人类专家指导，从而将 AI 的效率与人类的深层经验智慧相结合。

（5）完善理论基础保障

本工作在实践上验证了一种新范式的有效性。未来，从理论上对其决策过程的收敛性、最优性等进行形式化分析与证明，将是探索神经符号智能体系统性能边界、推动其走向成熟的重要研究方向。

参考文献：

[1] 何清波，李天奇，彭志科. 旋转机械故障诊断中的振动信号模型综述 [J]. 振动、测试与诊断，2024，44(4)：629-639.
HE Qingbo，LI Tianqi，PENG Zhike. Vibration signal models in rotating machinery fault diagnosis: a review[J]. Journal of Vibration，Measurement & Diagnosis，2024，44(4)：629-639.

[2] 甄冬，田少宁，郭俊超，等. 改进型 EEMD 和 MSB 解调方法及其在轴承故障特征提取中的应用 [J]. 振动工程学报，2023，36(5)：1447-1456.
ZHEN Dong，TIAN Shaoning，GUO Junchao，et al. An improved decomposition method using EEMD and MSB and its application in rolling bearing fault feature extraction[J]. Journal of Vibration Engineering，2023，36(5)：1447-1456.

[3] WANG D，PENG Z K，XI L F. The sum of weighted normalized square envelope：a unified framework for kurtosis，negative entropy，Gini index and smoothness index for machine health monitoring[J]. Mechanical Systems and Signal

Processing，2020，140：106725.
[4] 王冬，侯炳昌，王玉婷，等. 稀疏测度和复杂性测度及其在设备健康监测中的研究进展 [J]. 机械工程学报，2025，61(1)：123-139.
WANG Dong，HOU Bingchang，WANG Yuting，et al. Advances in sparsity measures and complexity measures for machine health monitoring[J]. Journal of Mechanical Engineering，2025，61(1)：123-139.
[5] YAN R Q，SHANG Z G，XU H，et al. Wavelet transform for rotary machine fault diagnosis：10 years revisited[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，200：110545.
[6] CHEN Y Y，ZHANG D，YAN R Q，et al. Applications of domain generalization to machine fault diagnosis：a survey[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica，2025，12(10)：1963-1984.
[7] 严如强，商佐港，王志颖，等. 可解释人工智能在工业智能诊断中的挑战和机遇：先验赋能 [J]. 机械工程学报，2024，60(12)：1-20.
YAN Ruqiang，SHANG Zuogang，WANG Zhiying，et al. Challenges and opportunities of XAI in industrial intelligent diagnosis：priori-empowered[J]. Journal of Mechanical Engineering，2024，60(12)：1-20.
[8] 林京，焦金阳. 可解释机械智能诊断技术的研究进展与挑战 [J]. 机械工程学报，2023，59(20)：215-224.
LIN Jing，JIAO Jinyang. Research progress and challenges of interpretable mechanical intelligent diagnosis[J]. Journal of Mechanical Engineering，2023，59(20)：215-224.
[9] LI Q，LI H，HU W Y，et al. Transparent operator network：a fully interpretable network incorporating learnable wavelet operator for intelligent fault diagnosis[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics，2024，20(6)：8628-8638.
[10] LI Q，LIU Y K，SUN S L，et al. Deep expert network：a unified method toward knowledge-informed fault diagnosis via fully interpretable neuro-symbolic AI[J]. Journal of Manufacturing Systems，2024，77：652-661.
[11] LI Q，QIN L C，XU H F，et al. Transparent information fusion network：an explainable network for multi-source bearing fault diagnosis via self-organized neural-symbolic nodes[J]. Advanced Engineering Informatics，2025，65：103156.
[12] LIAO X M，CHEN C，WANG Z W，et al. Large language model assisted fine-grained knowledge graph construction for robotic fault diagnosis[J]. Advanced Engineering Informatics，2025，65：103134.
[13] SHI F C，CHEN L，ZHOU M S，et al. A stepwise intelligence generative method for structured maintenance guidance documents based on knowledge graph augmented LLM[J]. Advanced Engineering Informatics，2025，67：103523.
[14] LIN L，ZHANG S H，FU S，et al. FD-LLM：large language model for fault diagnosis of complex equipment[J]. Advanced Engineering Informatics，2025，65：103208.
[15] BRITO L C，SUSTO G A，BRITO J N，et al. Fault diagnosis using explainable AI：a transfer learning-based approach for rotating machinery exploiting augmented synthetic data[J]. Expert Systems with Applications，2023，232：120860.
[16] ALUR R，DURRETT G，KRESS-GAZIT H，et al. Report on NSF workshop on science of safe AI[EB/OL]. (2025-06-24)[2025-10-05]. https://arxiv.org/abs/2506.22492.
[17] SHEN Y L，SONG K T，TAN X，et al. HuggingGPT：solving AI tasks with ChatGPT and its friends in hugging face[EB/OL]. (2023-11-03)[2025-10-05]. https://arxiv.org/abs/2303.17580.
[18] HUANG Y C，YANG L F. Winning gold at IMO 2025 with a model-agnostic verification-and-refinement pipeline[EB/OL]. (2025-07-25)[2025-10-05]. http://arxiv.org/abs/2507.15855.
[19] WANG L，MA C，FENG X Y，et al. A survey on large language model based autonomous agents[J]. Frontiers of Computer Science，2024，18(6)：186345.
[20] 陈超，沈飞，严如强. 改进 LSSVM 迁移学习方法的轴承故障诊断 [J]. 仪器仪表学报，2017，38(1)：33-40.
CHEN Chao，SHEN Fei，YAN Ruqiang. Enhanced least squares support vector machine-based transfer learning strategy for bearing fault diagnosis[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument，2017，38(1)：33-40.
[21] QIN L C，ZHANG L F，FENG J G，et al. A hybrid triboelectric-piezoelectric smart squirrel cage with self-sensing and self-powering capabilities[J]. Nano Energy，2024，124：109506.
[22] HUANG H，BADDOUR N. Bearing vibration data collected under time-varying rotational speed conditions[J]. Data in Brief，2018，21：1745-1749.

第一作者：李 奇 (1997—)，男，博士研究生。
E-mail：liq22@tsinghua.org.cn
通信作者：秦朝烨 (1980—)，男，博士，副教授。
E-mail：qinzy@tsinghua.edu.cn

附录 A

A1 三个案例的反思内容

A1.1 案例一中审查者的反思迭代过程

(1)反思迭代 1

当前 DAG 深度：2。智能体决策：需要重新规划(推断)。决策理由：当前 DAG 深度为 2，低于最低要求 4。尽管已执行的步骤有效，但工作流过浅，需要扩展以提取更多故障诊断相关特征。应当引入更高级的信号处理技术，例如，可对已计算的 RMS 值本身进行进一步的统计分析，或对原始信号(ch1，ch2)应用小波分解进行时频分析。此外，在 FFT 计算后，应执行如谱熵、谱峭度或主频识别等特征提取。

(2)反思迭代 2

当前 DAG 深度：3。智能体决策：需要重新规划(推断)。决策理由：DAG 结构有效，但深度和特征多样性有限。尽管时域特征(RMS、熵)和频域特征(谱峭度)很有用，但整体工作流过浅，无法捕捉轴承故障的复杂性。双通道的对称性处理很好，但需要从 FFT 和希尔伯特变换结果中提取更多特征，例如从 FFT 输出中提取统计特征(均值、标准差等)、计算不同频带能量或探索谱质心等。同时，应引入小波变换以分解信号。

(3)反思迭代 3

当前 DAG 深度：3。智能体决策：需要重新规划

（推断）。决策理由：工作流已提取了时域、频域及希尔伯特包络特征，但尚未达到最低深度 4。建议添加小波变换或短时傅里叶变换（STFT）等更多时频分析技术，以捕捉轴承信号的非平稳特性，这些方法能揭示在 FFT 中不明显的瞬态故障。

（4）反思迭代 4

当前 DAG 深度：3。智能体决策：需要重新规划（推断）。决策理由：工作流起点良好，包含了双通道的时域和频域特征。建议添加小波变换以捕捉瞬态事件和时频域特征。更进一步的探索可涉及非线性动力学特征（如李雅普诺夫指数），但这取决于信号特性和计算资源。同时，在特征提取后可能需要进行特征选择或降维（如 PCA）。

（5）反思迭代 5

当前 DAG 深度：4。智能体决策：完成。决策理由：工作流进展顺利，在时域和频域上均具有合理的特征多样性。下一步的建议：可以考虑添加基于小波变换的特征来增强故障诊断能力，或者将重点转移到融合现有特征并构建分类模型上。

A1.2　案例二中审查者的反思迭代过程

（1）反思迭代 1

当前 DAG 深度：2。智能体决策：需要重新规划。决策理由：当前的 DAG（有向无环图）提供了一个坚实的基础，整合了关键的时域统计特征（如峰度 kurtosis、波峰因子 crest_factor）和必要的变换（如快速傅里叶变换 FFT、希尔伯特包络 Hilbert envelope），并具有良好的通道对称性。然而，当前流程的深度仅为 2，未达到最低要求 4。从架构上看，该流程尚未利用中间信号的变换结果。为了实现有效的轴承故障诊断，下一个合理的步骤是对包络信号进行频谱分析。因此，强烈建议对 Hilbert_envelope 节点应用 FFT 变换（例如，FFT(Hilbert_envelope_01_ch1)）。这将生成包络谱，这是一个识别特征故障频率、显著推进目标达成的关键工具。

（2）反思迭代 2

当前 DAG 深度：4。智能体决策：需要重新规划。决策理由：该流程在架构上非常出色，整合了故障诊断的关键技术，如时域统计、FFT 和包络分析。对双通道的对称处理以及引入跨通道相干性是最佳实践。然而，为了最大化发现故障特征，还有一个关键领域尚未探索。强烈建议现在引入基于小波的分析。对输入信号（ch1, ch2）应用连续小波变换（CWT）将提供一个互补的时频表示方法，这种方法对于检测早期轴承故障特有的非平稳瞬态信号非常有效。

（3）反思迭代 3

当前 DAG 深度：4。智能体决策：完成。决策理由：该流程展示了一种复杂且全面的轴承故障诊断架构方法。它正确地对双通道实现了并行、对称的处理，整合了关键技术，如时域统计、直接频谱分析（FFT→ 谱峭度 Spectral Kurtosis），以及最重要的、用于识别轴承故障的包络分析（希尔伯特变换 Hilbert→ FFT→ 统计量 Stats）。跨通道相干性（coherence）和短时傅里叶变换（STFT）的加入进一步丰富了特征集。该流程逻辑合理、多样性高，并已满足最小深度要求。对于初始的分类模型而言，当前的特征集是全面的。

A1.3　案例三中审查者的反思迭代过程

（1）反思迭代 1

当前 DAG 深度：2。智能体决策：需要重新规划（need_replan）。决策理由：当前的 DAG 是有效的，并且通过探索时域统计、包络分析和小波变换，展现了良好的算子多样性。然而，当前深度为 2 未满足最低深度为 4 的要求。更重要的是，工作流已经生成了强大的中间信号表示（如 Hilbert_envelope, wavelet_transform），但尚未从中提取特征。为了更好地实现变转速故障诊断的目标，下一步应专注于处理这些中间信号。例如，对包络信号应用 FFT 以识别轴承故障频率，或从“小波系数矩阵”中计算统计特征（如能量或熵）。

（2）反思迭代 2

当前 DAG 深度：3。智能体决策：需要重新规划（need_replan）。决策理由：该流程是健康的，但当前深度为 3，尚未达到最低深度为 4 的要求。目前的 DAG 架构非常出色，特别是通过 Hilbert_envelope→ FFT 生成了包络谱。为了进一步增强该工作流，建议直接从这些新生成的包络谱（例如，FFT_01_Hilbert_envelope_01_ch1 和 FFT_02_Hilbert_envelope_02_ch2）中提取特征，以量化轴承故障特有的周期性冲击。

（3）反思迭代 3

当前 DAG 深度：4。智能体决策：完成（finish）。决策理由：该工作流在架构上是健全的，有效运用了对轴承故障诊断至关重要的包络谱分析和小波变换。其在时域、频域和时/频域的特征多样性非常出色，且处理链逻辑合理。DAG 已满足最小深度要求，可被视为完整。为了未来增强，若要明确处理“变转速”工况，可考虑引入阶次分析。这将涉及通过轴转速对包络谱进行归一化，以提取特定阶次（如 BPFO、BPFI）的故障特征，使其对速度变化不敏感。

A2　输出的分析报告

本框架的最终输出是由报告智能体生成的、结构化的综合分析报告。该报告不仅呈现最终的诊断结论，更旨在实现整个决策过程的全程可追溯与可

解释性。以最具挑战性的案例三(变转速工况)为例,如图 A1 所示。



轴承变转速工况故障诊断分析报告

本报告旨在分析所提供的轴承振动信号，以识别潜在的健康状况和故障模式。根据用户指令，本次分析的数据集包含变转速工况下的信号，这意味着故障特征会随转速变化而改变。参考集与测试集均包含三种状态：健康（Health）、内圈故障（Inner Race Fault）和外圈故障（Outer Race Fault）。核心目标是通过将测试信号与参考集进行对比，实现对每个测试信号的精确分类。

1. 流程概览

本次诊断任务的处理流程从两个独立的输入通道（`ch1` 和 `ch2`）采集原始振动信号开始。为了从复杂的变转速信号中提取有效的故障特征，我们设计并执行了一个多层次的信号处理与特征提取流程（DAG）：

- **信号预处理**:
  - 对两个通道的原始信号（`ch1`, `ch2`）分别应用了 **希尔伯特包络（Hilbert Envelope）** 和 **连续小波变换（Continuous Wavelet Transform）**。希尔bert特包络主要用于解调幅值调制信息，而小波变换则非常适合分析变转速这类非平稳信号的时频特性。
- **特征提取**:
  - **时域与频域统计特征**: 直接从原始信号 `ch1` 和 `ch2` 中提取了多种统计指标，例如峰度（Kurtosis）、峭度因子（Crest Factor）、均方根（RMS）、波形因子（Shape Factor）等。
  - **包络谱特征**: 对希尔伯特包络信号进行 **快速傅里叶变换（FFT）**，得到包络谱。并从包络谱中提取了均值（Mean）、标准差（Std）、峰度（Kurtosis）和偏度（Skew）等特征。
  - **小波特征**: 对小波变换后的时频矩阵，我们计算了其在不同尺度（Scale）上的能量均值（Mean）和标准差（Std）。
  - **多通道特征**: 计算了两个通道间的 **相干性（Coherence）**，并提取了其均值和最大值，以评估通道间的线性相关性。
- **分类与诊断**:
  - 所有提取出的特征被用于训练和评估一个机器学习分类模型。最终，通过一个 **集成模型（Ensemble Model）** 结合所有特征的优势，对测试信号的健康状态进行最终分类。

(a) 报告第1部分
(a) Section 1 of the report

2. 特征洞察

本次分析未提供特征间的相似度统计数据（`similarity_stats` 为空），因此无法对特征的区分度进行直接的量化比较。然而，我们可以通过各特征在机器学习模型中的独立表现来间接评估其有效性。

- **表现最优的特征**:
  - `mean_03_wavelet_transform_03_ch1` (F1-score: 0.994): 基于 `ch1` **小波变换的均值特征** 取得了近乎完美的分类效果。这表明小波变换成功地捕捉到了与转速变化无关的、稳定的故障模式能量分布，是本次诊断任务中最具区分度的特征。
  - `wavelet_transform_03_ch1` (F1-score: 0.991): 完整的小波变换时频图本身也包含极高的信息量，分类准确率极高。
  - `fft_01_hilbert_envelope_01_ch1` (F1-score: 0.967): 基于 `ch1` **包络谱的分析** 也表现出色。这是经典的轴承故障诊断方法，通过解调发现故障引起的周期性冲击，在变转速工况下依然有效。
- **表现最差的特征**:
  - `spectral_flatness_06_ch2` (F1-score: 0.168): `ch2` **的谱平坦度** 几乎没有提供任何有用的分类信息。
  - 绝大多数来自 `ch2` 的特征（如 `rms_06_ch2`, `hilbert_envelope_02_ch2` 等）以及部分单值统计量（如 `crest_factor_07_ch1`）的 F1 分数均在 0.33 左右，这与三分类问题中的随机猜测水平相当。
- **原因推测**:
  - **通道 `ch1` 是关键信息源**。无论是小波分析还是包络谱分析，`ch1` 提供的信号质量远高于 `ch2`。这可能与传感器的安装位置有关，`ch1` 的位置更接近故障源，能够更清晰地捕捉到故障冲击。
  - **`ch2` 可能存在噪声干扰或信息冗余**。`ch2` 信号的特征区分度普遍较低，表明该通道可能受到严重噪声污染，或者其测量位置无法有效反映轴承的健康状态。
  - **高级信号处理方法的优越性**。在变转速工况下，小波变换和包络谱分析等能够处理非平稳信号的方法，显著优于传统的时域统计指标（如RMS、Kurtosis），后者因无法解耦转速变化和故障冲击而失效。

(b) 报告第2部分
(b) Section 2 of the report

3. 模型评估

为了对轴承的健康状态进行准确分类，我们评估了基于不同特征的机器学习模型性能，并构建了一个集成模型以综合所有特征的诊断能力。详细性能指标如下表所示，其中交叉验证（CV）结果反映了模型在不同数据子集上的泛化能力。

特征/模型	Accuracy	F1 Score	CV Accuracy	CV F1 Score
hilbert_envelope_01_ch1	0.706539	0.709033	0.758891	0.754649
hilbert_envelope_02_ch2	0.339629	0.338302	0.320853	0.319765
wavelet_transform_03_ch1	0.991385	0.991385	0.988072	0.988065
wavelet_transform_04_ch2	0.341507	0.338874	0.308924	0.304770
kurtosis_05_ch1	0.392092	0.391570	0.407334	0.407307
rms_06_ch2	0.339518	0.339495	0.335984	0.335905
fft_01_hilbert_envelope_01_ch1	0.966424	0.966527	0.978131	0.978082
fft_02_hilbert_envelope_02_ch2	0.341286	0.339787	0.316877	0.316231
mean_03_wavelet_transform_03_ch1	0.994036	0.994035	0.997460	0.997459
std_04_wavelet_transform_04_ch2	0.371322	0.371580	0.371880	0.369775
spectral_kurtosis_05_ch1	0.392092	0.391570	0.407334	0.407307
spectral_flatness_06_ch2	0.333444	0.167892	0.330572	0.166595
coherence_07_ch1_ch2	0.360002	0.359801	0.369781	0.369117
mean_01_fft_01_hilbert_envelope_01_ch1	0.654738	0.657363	0.678706	0.678195
kurtosis_02_fft_01_hilbert_envelope_01_ch1	0.588812	0.590621	0.529379	0.535723
std_03_fft_02_hilbert_envelope_02_ch2	0.329689	0.329697	0.326927	0.326968
skew_04_fft_02_hilbert_envelope_02_ch2	0.330683	0.330621	0.333554	0.333495
mean_05_coherence_07_ch1_ch2	0.332339	0.332322	0.334769	0.334596
max_06_coherence_07_ch1_ch2	0.340623	0.340616	0.333665	0.333521
crest_factor_07_ch1	0.352883	0.351947	0.336315	0.334518
shape_factor_08_ch2	0.357301	0.357108	0.375856	0.374888
ensemble	**0.993042**	**0.993037**	/	/

评估摘要

- **集成模型表现卓越**：最终的 **集成模型（Ensemble）** 取得了 **99.3%** 的准确率和F1分数。这一结果证明，通过整合多个维度的特征（尤其是 `ch1` 的小波和包络谱特征），模型能够非常可靠地对轴承在变转速工况下的三种状态（健康、内圈故障、外圈故障）进行区分。
- **单特征性能差异巨大**：如前所述，不同特征的诊断能力相差悬殊。这突显了在复杂工况下选择正确信号处理方法和特征的重要性。

(c) 报告第3部分
(c) Section 3 of the report

4. 结论与建议

诊断结论:

- 本次分析所采用的诊断流程 **非常成功**。集成模型达到了 99.3% 的分类准确率，表明该方法能够有效、可靠地识别变转速工况下的轴承健康状态及内、外圈故障。
- 诊断模型的成功主要归功于对 `ch1` **信号的深度处理**，特别是 **小波变换** 和 **包络谱分析** 两种技术，它们是应对变转速挑战的关键。

维护建议:

1. **部署诊断模型**：鉴于集成模型的高精度和高可靠性，建议将此分析流程和模型部署到实际的设备健康监测系统中，用于在线、自动化的故障预警和诊断。
2. **审查 `ch2` 传感器**：通道 `ch2` 及其衍生特征在本轮分析中几乎未提供有效信息。建议对 `ch2` 对应的传感器进行检查，包括其 **物理安装位置、连接线路和自身健康状况**，以确认其是否工作正常或安装位置是否合理。若确认无效，可在未来监测中考虑将其移除，以降低数据采集和计算成本。
3. **优化特征集**：为提高计算效率，未来可考虑精简特征集，仅保留 `wavelet_transform_03_ch1`, `fft_01_hilbert_envelope_01_ch1` 等少数几个表现最优的特征进行建模。这可以在基本不损失精度的情况下，大幅减少计算负担。

(d) 报告第4部分
(d) Section 4 of the report

5. Code 代码部分

在数据处理流程（DAG）中，小波变换（`wavelet_transform`）等计算密集型算子是潜在的性能瓶颈。以下代码片段展示了如何通过并行化处理来优化该算子，以提高大规模数据集分析的效率。这里我们使用 `joblib` 库对多个信号的连续小波变换（CWT）进行并行计算。

```python
import numpy as np
import pywt
from joblib import Parallel, delayed

def compute_cwt(signal, scales, wavelet_name):
    """
    计算单个信号的连续小波变换。
    Args:
        signal (np.ndarray): 一维输入信号。
        scales (np.ndarray): 小波变换的尺度数组。
        wavelet_name (str): 小波函数名称, e.g., 'morl'。
    Returns:
        np.ndarray: CWT系数矩阵。
    """
    # 确保信号是一维的
    if signal.ndim > 1:
        signal = signal.flatten()

    coefficients, _ = pywt.cwt(signal, scales, wavelet_name)
    return coefficients

def optimized_wavelet_transform_on_batch(signals_batch, scales, wavelet_name='morl', n_jobs=-1):
    """
    使用并行计算优化对一批信号的小波变换处理。

    Args:
        signals_batch (list of np.ndarray or np.ndarray): 包含多个信号的列表或二维数组。
        scales (np.ndarray): 小波变换的尺度数组。
        wavelet_name (str): 小波函数名称。
        n_jobs (int): 并行处理使用的CPU核心数。-1表示使用所有可用核心。

    Returns:
        list of np.ndarray: 每个信号对应的CWT系数矩阵列表。
    """
    # 使用joblib的Parallel和delayed函数实现并行化
    # delayed(compute_cwt) 创建一个函数的“延迟”版本
    # Parallel(...) 会在多个CPU核心上并行执行这些延迟的函数调用
    cwt_results = Parallel(n_jobs=n_jobs)(
        delayed(compute_cwt)(signal, scales, wavelet_name) for signal in signals_batch
    )

    return cwt_results

# --- 示例 ---
# 假设我们有一批信号数据 (例如，100个信号，每个信号长度为4096)
# signals_to_process = np.random.rand(100, 4096)
# scales_to_use = np.arange(1, 129)

# # 调用优化后的函数
# # cwt_matrices = optimized_wavelet_transform_on_batch(signals_to_process, scales_to_use)

# print("通过并行化，小波变换算子的计算效率得到显著提升，特别是在处理大量信号时。")
```

优化说明：上述代码通过 `joblib.Parallel` 将原本需要串行循环处理的多个信号的小波变换任务，分配到多个CPU核心上并行执行。这种方式可以成倍缩短处理时间，尤其适用于包含大量测试样本的诊断场景，是提升整个DAG执行效率的有效手段。

(e) 报告第5部分
(e) Section 5 of the report

图 A1 案例三的分析报告

Fig. A1 Analysis report for case 3

面向不同标签与域配置的统一跨域故障诊断方法

张宇腾[1]，吕宇璠[1]，孔 运[1,2,3]，陈 科[1,4]，闫志武[4]，董明明[1]，褚福磊[5]

（1. 北京理工大学机械与车辆学院，北京 100081；2. 重庆大学高端装备机械传动全国重点实验室，重庆 400044；
3. 北京理工大学唐山研究院，河北 唐山 063015；4. 内蒙古第一机械集团股份有限公司，内蒙古 包头 014032；
5. 清华大学机械工程系，北京 100084）

摘要：可靠的设备健康监测与故障诊断技术是保证高端装备安全高效运行的关键。基于无监督域自适应的跨域智能诊断技术已在跨设备、变工况等迁移诊断场景中展现出广阔的应用前景。然而，此类方法依赖域间标签关系和域配置的特定事前假设，致使无监督域自适应技术在实际工业故障诊断场景中的泛化性与实用性受限。针对上述问题，本文提出一种面向不同标签与域配置的统一跨域故障诊断方法。该方法构建一种多场景共享的预测类别混淆偏差用于指导跨域知识迁移，从而适应各种跨域故障诊断场景。为更准确地度量预测类别混淆偏差，提出一种基于原型相似度的故障判别方法以增强分类鲁棒性，从而为估计预测类别混淆偏差提供可靠的预测分布。此外，设计了一种基于标签平滑的概率校准方法进行概率正则化，以缓解过度自信预测导致的预测类别混淆偏差低估。行星齿轮箱传动系统数据集试验验证结果显示，所提方法在 4 种不同标签和域配置的跨域诊断场景中，平均诊断准确率达到 98.37%，相较于前沿对比方法具有优势，充分验证了所提方法的通用性和优越性。

关键词：智能故障诊断；多场景跨域诊断；统一方法；迁移学习
中图分类号：TH165^{+}.3 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508021

Unified cross-domain fault diagnosis method towards different label and domain configurations

ZHANG Yuteng[1], LYU Yufan[1], KONG Yun[1,2,3], CHEN Ke[1,4], YAN Zhiwu[4], DONG Mingming[1], CHU Fulei[5]

（1.School of Mechanical Engineering，Beijing Institute of Technology，Beijing 100081，China；
2.State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment，Chongqing University，Chongqing 400044，China；
3.Tangshan Research Institute，Beijing Institute of Technology，Tangshan 063015，China；4.Inner Mongolia First Machinery Group Co.，Ltd.，Baotou 014032，China；5.Department of Mechanical Engineering，Tsinghua University，Beijing 100084，China）

Abstract: Reliable fault diagnosis is crucial to ensuring the safe and efficient operation of high-end industrial equipment. Cross-domain intelligent diagnosis technologies based on unsupervised domain adaptation (UDA) have demonstrated promising application prospects in scenarios such as cross-equipment and variable working transfer diagnosis conditions. However，their effectiveness highly relies on specific prior assumptions regarding the inter-domain label relationships and domain configurations，which largely restricts the generalizability and practicality of UDA techniques in actual industrial fault diagnosis scenarios. To address the above issues，this paper proposes a unified cross-domain fault diagnosis framework applicable to different label and domain configurations. The proposed framework constructs a predictive class confusion (PCC) bias shared across multiple scenarios to guide cross-domain knowledge transfer，enabling adaptation to various transfer diagnostic scenarios. To accurately measure the tendency of the PCC bias，a prototype similarity-based fault discrimination method is developed，which enhances classification robustness and provides reliable prediction distributions to estimate the PCC bias. Then，a label smoothing-based probability calibration method is designed for probability regularization，alleviating the underestimation of the PCC bias caused by overconfident prediction. Experimental validation results on a planetary gearbox transmission system dataset demonstrate that the proposed method achieves an average diagnostic accuracy of 98.37% across four cross-domain diagnostic scenarios with different label and

收稿日期：2025-08-11；**修订日期：**2025-09-27
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52575094, 52105108）；北京市自然科学基金资助项目（3252008）；中国科协青年人才托举工程（2023QNRC001）；北京市科协青年人才托举工程（BYESS2024294）；高端装备机械传动全国重点实验室开放基金资助项目（SKLMT-MSKFKT-202304）；河北省自然科学基金面上项目（E2023105039）；安徽省研究生学术创新项目（RC2500000632）

domain configurations，outperforming state-of-the-art approaches and fully verifying its generality and superiority.

Keywords: intelligent fault diagnosis; multi-scenario cross-domain diagnosis; unified method; transfer learning

在现代工业体系中，航空发动机、风力发电机、电力机车等高端装备是航空航天、能源交通等关键领域的核心，其运行状态直接关乎工业生产的安全性与稳定性。先进的健康监测与智能故障诊断技术作为保障高端装备全生命周期安全可靠服役的核心手段，近年来已成为学术界与工业界关注的研究热点。高效可靠的智能故障诊断技术对于提升装备运维水平与降低设备故障风险具有重要意义[1-2]。

随着传感技术和人工智能的进步，数据驱动的智能故障诊断（intelligent fault diagnosis, IFD）受到了越来越多的关注。与严重依赖物理先验和专家知识的传统故障诊断方法不同，数据驱动的 IFD 方法直接从历史监测数据构建智能诊断模型。借助经典机器学习（machine learning, ML）和深度学习（deep learning, DL）技术强大的特征表示和提取能力，数据驱动的 IFD 方法能够实现自动化的特征提取和高精度故障识别。早期，基于经典 ML 理论的 IFD 方法主要侧重于故障特征工程，旨在从标记数据中学习故障特征与健康状态之间的映射关系[3]。然而，此类方法的性能对特征质量极为敏感，而人工特征提取往往取决于专家经验和领域知识。近年，基于 DL 的 IFD 方法因其在自动特征学习、非线性建模和模式识别方面的优越性能而成为研究热点。例如，卷积神经网络（convolutional neural network, CNN）在振动信号的判别性特征提取方面表现出强大能力，循环神经网络及其变体则在时间序列数据建模和捕捉系统运行状态的动态变化方面效果显著[4]。

尽管基于经典 ML 和 DL 的智能故障诊断技术已取得显著进展，但其在实际工业中部署应用仍然面临若干挑战。由设备运行条件变化、结构差异和传感器部署位置不同所导致的域分布偏移以及在实际工业中故障样本稀缺的普遍问题，限制了安全可靠智能故障诊断模型的建立。无监督自适应（unsupervised domain adaptation, UDA）等迁移学习技术已成为应对上述挑战的有效解决方案[5]。通过从不同设备、不同运行工况条件或相似系统等相关源域进行知识迁移，UDA 技术能够在目标域缺少标签且与源域存在分布差异的条件下有效提升故障诊断性能。基于 UDA 的故障诊断方法核心目标在于通过特征对齐、模型自适应及知识迁移策略，缓解域间分布偏移与标签稀缺问题，以改善跨工况有限、跨设备及样本稀缺场景下的故障识别效果。YANG 等[6]通过在深度残差网络中嵌入多高斯核诱导的最大平均差异（maximum mean discrepancy, MMD），构建了具备跨设备诊断能力的跨域迁移诊断模型。DU 等[7]引入无约束 Wasserstein 距离替代对抗损失，有效降低了消除域偏移的迁移成本，实现了优异的跨域诊断性能。NIU 等[8]则设计了一种嵌入稀疏表示去噪的动态加权域对抗网络，通过稀疏表示去噪抑制噪声干扰，从而实现域不变特征的高效提取。

传统基于迁移学习的故障诊断方法通常假设源域和目标域具有相同的故障类别，在闭集假设下学习域不变知识，但这一前提在实际工业系统中往往难以满足。由于在设备运行过程中，故障状态通常通过主动维护被避免，且设备故障发生具有不可预测性，构建故障类别完全一致的源域与目标域数据集是一项挑战。针对此类问题，现有研究对闭集、部分集和开集等多种跨域诊断场景提出了有效解决方案。JIAO 等[9]提出多加权域对抗网络以解决部分集跨域诊断问题（partial-set cross-domain fault diagnosis, PCFD），该方法通过构建类级与实例级的源域样本加权策略，有效削弱了源域不相关故障类的负面影响。LIU 等[10]设计带源域样本滤波的 PCFD 方法，利用滤波系数与双分类器结构对源域样本进行初步及细粒度过滤，避免了加权策略中对伪标签的过度依赖。此外，此方法通过构建可迁移性评价器量化源域故障样本对域匹配的重要性，并引入跨域注意力机制提升模型迁移性能。WANG 等[11]设计多加权开集域对抗网络以解决开集跨域故障诊断问题（open-set cross-domain fault diagnosis, OCFD），该方法融合类级与域级判别信息识别源域与目标域间的共享故障类别，同时构建离群分类器学习目标样本伪标签，为旋转机械新故障检测提供了有效工具。SUN 等[12]提出结合域分布变化学习的 OCFD 方法，解决了传统迁移诊断方法在未知故障识别中的局限性，该方法通过伪标记与权值归一化构建自监督学习方法，利用目标域潜在分布模式，成功实现了直升机传动系统的开集跨域诊断。此外，为缓解因依赖单一信息源导致的诊断知识不足问题，多源跨域诊断（mult-source cross-domain fault diagnosis, MSCFD）方法也受到研究者们关注。此类方法通过学习并融合多源域知识，提升跨域诊断性能。WU 等[13]开发嵌入注意机制的动态匹配单元方法，根据输入自适应调整模型参数，促进目标域与多源域间的分布对齐，并利用注意机制增强更相关源域的重要性，从而实现多源跨域故障诊断。LIU 等[14]提出双分支特征匹配引导的多源域自适应模型，从外部与内部两个维度实现多源域匹配，获得可靠的跨域故障诊断性能。

上述研究多聚焦于基于标签或者域信息先验预定义场景下的跨域故障诊断问题，一旦标签或者域配置发生变化，上述方法的性能会显著下降。在实际工业场景中，故障类别往往具有不可预测性，且多源数据也并非总能稳定获取。因此，构建适用于不同标签与域配置场景下的统一跨域故障诊断方法成为亟待解决的关键问题。为此，本文提出一种面向不同标签与域配置的统一跨域故障诊断方法。该方法提出一种多场景共享的预测类别混淆（predictive class confusion, PCC）偏差，以适配不同跨域诊断场景。此外，通过集成基于原型相似度的故障判别方法和基于标签平滑的概率校准机制，对特征空间与概率输出进行正则化处理，能够为 PCC 提供可靠的类别分布预测与类间交叉倾向描述。所提方法在统一模型框架下，可为不同标签与域配置场景下的跨域诊断任务提供有效的解决方案。

1　不同场景下的跨域故障诊断描述

跨域故障诊断旨在利用源域的诊断知识提升目标域的迁移诊断性能。此类问题通常假设存在一个包含n_s个源样本的有标签源域数据集$D_s=\{(x_i^s,y_i^s)\}_{i=1}^{n_s}$和一个包含$n_t$个样本的无标签目标域数据集$D_t=\{x_j^t\}_{j=1}^{n_t}$。$D_s$和$D_t$分别服从数据分布$P_s(X_s)$和$P_t(X_t)$，且$P_s(X_s)\neq P_t(X_t)$。由于设备的实际运行场景复杂多变，源域与目标域之间可能存在不同的标签关系以及域配置形式，由此形成了多场景下的跨域故障诊断问题，如图 1 所示。根据域间标签关系的完备性，存在闭集跨域故障诊断（close-set cross-domain fault diagnosis, CCFD），部分集跨域故障诊断（PCFD）等。在 CCFD 问题中，源域和目标域共享标签空间$C_S=C_T$，即源域和目标域拥有相同的故障类别。此场景下通过域对抗训练或者矩匹配来学习域不变表示，使得诊断模型具备跨域可用性。在 PCFD 问题中，目标域仅包含源域中的部分故障类别，即$C_T\subseteq C_S$。PCFD 的难点在于消除源域与目标域之间分布差异的同时，需要有效避免不相关故障类$C_S\backslash C_T$对域自适应的负面影响。

除上述域间标签关系的差异外，参与迁移过程的源域与目标域数量及其相关性差异，还可以构成不同域配置下的跨域故障诊断问题。在多源跨域故障诊断（multi-source cross-domain fault diagnosis, MSCFD）场景中，存在源域集合$S_M=\{D_s^m\}_{m=1}^{M}$和目标域$D_t=\{x_j^t\}_{j=1}^{n_t}$，MSCFD 方法能够通过学习和组合多个相关源域的诊断知识，有效弥补单一源域诊断知识不足的问题。此外，当诊断场景从单个目标域拓展到多个目标域$T_N=\{D_t^n\}_{n=1}^{N}$时，则构成多目标跨域故障诊断（multi-target cross-domain fault diagnosis, MTCFD）问题。MTCFD 问题的核心挑战则在于如何高效学习构建跨域诊断模型，使其在多个目标域上均具备鲁棒的跨域诊断性能，从而避免为每个目标域单独重新训练模型的复杂过程。

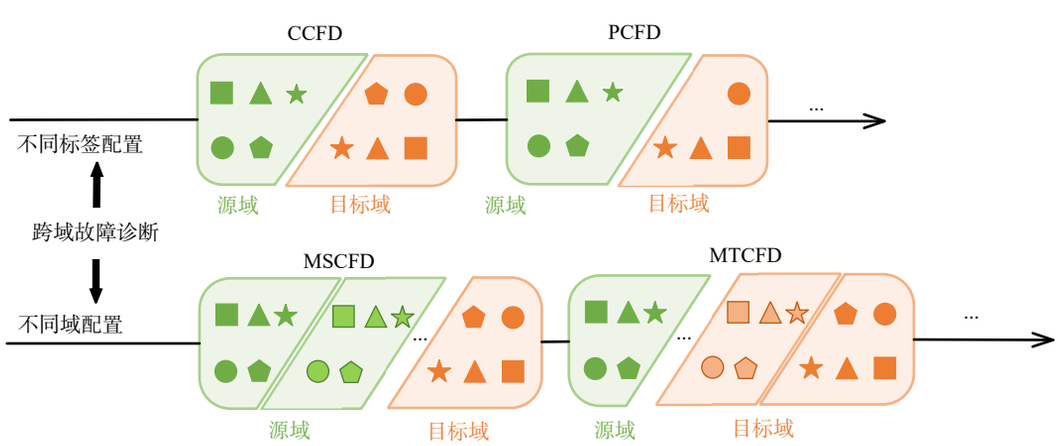


图 1　不同标签和域配置场景下的跨域故障诊断问题

Fig. 1　Cross-domain fault diagnosis problems under different label and domain configurations

2　统一跨域故障诊断方法

本节提出面向不同标签与域配置场景的统一跨域故障诊断方法，所提方法无需针对特定诊断场景重新设计模型，能够实现通用性跨域迁移诊断。所提统一方法的原理图如图 2 所示。该方法基于多场景共享假设，主要包含三个核心模块：基于原型相似性的故障判别模块、基于标签平滑的概率校准机制和最小预测类别混淆模块。其中，基于原型相似性的故障判别模块可提升未知样本的分类鲁棒性，为 PCC 提供可靠预测分布；基于标签平滑的概率校准机制旨在缓解过度自信预测带来的偏差，进而提高类别混淆估计的准确性；PCC 作为适用于多种场景

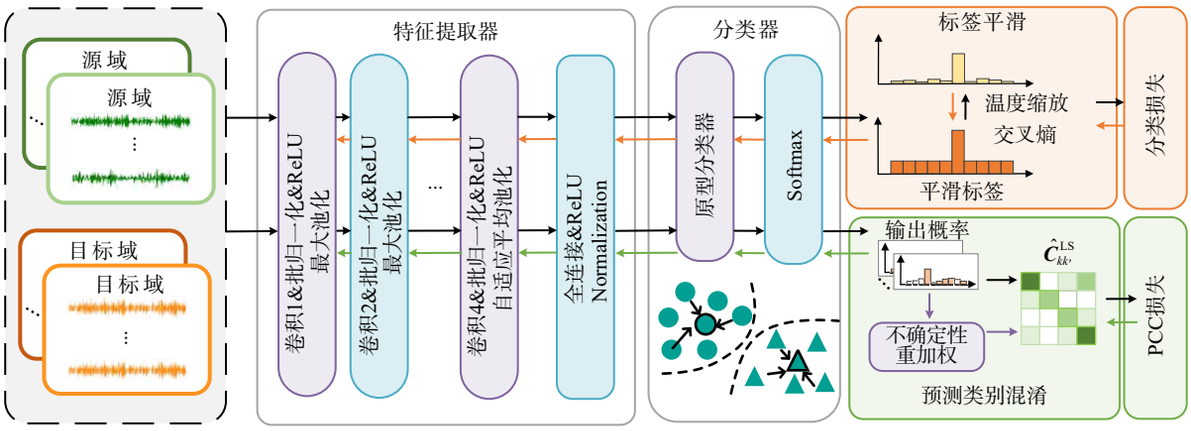


图 2 统一跨域故障诊断方法原理图

Fig. 2 Schematic diagram of unified cross-domain fault diagnostic method

的统一偏置，为不同标签与域配置场景下的有效跨域迁移诊断提供核心支撑。

2.1 基于原型相似性的故障判别模块

所提方法旨在最小化分类器在目标域的预测偏差，且自适应地适配多种跨域诊断场景。然而，传统的分类过程遵循纯判别范式，依赖于样本特征与类别标签间的直接映射进行分类预测[15]。在域间分布差异条件下，该范式对类内分布偏移的鲁棒性较差，进而影响 PCC 的准确估计。为解决这一问题，本文设计基于原型相似性的故障判别方法，用于构建更符合实际的预测概率分布，以真实反映类混淆倾向。所提方法集成样本与故障原型之间的相似性信息以及标签信息，学习具有判别性的类别特征，从而显著提升故障分类性能。

具体而言，该判别框架由两个主要组件构成：特征提取器G_f与原型分类器G_c。特征提取器采用典型的卷积结构，在最后输出层后嵌入归一化层以规范化特征向量，其归一化特征可以表示为$\boldsymbol{f}=G_f(x)\big/\left\|G_f(x)\right\|$。原型分类器$G_c$则定义为$\boldsymbol{W}_{G_c}=[\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\cdots,\boldsymbol{\mu}_K]$，其中$\boldsymbol{\mu}_k$为无偏权重向量，表示第$k$个故障类别的原型。对于归一化后的特征向量$\boldsymbol{f}$，分类器通过内积操作$\boldsymbol{W}_{G_c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$计算该特征与所有类别原型之间的相似度分数。最终，通过 Softmax 函数得到类别概率分布，其过程可表示为：

$$\hat{p}_k=\frac{\exp(z_k)}{\sum_{k'=1}^{K}\exp(z_{k'})} \tag{1}$$

式中，$\hat{p}_k$表示样本属于第 k 类的概率；K为源故障类总数；z 表示原型分类器的输出，$z=G_c(G_f(x))$，z_k和$z_{k'}$分别表示$\boldsymbol{z}$向量中对应第k类和第k'类的元素。

原型分类器中，故障原型$[\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\cdots,\boldsymbol{\mu}_K]$通过神经网络的线性层直接定义，每个原型向量的维度与特征提取器输出的隐藏特征维度一致。原型本质上是分类器的无偏权重集合，可视为对应类别在特征空间中的中心表示。采用神经网络线性层参数能够直接定义原型，无需额外引入新的参数去单独存储或更新原型。在有监督训练阶段，故障原型的更新与常规分类层权重训练过程一致，优化目标是最小化交叉熵损失。原型学习过程如图 3 所示，模型鼓励各类别原型$\boldsymbol{\mu}_i$在特征空间中与源域中相应类别的样本x_i的映射f_i紧密对齐，从而促使类内样本形成紧凑聚类，提升分类的鲁棒性。

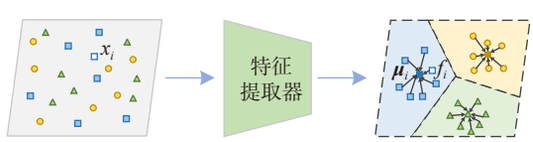


图 3 原型学习过程

Fig. 3 Prototype learning process

2.2 基于标签平滑的概率校准机制

尽管基于原型相似性的故障判别方法提升了预测类别混淆偏差的可靠性，但由监督训练引入的过度自信偏差仍可能会削弱真实类混淆倾向。

具体而言，传统的 One-hot 标签编码方式通过硬约束迫使模型将全部预测概率赋予真实类别，同时将其他类别的概率压制为 0。上述硬标签监督限制了模型对预测不确定性的表达能力，降低了 PCC 的精确性。在跨域故障诊断场景中，仅采用有标记源域数据训练的分类模型，对目标域样本往往会产生过度自信的预测结果，难以有效体现对未知样本或分布外样本的不确定性判断。更重要的是，在该训练范式下，构建类混淆矩阵所需的非零类别概率值被过度压制，导致对类间真实混淆关系的低估。

为此，本文设计了一种基于标签平滑的概率校准机制。该机制通过将真实标签的硬目标转化为软目标，可有效抑制模型对训练数据的过拟合倾向，并缓解预测过程中的过度自信问题。

具体而言，在标准分类任务中，通常采用 One-hot 编码表示真实标签。标签平滑方法引入一个平滑因子α，将原始的硬标签向量转换为软概率分布，其形式如下所示：

$$y_{i,k}^{s,\mathrm{LS}}=\begin{cases}1-\alpha, & k=y_i^s\\ \alpha/(K-1), & \text{其他}\end{cases} \tag{2}$$

式中，α为平滑因子；$k=1,2,\cdots,K$，其中 K 为源域故障类总数。

经转换得到的软标签向量将部分概率分配给非真实类别，既维持了标签监督的主导作用，又为模型预留了表达预测不确定性的空间，从而在跨域场景下可以更真实地反映类别间的混淆关系。基于此，定义标签平滑后的分类损失为：

$$L_{\mathrm{CE}}^{\mathrm{LS}}=\frac{1}{n_s}\sum_{i=1}^{n_s}l_{\mathrm{ce}}(G_c(G_f(x_i^s)),y_i^{s,\mathrm{LS}}) \tag{3}$$

式中，l_{ce}为标准交叉熵损失；x_i^s表示第i个源样本；$y_i^{s,\mathrm{LS}}$为对应的平滑软标签。

基于标签平滑的概率校准机制鼓励模型考虑其他类别的概率，减轻模型过于自信的预测倾向。此外，所提基于标签平滑的概率校准机制通过温度缩放进一步平滑预测输出，其形式可表示为：

$$\hat{p}_k=\frac{\exp(z_k/\tau)}{\sum_{k'=1}^{K}\exp(z_{k'}/\tau)} \tag{4}$$

式中，$\hat{p}_k$与第k类的概率相关；τ为控制输出分布锐度的温度参数。

通过标签平滑和温度缩放，基于标签平滑的概率校准机制可使预测分布趋于平缓，使易混淆类别的预测概率更贴近真实不确定性水平。上述机制在跨域场景中尤为重要，由于域间分布差异更易引发预测偏差，该机制能使模型在学习过程中更鲁棒地应对此类潜在预测混淆情形，进而提升模型的跨域适应能力。

2.3　最小预测类别混淆模块

现有跨域诊断方法多依赖特定的标签或者域配置假设，因此需针对不同配置场景进行专门设计或修改。例如，在不同标签配置下，必须精心设计重加权策略以排除源域或目标域特有的故障类别[16]。在不同域配置下，有效迁移策略的开发也面临显著挑战。本研究旨在构建一种无需针对特定场景调整模型即可处理多种配置场景的统一跨域诊断方法，以提高跨域诊断方法的通用性。本质而言，无论标签或者域配置如何变化，跨域故障诊断的核心挑战都是减小分类器在目标域中的预测偏差。为此，本研究将 PCC 设计为一种通用归纳偏差，并构建校准策略以准确度量类间混淆倾向，从而在统一框架下适配多种配置场景下的跨域故障诊断问题。所提预测类别混淆模块如图 4 所示。

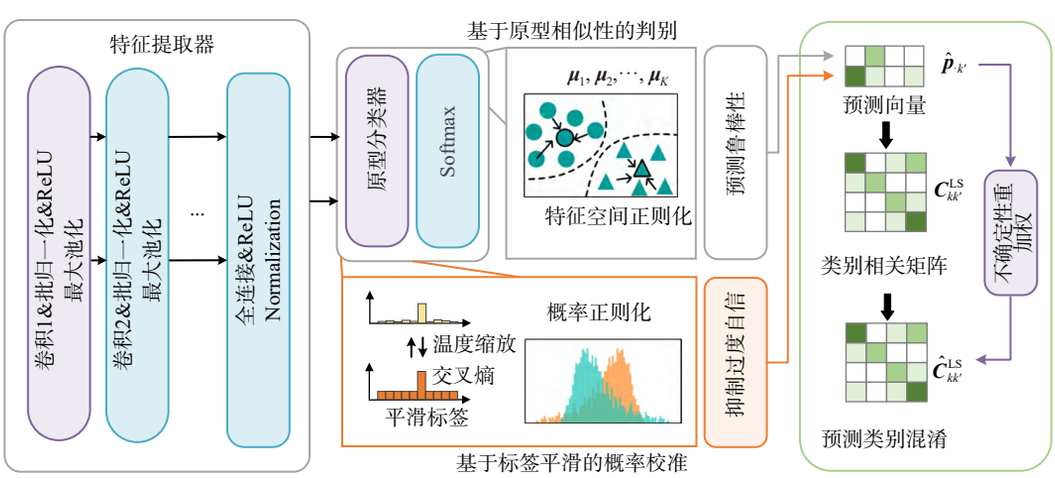


图 4　最小预测类别混淆模块

Fig. 4　The minimum predictive class confusion module

记目标域一个批次样本为$X_t=\{x_j^t\}_{j=1}^{B}$，原型分类器输出的概率矩阵为$\hat{Y}_t=[\hat{p}_{j,k}^t]\in\mathbb{R}^{B\times K}$，其中$\hat{p}_{j,k}^t=G_{c,k}(G_f(x_j^t))$表示第$j$个目标样本属于第$k$个故障类别的预测概率。为了衡量输出概率中的类别混淆强度，有必要初步估计类与类之间的混淆倾向，计算公式如下：

$$\boldsymbol{C}_{kk'}^{\mathrm{LS}}=\hat{\boldsymbol{p}}_k^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{p}}_{\cdot k'} \tag{5}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{p}}_{\cdot k}$表示批中所有样本中对应于第$k$类的预测概率向量；$\hat{\boldsymbol{p}}_{\cdot k'}$表示批中样本对应于第$k'$类的预测概率向量。

式 (5) 通过计算两组类概率向量的内积量化两组类概率之间的相关性。$\boldsymbol{C}_{kk'}^{\mathrm{LS}}$取值越高，表明模型越容易混淆第$k$类和第$k'$类。在进行目标域样本分类时，模型可能会产生高置信度的误分类，这使得类相关矩阵难以捕捉类别之间真实的混淆关系。本文提出的基于原型相似性的故障判别方法和基于标签平

滑的概率校准机制为类相关矩阵提供了更加鲁棒和平坦的预测概率分布，有效缓解了因过度自信预测而造成的类间混淆低估问题。

此外，值得注意的是，不同样本对 PCC 的贡献存在差异。尤其是当样本的预测概率分布呈现多峰值特征时，表明分类器对该样本的类别归属存在明显不确定性，此类模糊样本往往能为揭示故障类别间的真实混淆关系提供更具价值的信息。为突出此类样本的贡献，构建如下重加权机制：

$$W_{jj}=\frac{B(1+\exp(H(\hat{p}_j^t)))}{\sum_{j'=1}^{B}(1+\exp(H(\hat{p}_{j'}^t)))} \tag{6}$$

式中，W_{jj}表示在类别混淆估计中为样本x_j^t分配的权重；$H(\cdot)$表示预测熵值。

式 (6) 为具有更高熵值的样本分配更大权重，从而降低信息量较低的样本影响。结合上述重加权机制，最终的预测类别混淆偏差 PCC 定义如下：

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{kk'}^{\mathrm{LS}}=(\hat{\boldsymbol{p}}_{\cdot k}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\hat{\boldsymbol{p}}_{\cdot k'}) \tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{W}$为权重矩阵，其元素为W_{jj}。

式 (7) 通过强化不确定性较高样本的贡献，削弱可能存在误判的高置信度预测的影响，显著提升了对类别混淆关系的感知。目标域中的预测类别混淆偏差，本质上反映了分类器将样本错误归类于真实故障类别与易混淆类别之间的倾向程度。理想情况下，每个样本的预测分布应在某个明确的类别周围形成显著峰值，而非分布在多个竞争类别上。因此，最小化式 (7) 所定义的预测类别混淆偏差，有望抑制类别模糊性，进而增强分类器在多种跨域诊断场景的泛化能力。这一目标通过最小化 PCC 损失实现，公式如下：

$$L_{\mathrm{PCC}}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{k'\neq k}^{K}|\hat{\boldsymbol{C}}_{kk'}^{\mathrm{LS}}| \tag{8}$$

所提方法通过式 (8) 隐式捕捉域不变的类别关系，从而在不依赖显式特征对齐的前提下，仍能够有效维持跨域诊断场景下的类别区分能力。

2.4 不同标签和域配置下的跨域故障诊断

本节将详细阐述所提统一方法在各类跨域诊断场景中的应用流程，为不同标签与域配置场景下的跨域故障诊断任务提供通用解决方案。

2.4.1 不同标签配置下的跨域故障诊断

作为一种与场景无关的共享归纳偏差，PCC 量化了原型分类器的决策边界模糊性，而且不限定于任何固定的标签集配置。给定源域$D_S=\{(x_i^s,y_i^s)\}_{i=1}^{n_s}$和目标域$D_T=\{x_j^t\}_{j=1}^{n_t}$，所提统一框架旨在联合最小化源域分类损失与目标域 PCC 损失，其优化目标可表示为：

$$\min_{\theta_{G_f},\theta_{G_c}}\frac{1}{n_s}\sum_{i=1}^{n_s}L_{\mathrm{CE}}^{\mathrm{LS}}(x_i^s,y_i^{s,\mathrm{LS}})+\lambda\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}L_{\mathrm{PCC}}(x_j^t) \tag{9}$$

式中，θ_{G_f}和θ_{G_c}分别表示特征提取器G_f和原型分类器G_c的参数；λ为损失权衡参数。

对于任意标签配置下的跨域诊断任务，$\hat{\boldsymbol{C}}_{kk'}^{\mathrm{LS}}$均能有效反映样本被错误分类的倾向程度。这一度量不受源域与目标域标签集包含关系的约束，仅聚焦于分类器对目标域中故障类别的实际区分能力。

在部分集场景中，所提方法无需显式识别源域或目标域的私有类别，从而避免了共享类别与私有类别错配的潜在风险。原型分类器经过源域有监督训练，其将目标域样本分配至源域私有类别的倾向性较低，PCC 矩阵中对应元素取值较小，因此源域私有类别的干扰可忽略。上述特性使得所提方法在处理标签空间非对称场景时，无需额外设计类别筛选机制，仅通过 PCC 矩阵的内在属性即可适配部分集跨域故障诊断任务，从而体现了所提方法对复杂标签配置场景的兼容性。

不同标签配置跨域故障诊断场景下，模型参数更新过程可以描述为：

$$\theta_{G_f}^t\leftarrow\theta_{G_f}^{(t-1)}-lr\left(\frac{\partial L_{\mathrm{CE}}^{\mathrm{LS}}}{\partial\theta_{G_f}}+\lambda\frac{\partial L_{\mathrm{PCC}}}{\partial\theta_{G_f}}\right) \tag{10}$$

$$\theta_{G_c}^t\leftarrow\theta_{G_c}^{(t-1)}-lr\left(\frac{\partial L_{\mathrm{CE}}^{\mathrm{LS}}}{\partial\theta_{G_c}}+\lambda\frac{\partial L_{\mathrm{PCC}}}{\partial\theta_{G_c}}\right) \tag{11}$$

式中，lr表示学习率。

2.4.2 不同域配置下的跨域故障诊断

所提方法具备域配置无关性，即无论针对单源域-单目标域、多源域-单目标域还是单源域-多目标域等不同域设置场景，其核心优化逻辑均一致。给定源域集合$S_M=\{D_s^m\}_{m=1}^{M}$与目标域集合$T_N=\{D_t^n\}_{n=1}^{N}$，优化目标在不同域设置下表示如下：

$$\min_{\theta_{G_f},\theta_{G_c}}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}_{D_s^m}L_{\mathrm{CE}}^{\mathrm{LS}}(x_{i,m}^s,y_{i,m}^{s,\mathrm{LS}})+\lambda\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}_{D_t^n}L_{\mathrm{PCC}}(x_{j,n}^t) \tag{12}$$

式中，$\mathbb{E}$表示期望。

通过达到式 (9) 所示的优化目标，该方法隐式捕捉域不变知识，从而避免对复杂域对齐过程的依赖。其优势在于无需为每个源域单独设计适配策略，也不必预先定义源域与目标域的匹配关系，仅需通过统一的预测类别混淆偏差最小化目标，即可实现多源域知识向目标域的高效迁移。对于 MTCFD 问题，所提方法能同时最小化所有目标域样本的 PCC 损失。上述过程不依赖域标签，且不受多目标域之间分布偏移的影响。通过将所有目标域样本纳入 PCC 损失，所提统一方法可学习每个目标域上的类别判别模式，实现源域知识向多个目标域的自适应适配。

不同域配置跨域故障诊断场景下，模型参数更新过程可以描述为：

$$\theta_{G_f}^{t} \leftarrow \theta_{G_f}^{(t-1)} - lr\left(\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial \mathbb{E}_{D_s^m} L_{\mathrm{CE}}^{\mathrm{LS}}}{\partial \theta_{G_f}} + \lambda \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial \mathbb{E}_{D_t^n} L_{\mathrm{PCC}}}{\partial \theta_{G_f}}\right) \tag{13}$$

$$\theta_{G_c}^{t} \leftarrow \theta_{G_c}^{(t-1)} - lr\left(\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial \mathbb{E}_{D_s^m} L_{\mathrm{CE}}^{\mathrm{LS}}}{\partial \theta_{G_c}} + \lambda \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial \mathbb{E}_{D_t^n} L_{\mathrm{PCC}}}{\partial \theta_{G_c}}\right) \tag{14}$$

3　行星齿轮箱传动系统试验验证

为全面评估所提方法的有效性，在行星齿轮箱传动系统数据集上针对 CCFD、PCFD、MSCFD 和 MTCFD 等不同标签与域配置场景进行试验验证。

3.1　数据集描述

行星齿轮箱传动系统数据集的原始振动信号采集自图 5 所示的试验平台，该平台由冷却水箱、磁粉制动器、行星齿轮箱、感应电机及逆变器组成[17]。信号采样频率为 20 kHz，涵盖了行星齿轮箱传动系统中常见的多种故障模式。试验数据集包含 5 种健康状态，标记为 0~4，分别对应：正常状态、输入轴轴承外圈裂纹、行星轴承外圈裂纹、行星齿轮齿根裂纹、内齿圈缺齿。针对每种故障部件，在不同的固定转速 600、900 和 1200 r/min 等试验条件下开展数据采集。数据集的详细说明及试验参数设置，如表 1 和 2 所示。在各工况下，每种健康状态包含 588 个样本，单个样本长度为 2048 个采样点。



图 5　行星齿轮箱传动系统试验台与典型故障

Fig. 5　Experimental platform of planetary gearbox transmission system and typical faults

表 1　行星齿轮箱传动系统数据集的工况描述

Tab. 1　Working conditions description of the planetary gearbox transmission system dataset

工况	转速，电流负载	工况	转速，电流负载
W1	600 r/min, 0 A	W8	1200 r/min, 0.2 A
W2	600 r/min, 0.4 A	W9	1200 r/min, 0.4 A
W3	600 r/min, 0.6 A	W10	1200 r/min, 0.6 A
W4	900 r/min, 0 A	W11	1500 r/min, 0 A
W5	900 r/min, 0.4 A	W12	1500 r/min, 0.2 A
W6	900 r/min, 0.6 A	W13	1500 r/min, 0.4 A
W7	1200 r/min, 0 A	W14	1500 r/min, 0.6 A

3.2　对比方法

本研究选取了多种主流的跨域迁移故障诊断方法作为对比方法，在不同标签与域配置场景下与所提统一框架展开系统性的诊断性能对比。

（1）CCFD 场景。CNN 是所提方法的骨干网络，因此被选为对比方法的基准模型。最大均值差异（maximum mean discrepancy, MMD）通过将多核 MMD 嵌入深度网络进行域不变特征学习，以最小化分布偏移[18]。域对抗神经网络（domain adversarial neural network, DANN）利用对抗训练实现分布对齐，同时保持类别可分性[19]。联合最大均值差异（joint maximum mean discrepancy, JMMD）通过联合匹配边缘分布和条件分布进一步优化自适应过程，从而提升迁移诊断性能[20]。

（2）PCFD 场景。部分对抗域自适应（partial

表 2 不同场景下的跨域诊断任务

Tab. 2 Cross-domain diagnosis tasks in different scenarios

场景	诊断任务	迁移场景	故障类别	场景	诊断任务	迁移场景	故障类别
CCFD	C1	W4→W13	0, 1, 2, 3, 4	MSCFD	S1	W1, W4→W11	0, 1, 2, 3, 4
	C2	W12→W5	0, 1, 2, 3, 4		S2	W11, W12→W1	0, 1, 2, 3, 4
	C3	W1→W11	0, 1, 2, 3, 4		S3	W1, W2, W3→W14	0, 1, 2, 3, 4
	C4	W4→W6	0, 1, 2, 3, 4		S4	W4, W7, W11→W6	0, 1, 2, 3, 4
PCFD	P1	W4→W13	0, 2, 3, 4	MTCFD	T1	W1→W4, W9	0, 1, 2, 3, 4
	P2	W12→W5	0, 2, 4		T2	W13→W3, W10	0, 1, 2, 3, 4
	P3	W1→W11	0, 1, 2, 3		T3	W4→W8, W9, W10	0, 1, 2, 3, 4
	P4	W4→W6	0, 3, 4		T4	W1→W3, W10, W14	0, 1, 2, 3, 4

adversarial domain adaptation, PADA)在对抗训练过程中通过类级加权对非共享源域类别进行过滤,以减轻负迁移[21]。其结构和参数与上述 DANN 保持一致。选择性对抗网络(selective adversarial network, SAN)采用类似的加权策略,但构建类特定的域判别器实现更精细的共享类别对齐[22]。加权对抗迁移网络(weighted adversarial transfer network, WATN)通过实例级加权过滤无关的源域样本,借助对抗学习实现选择性域对齐[23]。

(3)MSCFD 场景。CNN、MMD、DANN 和 JMMD 被选为多源跨域诊断问题的对比方法。上述方法将多个源域的数据合并作为源数据,且不考虑特定源域的标签。多源域自适应网络(multi-source domainadaptation network, MSDAN)采用共享特征提取器和域特定分类器来处理多源数据,并与目标域进行对齐[24]。多源域特征自适应网络(multi-source domain feature adaptation network, MDFAN)构建了域内和域间对齐机制,并利用多分类器的预测一致性实现鲁棒分类[25]。

(4)MTCFD 场景。在不使用域标签的情况下,CNN、MMD、DANN 和 JMMD 将多个目标域数据合并作为目标样本,以适应多目标场景。多目标域自适应网络(multi-target domain adaptation network, MTDAN)通过引入多域判别器对对抗网络进行扩展,实现每个目标域与源域的对齐[26]。残差深度子域自适应网络(residual depth subdomain adaptive network, RDSAN)引入多个局部最大均值差异对齐每个源域-目标域配对中相关的故障子域[27]。

为确保对比评估的公平性,对比方法与所提统一框架采用相似的骨干网络架构和模型训练参数。

3.3 算法环境与参数设置

本研究中的所有代码和试验均基于 Python3.8 环境下的 PyTorch 框架实现。试验在配备 GeForce RTX 3060 GPU 的计算设备上进行。模型参数详细设置如表 3 所示。训练过程中,模型温度参数 τ 设置为 0.05,损失权衡参数 λ 设置为 1。训练参数 Batch size 设为 64,最大 Epoch 轮次为 200,参数优化采用 Adam 优化算法,初始学习率为 0.001。为降低随机性的影响,所有试验均独立重复 5 次,最终测试准确率取平均值。

表 3 模型参数设置

Tab. 3 Setting of model parameters

参数	参数设置	参数	参数设置
温度参数 τ	0.05	Batch size	64
损失权衡参数 λ	1	Epoch轮次	200
参数优化算法	Adam	初始学习率	0.001

3.4 试验结果及分析

3.4.1 测试精度对比与分析

CNN、MMD、DANN、JMMD 以及所提方法在 CCFD 任务上的测试准确率结果如图 6 所示。未采用迁移机制的基准模型 CNN 在所有任务中准确率均显著较低,平均准确率仅为 68.86%,表明域偏移对诊断性能存在显著负面影响。集成矩匹配机制的 MMD 方法与基于域对抗学习的 DANN 方法,均通过消除域间分布差异使平均准确率提升 25% 以上,分别达到 94.52% 和 94.66%。同时考虑边缘分布与条件分布对齐的 JMMD 方法的准确率仅次于所提方

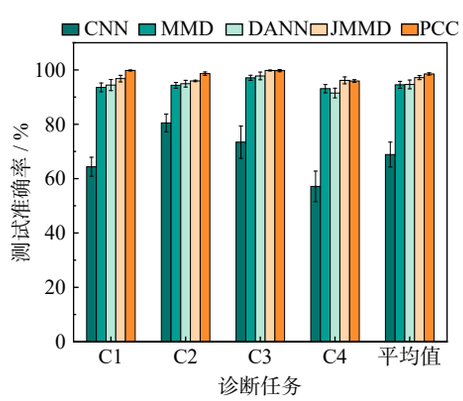


图 6 CCFD 任务上不同方法的跨域诊断精度

Fig. 6 Cross-domain diagnostic accuracy of different methods on CCFD tasks

法, 实现了 97.18% 的平均准确率。所提方法在 4 项 CCFD 任务中取得 98.52% 的平均准确率且准确率标准差相对较小, 表明其不仅具有更高的诊断精度, 还具备更稳定的跨域适应能力。

PCFD 任务上不同方法的跨域诊断精度如图 7 所示。相较于基准 CNN、MMD、DANN 以及 JMMD 等传统跨域诊断方法的性能得到显著提升, 诊断精度均超过 80%, 表明域对齐机制对缓解部分集场景下的域偏移仍有一定作用。然而, 这类方法对源域与目标域进行全局分布对齐时, 源域私有类别的存在易引发负迁移, 即模型可能将目标域样本错误关联至源域特有类别, 导致诊断精度下降。PADA、SAN 及 WATN 等针对部分集场景设计的方法, 通过引入类级或实例级源样本加权策略, 可在训练过程中削弱无关源域类别的负面影响。其中 SAN 与 WATN 在 4 项 PCFD 任务的平均诊断准确率均超过 90%, 但仍低于所提方法。其原因在于上述方法通过目标域样本的预测标签分布构建加权策略以调整源域样本权重, 这一过程不仅引入了权重估计误差风险, 还可能因预测偏差导致源-目标域对齐偏移, 进而限制诊断性能。相比之下, 所提方法无需对无关类进行显式过滤, 而是通过降低分类器在目标域样本上的预测混淆, 有效缓解了噪声权重导致的负迁移。

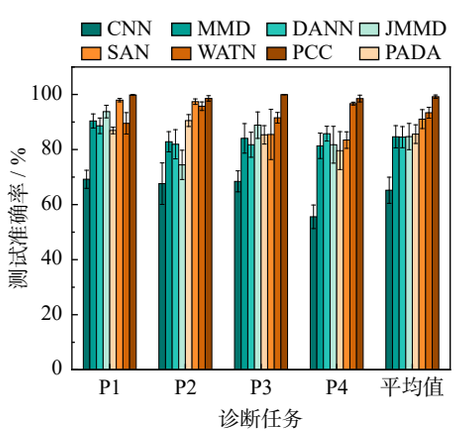


图 7　PCFD 任务上不同方法的跨域诊断精度

Fig. 7　Cross-domain diagnostic accuracy of different methods on PCFD tasks

不同方法在 MSCFD 和 MTCFD 任务上的跨域诊断精度分别如图 8 和 9 所示。在 MSCFD 任务中, MMD、DANN 和 JMMD 等方法通过融合多源域数据解决多源域迁移问题, 但直接在共享特征空间中对存在分布差异的多源域进行强制对齐, 可能引发源域间的干扰, 导致诊断性能下降。MSDAN 和 MDFAN 通过学习并融合多源诊断知识一定程度上缓解了这一问题, 平均精度均超过 97%。但这类方法性能高度依赖域标签的可用性, 需要明确区分每个样本所属的源域, 这在实际工业场景中往往难以满足, 限制了其应用范围。相比之下, 所提方法无需依赖域标签, 通过直接优化多源域分类损失与目标域 PCC 损失, 实现多源域知识的组合与迁移。在 4 项 MSCFD 任务中, 所提方法实现了 98.35% 的平均诊断精度, 不仅体现了其在多源域场景下的性能优势, 也验证了其无需显式域信息即可适配复杂源域配置的优异性能。

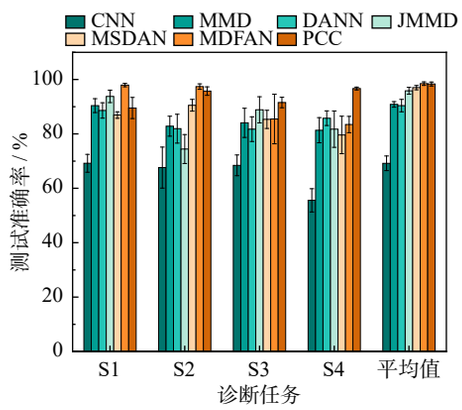


图 8　MSCFD 任务上不同方法的跨域诊断精度

Fig. 8　Cross-domain diagnostic accuracy of different methods on MSCFD tasks

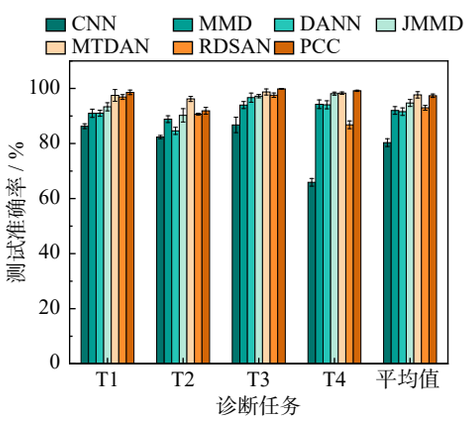


图 9　MTCFD 任务上不同方法的跨域诊断精度

Fig. 9　Cross-domain diagnostic accuracy of different methods on MTCFD tasks

类似地, 在 MTCFD 场景中, 基于传统无监督域自适应的方法通过直接融合多个目标域进行统一跨域迁移, 但这种方式难以同时适配不同目标域的独特分布特性, 性能提升有限。集成多目标跨域迁移策略的 MTDAN 和 RDSAN 实现了一定性能改进, 分别取得 97.68% 和 92.98% 的平均诊断精度。相比之下, 所提方法有效放宽了对域标签可用性的假设, 在 4 项多目标任务中取得 97.37% 的平均诊断精度, 虽略低于 MTDAN, 但避免了多目标域适配策略设计的复杂性, 且无需依赖目标域标签信息, 在工业场景中更具部署灵活性。

3.4.2　特征可视化结果分析

为深入评估不同方法的跨域迁移诊断性能, 本

文针对 4 种不同跨域故障诊断场景，分别对所提方法与特定场景下的次优或最优对比方法的特征分布进行了可视化对比分析，结果如图 10 所示。图 10 中，S 和 T 分别表示源域和目标域，数字表示故障标签。

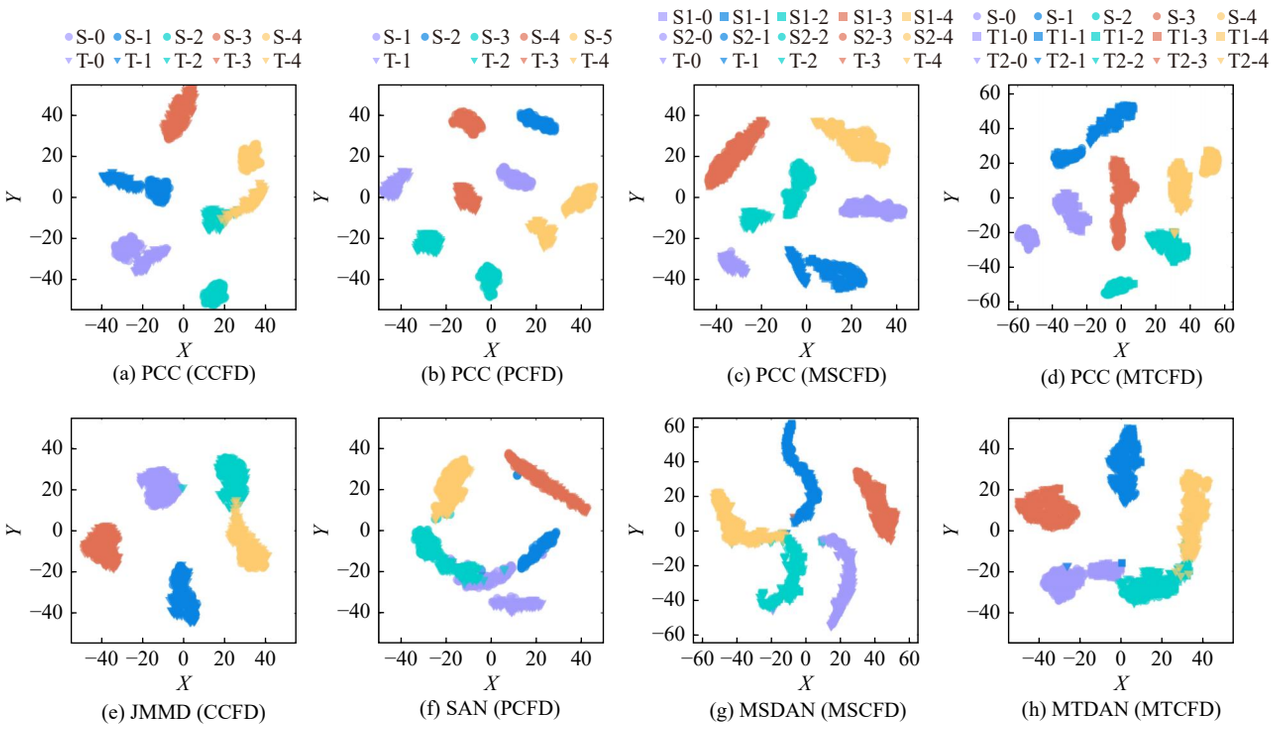


图 10 特征可视化结果对比

Fig. 10 Comparison of feature visualization results

在图 10(a) 和 (b) 所示的 CCFD 与 PCFD 场景中，所提方法的特征可视化结果呈现出紧凑的类内聚集性和清晰的类间分离性，验证了其有效性。值得一提的是，源域与目标域特征并未按不同域严格对齐或聚集，这与传统域自适应方法形成对比。这一结果符合预期，因为所提统一框架不依赖跨域显式分布对齐，而是聚焦于类别特定语义。该方法促使原型相似性分类器最小化目标域中的 PCC 损失，避免了显式特征对齐，从而降低了 JMMD、SAN 和 MMWLN 等基于分布匹配方法中常见的负迁移风险，尤其在不同标签配置下表现突出。对于 MSCFD 和 MTCFD 任务，尽管多个源域或目标域引入了额外的域差异，所提方法仍能保持结构良好且具有强区分性的特征聚类，验证了其跨域特征学习能力。多个源域或目标域的特征聚集在同一区域内，同时不同故障类别间保持清晰的区分性。尽管图 10(g) 和 (h) 所示的 MSDAN 和 MTDAN 方法能通过域标签辅助对齐域间边缘分布，但其特征可视化结果显示类别分布存在明显交叠。总体而言，所提方法在不同标签与域配置场景下均能学习到鲁棒的类别判别特征，验证了方法的有效性与场景通用性。

3.4.3 深入性能分析

为深入分析所提方法的有效性，在训练过程中跟踪了样本的预测概率变化，并对不同轮次的概率分布特征进行了统计分析。以 C2 任务为例，图 11 展示了所提方法在不同训练阶段真实类别与其他类别的预测概率分布。图 11(a) 所示方法采用传统分类范式，且未引入基于标签平滑的概率校准机制。结果显示模型在训练初期能够清晰区分不同类别的概率差异，实现高置信度的类别判别。在有监督训练过程中，模型对样本的概率预测逐渐呈现过度自信倾向，即使对于错误分类的样本也会输出高预测概率。这种过度集中的概率分布会显著削弱预测类别混淆偏差的强度，尤其对错误分类样本而言，其真实混淆关系难以被有效捕捉。

相比之下，图 11(b) 所示的集成基于原型相似性判别与基于标签平滑概率校准的所提方法，在训练初期并未表现出对特定类别的偏向，而是将概率更均匀地分配至多个候选类别。即使在训练后期，也能有效抑制预测过度自信的问题，概率分布不会过度偏向固定类别。此外，相比于图 11(a)，所提方法的在非真实类上的错误预测概率明显降低，表明基于原型相似性的故障判别模块能够显著提升模型在未知样本分类上的鲁棒性，降低错误预测风险。上述特性使得所提方法能够输出准确、符合真实预测不确定性的预测概率分布，避免因高置信度错误分类样本的干扰而导致的估计偏差，为后续预测类别混淆偏差的精准量化提供可靠支撑。

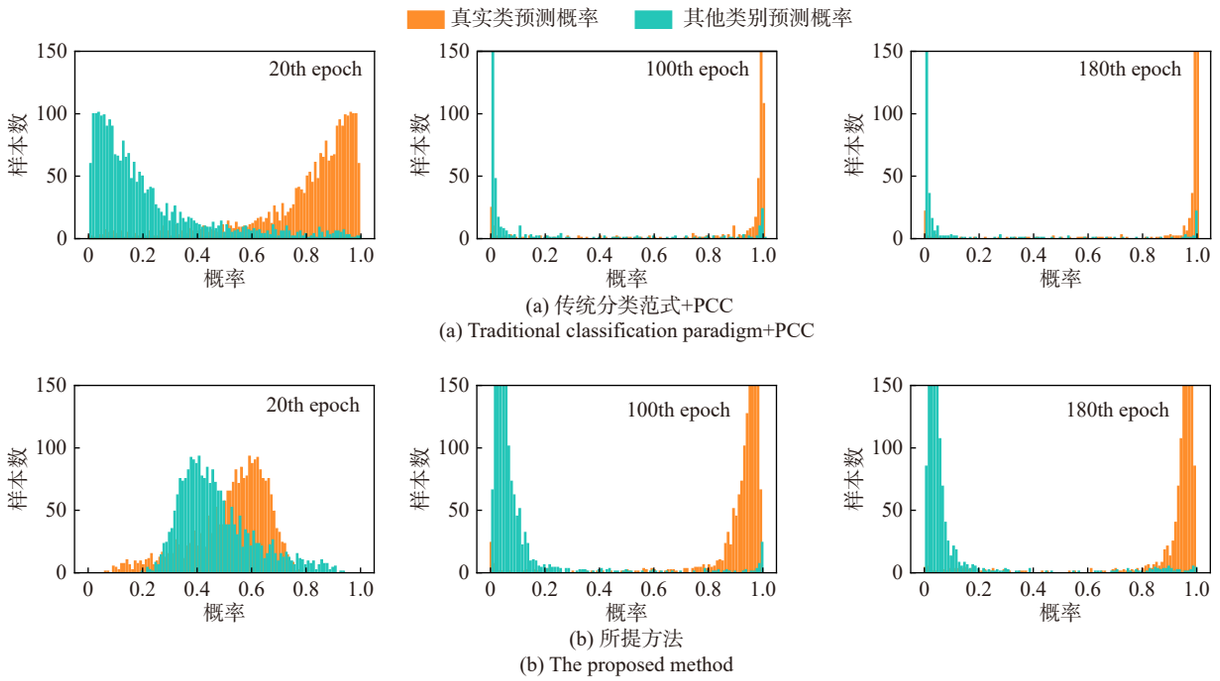


图 11　所提方法在不同训练阶段的预测概率分布

Fig. 11　The distribution of predicted probability of proposed method in different epochs

4　结　论

为解决现有跨域故障诊断方法仅适用于特定预设标签与域配置场景的局限性，本文提出一种面向不同标签与域配置的统一跨域故障诊断方法。该方法基于多场景共享假设，通过最小化分类器在目标域的预测类别混淆偏差，实现多场景跨域故障诊断。为获取能真实反映类别不确定性的预测分布，构建了基于原型相似性的判别方法以正则化特征空间，提升分类鲁棒性。此外，为减轻过度自信的错误预测对混淆估计的影响，设计了基于标签平滑的概率校准机制，鼓励分类考虑更多候选类别。行星齿轮箱传动系统数据集试验结果表明，所提方法在不同标签与域配置的跨域诊断任务中均展现出有效性与通用性。与各类场景特定跨域诊断方法相比，所提统一跨域故障诊断方法仍能取得优异性能。

未来研究将进一步聚焦构建适用于时变工况跨域迁移场景的统一跨域故障诊断框架，尤其是针对从固定工况到时变工况的跨域迁移诊断问题。

参考文献：

[1] 陈凯，丁传仓，王报祥，等. 面向变工况机械设备智能故障诊断的可解释三特征提取器迁移网络 [J]. 振动工程学报，2025，38(6)：1232-1241.
CHEN Kai，DING Chuancang，WANG Baoxiang，et al. Interpretable triple feature extractor transfer network for intelligent fault diagnosis of mechanical equipment under variable working conditions[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(6)：1232-1241.

[2] 秦毅，杨瑞，赵丽娟，等. 面向轴承故障诊断的无监督噪声自适应匹配追踪算法展开去噪网络 [J]. 机械工程学报，2025，61(12)：26-38.
QIN Yi，YANG Rui，ZHAO Lijuan，et al. Unsupervised noise-adaptive unrolled matching pursuit denoising network for bearing fault diagnosis[J]. Journal of Mechanical Engineering，2025，61(12)：26-38.

[3] 苗永浩，石惠芳，李晨辉，等. 周期精炼的最大相关峭度解卷积在滚动轴承微弱故障特征提取中的应用 [J]. 振动工程学报，2025，38(6)：1317-1325.
MIAO Yonghao，SHI Huifang，LI Chenhui，et al. Period-refined maximum correlated kurtosis deconvolution method for weak fault feature extraction in rolling bearings[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(6)：1317-1325.

[4] LEI Z H，LI Z S，WEN G R，et al. SFUGDA：source-free unsupervised multiscale graph domain adaptation network with privacy-preserving for cross-domain fault diagnosis of offshore wind turbines[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2025，235：112896.

[5] 林翠颖，陈科，吕宇璠，等. 元类增量迁移学习驱动的跨域终身智能诊断方法 [J]. 振动工程学报，2025，38(6)：1270-1279.
LIN Cuiying，CHEN Ke，LYU Yufan，et al. Meta-class-incremental transfer learning method for cross-domain lifelong intelligent diagnosis[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(6)：1270-1279.

[6] YANG B，LEI Y G，JIA F，et al. A polynomial kernel induced distance metric to improve deep transfer learning for

fault diagnosis of machines[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2020，67(11)：9747-9757.

[7] DU K N，WU D H，BAO K，et al. Unconstrained Wasserstein distance and multi-attention fusion convolutional neural network guided adversarial domain adaptation for cross-domain fault diagnosis of machines[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2025，234：112797

[8] NIU M G，JIANG H K，SHAO H D. Dynamic weighted adversarial domain adaptation network with sparse representation denoising module for rotating machinery fault diagnosis[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence，2025，142：109963.

[9] JIAO J Y，ZHAO M，LIN J. Multi-weight domain adversarial network for partial-set transfer diagnosis[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2022，69(4)：4275-4284.

[10] LIU X L，LIU F Z，HAN T Z，et al. Novel source domain filtering dual classifier network with adaptive pseudo label refinement for partial domain fault diagnosis[J]. Neurocomputing，2025，620：129260.

[11] WANG R，HUANG W G，SHI M K，et al. Multiweight adversarial open-set domain adaptation network for machinery fault diagnosis with unknown faults[J]. IEEE Sensors Journal，2023，23(24)：31483-31492.

[12] SUN K C，YIN A J，LU S. Domain distribution variation learning via adversarial adaption for helicopter transmission system fault diagnosis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2024，215：111419.

[13] WU Z H，JIANG H K，ZHU H X，et al. A knowledge dynamic matching unit-guided multi-source domain adaptation network with attention mechanism for rolling bearing fault diagnosis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，189：110098.

[14] LIU B，LI G F，HE J L，et al. Dual branch feature matching guided multi-source domain adaptive ensemble network for rotating machinery fault diagnosis[J]. Advanced Engineering Informatics，2025，64：103061.

[15] YAN S，SHAO H D，WANG X Y，et al. Compact-sparse prototype calibration network for few-shot continual fault diagnosis of rotating machinery[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence，2025，155：111099.

[16] ZHANG Y T，ZHANG H L，WANG R，et al. Multi-level weighted dynamic adversarial adaptation network for partial set cross-domain fault diagnosis[J]. Measurement，2023，223：113712.

[17] KONG Y，HAN Q K，CHU F L，et al. Spectral ensemble sparse representation classification approach for super-robust health diagnostics of wind turbine planetary gearbox[J]. Renewable Energy，2023，219：119373.

[18] YANG B，LEI Y G，JIA F，et al. An intelligent fault diagnosis approach based on transfer learning from laboratory bearings to locomotive bearings[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2019，122：692-706.

[19] HAN T，LIU C，YANG W G，et al. A novel adversarial learning framework in deep convolutional neural network for intelligent diagnosis of mechanical faults[J]. Knowledge-Based Systems，2019，165：474-487.

[20] LONG M S，ZHU H，WANG J M，et al. Deep transfer learning with joint adaptation networks[C]//International Conference on Machine Learning，PMLR. 2017：2208-2217.

[21] CAO Z J，MA L J，LONG M S，et al. Partial adversarial domain adaptation[C]//Computer Vision-ECCV 2018. Cham：Springer International Publishing，2018：139-155.

[22] CAO Z J，LONG M S，WANG J M，et al. Partial transfer learning with selective adversarial networks[C]//Proceedings of the IEEE/CVE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE，2018：2724-2732.

[23] LI W H，CHEN Z Y，HE G L. A novel weighted adversarial transfer network for partial domain fault diagnosis of machinery[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics，2021，17(3)：1753-1762.

[24] DAI Y，LIU J，REN X C，et al. Adversarial training based multi-source unsupervised domain adaptation for sentiment analysis[J]. Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence，2020，34(5)：7618-7625.

[25] WANG R，HUANG W G，WANG J，et al. Multisource domain feature adaptation network for bearing fault diagnosis under time-varying working conditions[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2022，71：3511010.

[26] SAPORTA A，VU T H，CORD M，et al. Multi-target adversarial frameworks for domain adaptation in semantic segmentation[C]//Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision(ICCV). IEEE，2021：9052-9061.

[27] CHEN Z Y，WU J，DENG C，et al. Residual deep subdomain adaptation network：a new method for intelligent fault diagnosis of bearings across multiple domains[J]. Mechanism and Machine Theory，2022，169：104635.

第一作者：张宇腾(1999—)，男，博士研究生。
E-mail：ytzhangz@bit.edu.cn

通信作者：孔 运(1993—)，男，博士，副教授。
E-mail：kongyun@bit.edu.cn

IGBT 自激电磁振动信号的压电薄膜传感与检测

何赟泽[1,2]，张 杰[1]，李祺颖[1]，平 阳[1]，郭迪鑫[3]，何洪英[1]

（1. 湖南大学电气与信息工程学院，湖南 长沙 410082；2. 湖南大学深圳研究院，广东 深圳 518000；
3. 太原理工大学电气与动力工程学院，山西 太原 030024）

摘要：本研究旨在利用压电薄膜传感器对绝缘栅双极型晶体管（IGBT）关断过程中产生的自激电磁振动信号进行试验分析，探讨不同测试条件下压电薄膜传感器测得 IGBT 器件自激电磁振动信号的特性及其与传播路径、电路参数的关系。本文搭建了 IGBT 器件的脉冲测试平台，通过脉冲触发信号控制 IGBT 器件的开关过程，并配合示波器同步采集 IGBT 器件的电参量与自激电磁振动信号。本文对比不同安装位置及有/无耦合剂的 IGBT 器件自激电磁振动信号传播路径，确定了器件封装外壳涂抹耦合剂的压电薄膜传感器检测方式。通过改变关断电流与母线电压获得 IGBT 器件在不同工况下的自激电磁振动信号时/频域特征变化情况，发现压电薄膜传感器检测的自激电磁振动信号幅值、信号能量与关断电流和母线电压的变化均呈现正相关，且压电薄膜传感器测得信号频峰主要集中在 35、57 和 135 kHz 附近。补充开展了过栅压故障工况试验，以探讨异常状态下自激电磁振动信号的特征变化。对比了压电薄膜传感器与压电陶瓷声发射传感器在相同传播条件下的检测结果，发现两者在自激电磁振动信号能量响应趋势上具有一致性，但频谱分布与灵敏度特性存在差异，压电薄膜传感器在低频信号捕捉及安装适应性方面具有优势。本文的研究结果可为 IGBT 自激电磁振动信号的宽频带采集与状态监测方法优化提供依据。

关键词：自激电磁振动；绝缘栅双极型晶体管；压电薄膜；振动监测
中图分类号：TM930.12 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508076

Experimental study on the detection of IGBT self-excited electromagnetic vibration signal using a piezoelectric film sensor

HE Yunze[1,2], ZHANG Jie[1], LI Qiying[1], PING Yang[1], GUO Dixin[3], HE Hongying[1]

（1.College of Electrical and Information Engineering，Hunan University，Changsha 410082，China；
2.Shenzhen Research Institute，Hunan University，Shenzhen 518000，China；
3.College of Electrical and Power Engineering，Taiyuan University of Technology，Taiyuan 030024，China）

Abstract: This study experimentally investigates the self-excited electromagnetic vibration (SEMV) signals generated during the turn-off process of insulated gate bipolar transistors (IGBTs) using piezoelectric thin film sensors，analyzing their characteristics under varying test conditions and their correlation with propagation paths and circuit parameters. A pulsed test platform was constructed to synchronously acquire IGBT electrical parameters and SEMV signals via the pulse-triggered switching process and an oscilloscope. Comparative analysis of signal propagation paths under different sensor placements and coupling agent applications determined the optimal detection method，involving a coupling agent applied to the device's encapsulation shell. Subsequently，this study obtained the time-frequency domain characteristics of self-excited electromagnetic vibration signals from IGBT devices under different operating conditions by varying the turn-off current and bus voltage. The results demonstrate that both the amplitude and energy of the self-excited electromagnetic vibration signals detected by the piezoelectric thin film sensor exhibit positive correlations with the turn-off current and bus voltage. Furthermore，the frequency peaks of the signals measured by the piezoelectric thin film sensor were primarily concentrated around 35，57 and 135 kHz. Additionally，an over-gate-voltage fault test was conducted to examine the characteristics of SEMV signals under abnormal conditions. A comparative evaluation with piezoelectric ceramic acoustic emission sensors demonstrated consistent SEMV signal energy response trends but distinct spectral distributions and sensitivity characteristics，highlighting the piezoelectric thin film sensor's advantages in low-frequency detection and installation adaptability. These findings provide a foundation for broadband SEMV signal acquisition and condition monitoring optimization in IGBT devices.

Keywords: self-excited electromagnetic vibration; insulated gate bipolar transisitor; piezoelectric film; vibration monitoring

收稿日期：2025-08-15；**修订日期：**2025-09-19
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52577010）；湖南省科技创新领军人才项目（2023RC1039）

近年来，智能电网、轨道交通、新能源发电、电动汽车及特种电源等领域迅速发展，绝缘栅双极性晶体管（insulated gate bipolar transistor, IGBT）器件作为这些领域电能变换与控制的核心单元，其运行的安全与可靠性直接关系到整个系统的稳定与效率[1-4]。一旦该器件出现退化或故障，轻则降低装置性能，重则引发系统级失效，带来巨大的安全隐患与经济风险[5]。因此，构建快速、在线、无损的 IGBT 器件传感与状态监测技术，对提升 IGBT 器件寿命与系统稳定性具有重要意义。现有 IGBT 器件的状态监测方法主要围绕电、热、磁等物理量展开[6-8]。这些方法均有助于 IGBT 器件/模块的状态检测和故障诊断，提升器件的可靠性，但是难以同时满足快速、无损、非侵入式、早期预警等状态监测需求。

自激电磁振动（self-excited electromagnetic vibration, SEMV）检测技术以功率器件开关过程内部能量快速释放所激发的瞬态弹性波为载体，通过分析功率器件封装表面的振动特征参数，可对功率器件的微小损伤和早期缺陷实现高灵敏监测[9-10]，有望同时满足 IGBT 器件的上述状态监测需求。

国内外许多学者已经对功率器件的自激电磁振动信号进行了相关研究。KÄRKKÄINEN 等[11] 通过试验确认 IGBT 在开关时刻会产生可以被压电陶瓷声发射（acoustic emission, AE）传感器检测到的自激电磁振动信号。随后，MÜLLER 等[12] 对比健康与退化功率器件的频谱差异，证明自激电磁振动特征可用于刻画器件的老化状态。DAVARI 等[13] 则提出了基于绝对最大差值的自激电磁振动信号指标，与传统电参数对比，并验证了其在器件老化评估中的有效性。CHOE 等[14] 基于功率循环试验发现焊接型功率器件应力波信号的信号计数特征会随着功率循环而增加，对应于在铝键合线中观察到的疲劳裂纹扩展缺陷。LI 等[15] 揭示了 IGBT 器件关断电流与波形时/频域特征之间的定性关系，讨论了功率器件在不同耦合路径下自激电磁振动信号成分的差异[16]，并基于电磁力模型和热弹性模型解释了自激电磁振动在 IGBT 器件中的产生机理与传播规律[17]。上述研究在自激电磁振动传感方法方面均采用压电陶瓷声发射传感器，但是压电陶瓷声发射传感器具备一定的附加质量和较大的安装空间需求，在特殊结构表面、狭窄空间与嵌入式部署等方面的应用场景受到一定限制。

压电薄膜传感器对复杂检测结构和检测空间具有很强的适应性，近年来也广泛应用于声发射信号检测研究。何佳霖等[18] 采用柔性压电薄膜传感器检测了管道的泄露信号，发现柔性薄膜传感器相比于压电陶瓷传感器在管道泄漏声发射检测方面具有更高的灵敏度、更大的响应值以及受安装以及位置角度的限制较小的优点。张继轩等[19] 发现基于微机电系统的压电薄膜传感器可同时兼顾高灵敏度和微型化，在齿轮故障诊断方面也具有较高的可靠性和准确性。因此，压电薄膜传感器在 IGBT 器件开关过程产生的自激电磁振动信号（也称电磁声发射信号）检测方面也具有广阔的应用前景。

为此，本文在室温条件下将压电薄膜声发射传感器柔性贴附于 IGBT 封装侧面，通过触发脉冲信号激励引发 IGBT 器件的自激电磁振动信号并同步采集电参数信号，与压电陶瓷声发射传感器进行时/频域特征对比，评估压电薄膜检测方案在自激电磁振动信号检测中的灵敏性、保真性与可行性，为功率器件自激电磁振动信号的在线监测提供技术手段。

1 基础理论

1.1 IGBT 器件自激电磁振动信号的产生机理

IGBT 器件开关过程的自激电磁振动信号是由瞬态电磁力和瞬态热应力共同作用产生的[17]。当 IGBT 进行开关动作时，电流迅速变化，引起器件内部导体间瞬间吸引/排斥力发生变化，器件结构受到脉冲式机械加载；同时结温突然变化使芯片材料产生膨胀或收缩冲击。这两个因素叠加在硅芯片和封装结构中激发出弹性应力波，并以机械波的形式在材料中传播，引起器件封装外壳振动。这种无需外部激励源而由器件内部物理过程触发的弹性波，可以在器件封装外壳利用压电传感器捕获，进而分析器件状态信息以评估其健康状态和可靠性。

1.2 压电薄膜传感器的工作原理与特性

本文采用的压电薄膜传感器（SDT1-028K）采用聚偏氟乙烯（PVDF）压电薄膜作为敏感元件。该传感器结构上由一片厚度 d 约为 28 μm 的压电薄膜叠覆在聚酯薄片（Mylar）基底上，双面涂有导电电极并引出同轴屏蔽的导线。当有自激电磁振动作用于传感器膜片时，薄膜发生微小形变，内部产生电荷迁移，从而在上下电极间形成电压信号。这一原理基于压电效应：外力引起的应力/应变能在压电材料中转化为电信号。对于厚度方向上的应力 T_3，压电薄膜内部会产生与之成正比的极化电场强度 E_3，比例系数为压电电压常数 g_{33}。例如，在厚度方向上：

$$E_3 = g_{33} \cdot T_3 \tag{1}$$

其中，PVDF 材料的 g_{33} 约为 0.25 m^2/C。在开路条件下，薄膜两端的输出电压 u_{AE} 等于电场强度 E_3 乘以厚度 d：

$$u_{AE} = E_3 \cdot d = g_{33} \cdot T_3 \cdot d \tag{2}$$

因此，压电薄膜传感器检测的应力越大，输出电压幅值越高。

当自激电磁振动通过 IGBT 器件内部传到传感器时，引起 PVDF 薄膜拉伸或弯曲形变，由于压电效应，薄膜两侧电极便产生感应电荷，输出对应的电压脉冲信号。为了评估该传感器在不同工作条件下的 IGBT 器件自激电磁振动信号检测性能，本文将在后续部分构建专用的脉冲测试试验平台，对自激电磁振动信号进行采集与预处理，进而分析传播路径、电路参数对自激电磁振动信号特征的影响。

2　试验平台和信号预处理

2.1　IGBT 器件自激电磁振动信号产生电路

由于 IGBT 器件开通和关断过程产生的自激电磁振动信号在测试方法、产生机理方面存在一定的相似性，研究方法和研究结果可以相互借鉴。因此，本文选取 IGBT 器件关断时刻产生的自激电磁振动信号作为研究对象，并设计了感性负载的脉冲测试电路。脉冲测试电路是目前试验研究中最常用的 IGBT 自激电磁振动激发电路，其电路原理图如图 1 所示。下管 IGBT 是被测器件（device under test, DUT）。该电路依托高压直流电源对母线电容进行预充电，为后续脉冲过程提供短时高功率的能量输出。在电路工作初始阶段，高压直流电源通过充电支路向母线电容充电，使其储存足够的电能；此时上管 IGBT 处于关断状态，其主要作用是在后续关断阶段为负载电感提供续流通道，同时阻断高压直流电源与下管之间的直接连接，从而避免额外的能量耦合。当驱动电路向下管 IGBT 输出高电平控制信号时，器件栅极电压 V_{GE} 超过开启阈值 V_{th}，下管 IGBT 进入导通状态。此时，母线电容中储存的电荷通过下管 IGBT 向电感负载 L_{load} 放电（电流通路 Ⅰ），在电感自感电动势作用下，电流按近似线性规律上升，可表示为：

$$I = \frac{U \cdot t_{on}}{L_{load}} \tag{3}$$

式中，U 表示母线电压（高压直流电源电压）。随着导通时间 t_{on} 的延长，电感磁场能量逐步积累，电流幅值不断增大。

在设定的导通脉宽结束后，驱动信号从高电平骤然切换为低电平，下管 IGBT 迅速关断，导致其电流路径瞬间中断。由于电感中储存的磁场能量无法突变消失，按照楞次定律，电感会通过上管 IGBT 或续流二极管释放能量以维持回路电流连续性（电流通路 Ⅱ）。被测 IGBT 器件在关断时刻由于电磁力和热弹性力的共同作用会产生自激电磁振动信号。

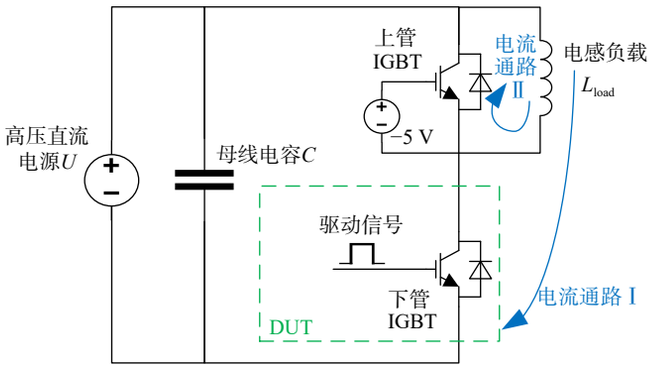


图 1　脉冲测试电路原理图

Fig. 1　Schematic diagram of the pulse test circuit

2.2　试验平台设置

根据脉冲测试电路原理图搭建的 IGBT 器件自激电磁振动信号检测平台如图 2 所示，主要由信号控制模块、功率驱动模块、被测 IGBT 器件、传感器测量模块以及数据采集与记录模块组成。信号发生器为整个系统提供精确可控的脉冲控制信号，该信号经由驱动电路作用于下管 IGBT 的栅极，用于控制其导通与关断时序。为了保证驱动信号幅值稳定且具备足够的驱动能力，试验平台配备了独立的低压直流电源为驱动电路供电，从而避免驱动环节受到高压母线侧的电气干扰。与此同时，高压直流电源负责对母线电容进行充电，为脉冲放电过程提供短时间内足够的能量释放，进而在 IGBT 关断瞬间产生一定幅值的瞬态电磁力和热冲击，以激发自激电磁振动信号。

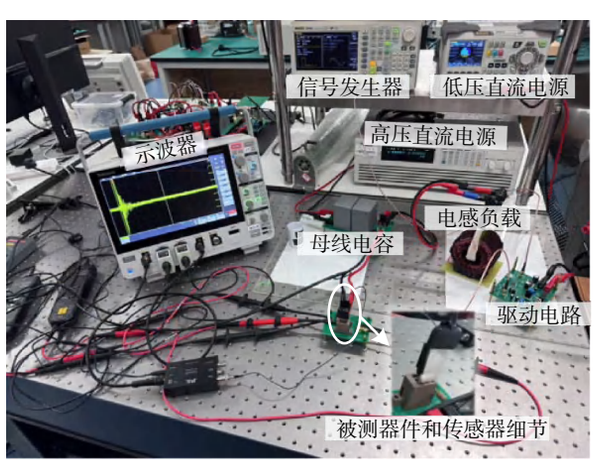


图 2　IGBT 器件自激电磁振动信号检测平台

Fig. 2　The SEMV signal detection platform for IGBT devices

被测 IGBT 器件选用意法半导体公司生产的 STGYA50M120DF3 型号，该器件额定电压和电流裕量较高，具备优良的开关特性，能够在试验条件下稳定模拟较大范围的电压和电流工作条件。自激电磁振动的检测由 SDT1-028K 压电薄膜传感器完成。SDT1-028K 传感器采用自屏蔽结构，内置屏蔽层可

以减少外界杂散电场对信号的耦合干扰。

由于自激电磁振动信号在产生后幅值极低(通常为毫伏级甚至更低),因此需要在传感器与示波器之间连接前置放大器(增益设置为 40 dB),用于在信号进入采集环节前对其进行放大,从而改善信噪比并放大有效信号的特征细节。信号被放大后,经同轴屏蔽电缆输入四通道数字示波器进行带电参数-自激电磁振动参数同步采集。4 个采集通道分别用于记录:①集电极电流 I_C,用于反映器件导通与关断瞬间的电流变化;②栅极电压 V_{GE},用于确认器件的驱动时序与工作状态;③集电极-发射极电压 V_{CE},用于监测器件集射极电压变化过程;④自激电磁振动信号 V_{SEMV},用于分析由 IGBT 内部开关过程产生的自激电磁振动波形。

如图 3 所示,示波器采集得到的自激电磁振动信号持续时间为 10 ms,其中有效信号主要集中在 IGBT 器件关断后的约 1 ms 内。为提高后续特征提取与分析的有效性,本研究对采集波形进行预处理,仅截取其中的 1 ms 有效信号作为分析对象。

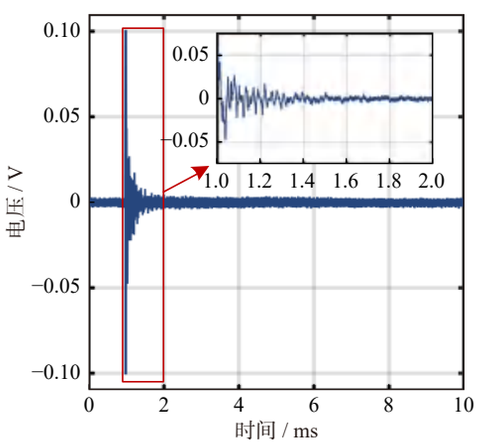


图 3 完整信号时域波形

Fig. 3 Time-domain waveform of complete signal

3 传播路径影响

自激电磁振动信号在检测过程中容易受到环境振动及电磁干扰的影响。如果应力波在传播路径中受到过多衰减或被干扰成分掩盖,其有效信号成分将难以被完整保留。因此,为了提升自激电磁振动信号的信噪比,有必要对自激电磁振动从器件内部传播到压电薄膜传感器的路径影响进行分析,并基于分析结果优化压电薄膜传感器的自激电磁振动信号检测方式。

本研究分析了不同安装位置和传感器侧耦合条件下的 IGBT 器件自激电磁振动信号特性,以确定最佳的压电薄膜传感器测量配置。试验设置高压直流电源的母线电压为 100 V,负载电感为 200 μH,IGBT 器件的导通时间为 160 μs。在此条件下,通过改变传感器安装位置与传感器侧耦合剂使用情况,探究最优的自激电磁振动信号采集路径。本文对比了传感器与检测表面之间是否涂抹耦合剂对检测结果的影响,即传感器侧有/无耦合剂。表 1 给出了本次试验压电薄膜传感器测得自激电磁振动信号的传播路径设置方案。具体传感器检测方案如图 4 所示。考虑到在散热侧测量时存在高电压击穿传感器的风

表 1 传播路径设置

Tab. 1 Propagation path settings

测量方案	传感器与器件间有/无耦合剂	传感器放置位置
1#	无	散热侧
2#	无	封装侧
3#	有	散热侧
4#	有	封装侧

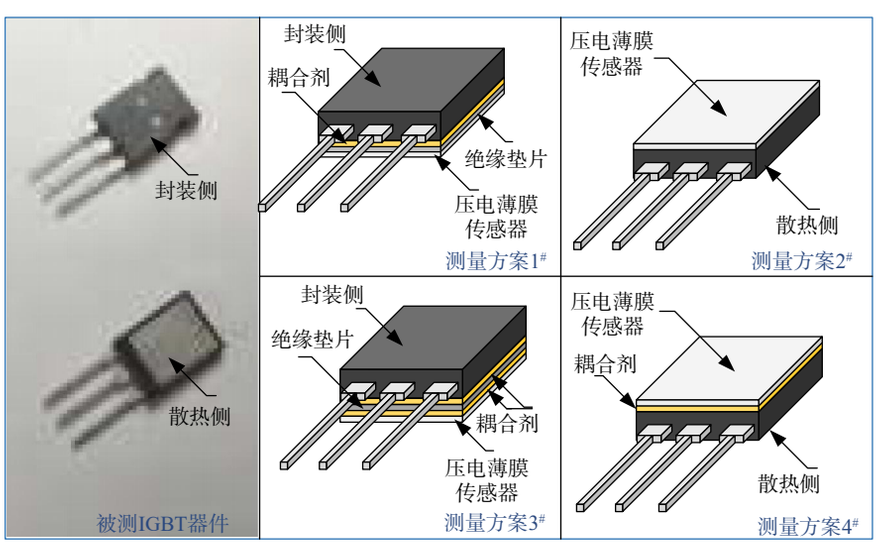


图 4 IGBT 器件自激电磁振动信号的压电薄膜测量方案

Fig. 4 Measurement scheme of SEMV signals for IGBT devices based on piezoelectric film

险，试验需要在传感器与散热侧之间加入绝缘垫片以确保安全。绝缘垫片与器件散热侧之间涂抹耦合剂，用于实现两者之间声阻抗匹配，减少增加垫片导致的信号衰减。

不同传播路径下获取的自激电磁振动信号如图 5 所示。结果表明，无论是否使用耦合剂，当传感器安装在散热侧时，测得的信号均呈现为单一的振荡衰减波形，缺乏丰富的频率成分。这类信号特征与高电压应力所引起的电磁干扰高度一致，说明压电薄膜传感器在散热侧的测量结果受到器件与传感器之间的容性串扰影响[20]较为显著，难以反映 IGBT 内部的真实应力波特征。

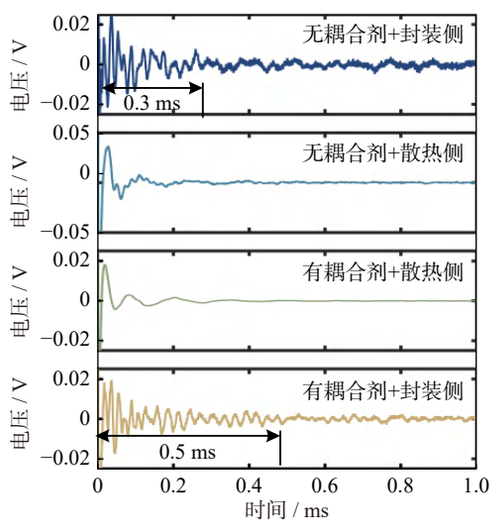


图 5　不同传播路径下的自激电磁振动信号时域波形

Fig. 5　Time-domain waveforms of SEMV signals under different propagation paths

相比之下，传感器安装在封装侧时，所得信号中均包含较丰富的高频成分，这些频率分量与自激电磁振动的典型频谱特征相符，表明其为有效的应力波信号源。此外，是否使用耦合剂在信号幅值与能量保持方面表现出明显差异。在封装侧使用耦合剂时，有效信号的持续时间更长，波形衰减更缓慢，能量损耗较低。这是由于耦合剂可以有效降低界面声阻抗，提高应力波从器件表面向传感器的能量传递效率，同时还能减小压电薄膜与被测表面之间的直接摩擦，防止长时间测试过程中的划伤与磨损。

综合图 5 的试验结果，选择“封装侧+有耦合剂”的压电薄膜传感器安装方案作为后续测量 IGBT 自激电磁振动信号的方式。该方案能够在保证信号质量的同时有效降低外部干扰，并提升传感器长期使用的可靠性。因此，本文后续试验将压电薄膜传感器通过耦合剂紧贴在被测物封装表面。耦合剂可减小机械波从器件传至传感器界面时的反射损耗，有效匹配传感器与被测器件之间的声阻抗，确保压电薄膜能有效检测 IGBT 器件的自激电磁振动信号。

4　电路参数影响分析

为了进一步分析 IGBT 关断过程中自激电磁振动信号的特性及其与电路参数的关系，本文开展了电路参数变化条件对 IGBT 器件关断自激电磁振动信号的影响规律试验研究。试验中，高压直流电源的母线电压保持在 200 V，负载电感设定为 50 μH，通过调整信号发生器脉冲宽度改变 IGBT 的关断电流。信号发生器脉冲占空比固定为 50%，周期从 12.5 μs 逐步增加至 62.5 μs，步进为 12.5 μs，共获得 5 组试验数据。理论计算关断电流范围为 25~125 A，但由于电路寄生电感、电容及负载电感饱和等因素的影响，实际关断电流范围约为 26~125 A，分析过程中以实测电流值为准。

如图 6 所示为不同关断电流下压电薄膜声发射传感器测量的自激电磁振动信号时域波形，信号主要分布在 0.5 ms 时间内，且幅值随关断电流的增大而增大。为了分析不同关断电流下的频域特性，对 1 ms 内的信号进行快速傅里叶变换，得到如图 7 所示的频谱分布。不同关断电流下自激电磁振动信号频谱的有效信号主要集中在 35、57 和 135 kHz 三个频率附近，且有效信号频谱整体幅值随关断电流增大而提升。因此后续主要分析 150 kHz 以下的自激电磁振动信号频域成分。

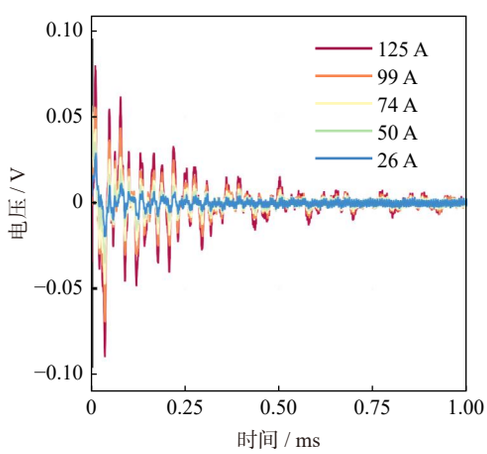


图 6　不同关断电流下的自激电磁振动信号时域波形

Fig. 6　Time-domain waveforms of SEMV signals under different turn-off currents

进一步地，为了量化关断电流对压电薄膜声发射传感器测量的自激电磁振动信号的影响，选取不同关断电流下采集得到的自激电磁振动信号能量特征进行分析，结果如图 8 所示。基于多项式拟合公式绘制出自激电磁振动信号能量与关断电流的二次拟合曲线，拟合 R^2 为 0.9907。

此外，为探究母线电压对压电薄膜测得的自激

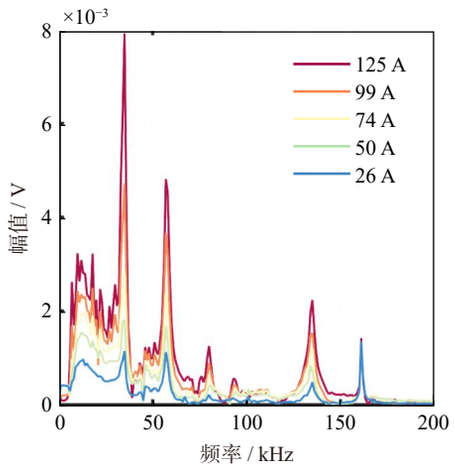


图 7 不同关断电流下的自激电磁振动信号频谱

Fig. 7 Frequency spectra of SEMV signals under different turn-off currents

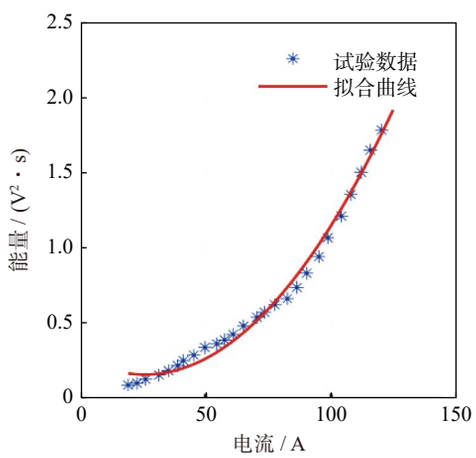


图 8 自激电磁振动信号能量与关断电流二次拟合曲线

Fig. 8 Quadratic fitting curve of SEMV signal energy versus turn-off current

电磁振动信号的影响，在不同电压等级下重复试验并绘制信号能量随关断电流的变化曲线如图 9 所示。结果表明，在相同电流条件下，信号能量随母线电压的增大而增加；在相同电压条件下，信号能量随关断电流的增大而单调上升。这一规律说明，关断过程中的能量释放强度受电压和电流的双重影响，且两者在应力波激励中呈叠加效应。

为实现对 IGBT 器件的状态监测与故障诊断，仅分析正常工况下的信号特性仍不充分，因此本文进一步对器件在过栅压故障状态下的自激电磁振动信号进行了对比分析。保持母线电压为 200 V，负载电感为 200 μH，开通脉宽为 100 μs，通过改变栅极电压探究过栅压故障下的 IGBT 压电薄膜信号。图 10 为不同栅极电压下的压电薄膜信号时域波形，在未发生故障前，随着栅极电压的增大，压电薄膜信号波形几乎不变，当 IGBT 发生过栅压故障时，信号急剧增大，且信号持续时间变长。图 11 为对应的频谱，发

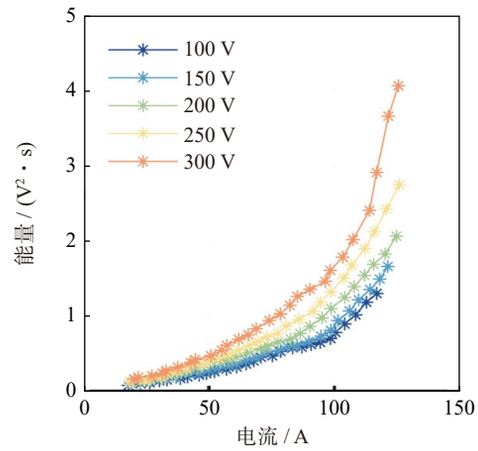


图 9 不同电压等级下的自激电磁振动信号能量随关断电流的变化曲线

Fig. 9 Variation curves of SEMV signal energy versus turn-off current under different voltage levels

生过栅压故障时，压电薄膜信号 50 kHz 以下的频段急剧增大。图 12 为过栅压故障前后的信号能量的

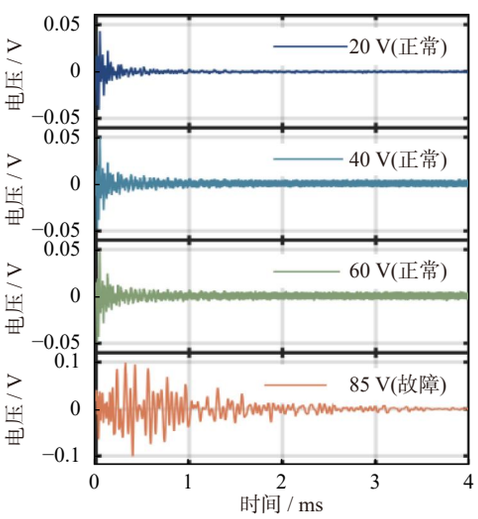


图 10 不同栅极电压下的自激电磁振动信号时域波形

Fig. 10 Time-domain waveforms of SEMV signals under different gate voltages

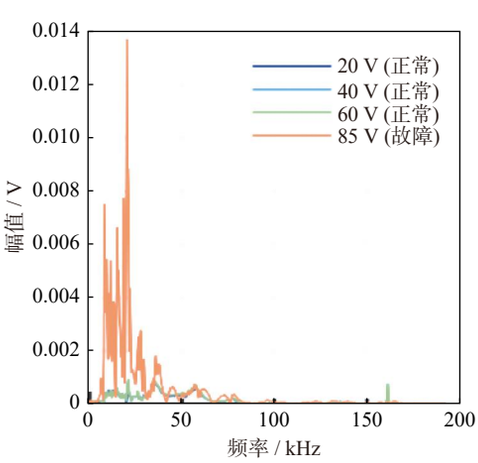


图 11 不同栅极电压下的自激电磁振动信号频谱

Fig. 11 Frequency spectra of SEMV signals under different gate voltages

变化曲线，过栅压故障前信号能量几乎不变，发生故障后信号能量急剧增大。

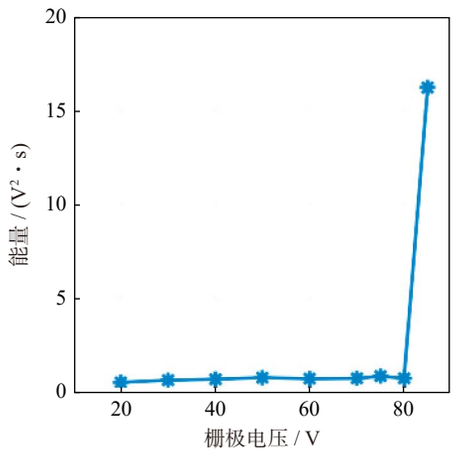


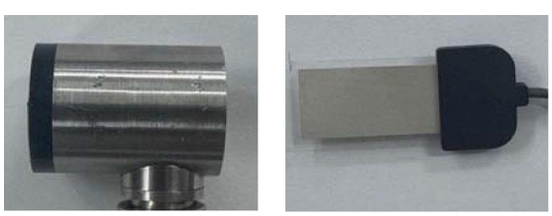
图 12　不同栅极电压下的自激电磁振动信号能量变化

Fig. 12　Variation of SEMV signal energy under different gate voltages

综上所述，IGBT 器件的导通电流、集射电压和栅极电压对 IGBT 关断过程中自激电磁振动信号的幅值、频谱分布及能量均有显著正相关影响。进一步地，为了评估压电薄膜传感器相比于传统压电陶瓷声发射传感器的幅频响应能力和适用场景差异，本研究将对压电薄膜传感器与压电陶瓷声发射传感器的自激电磁振动检测结果进行对比分析。

5　不同传感器检测效果对比

为了评估不同类型传感器（如图 13 所示）在 IGBT 关断时刻的自激电磁振动检测性能差异，本文采用传播延时检测方法开展了压电薄膜传感器与压电陶瓷声发射传感器的对比试验。考虑到传感器之间的串扰及传播路径差异可能对试验结果造成影响，本研究将两类传感器通过导波板贴合在距被测器件相同距离的两侧，如图 14 所示，以保证测试条件的一致性和可比性。试验中，母线电压设定为 150 V，负载电感为 100 μH，通过改变被测器件的触发脉宽实现不同关断电流条件下的 IGBT 器件自激电磁振动信号测试，并同步采集压电薄膜传感器和压电陶瓷声发射传感器的输出信号。



(a) 压电陶瓷声发射传感器　(b) 压电薄膜传感器

(a) Piezoelectric ceramic AE sensor　(b) Piezoelectric film sensor

图 13　不同类型的自激电磁振动信号检测传感器

Fig. 13　Different types of SEMV signal detection sensors

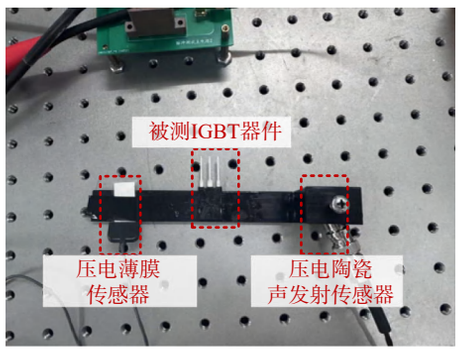


图 14　压电陶瓷声发射传感器与压电薄膜传感器贴合位置

Fig. 14　Mounting positions of piezoelectric ceramic AE sensor and piezoelectric film sensor

图 15 所示为不同关断电流下两种传感器测量的自激电磁振动时域波形。随着关断电流的增大，压电陶瓷声发射传感器与压电薄膜传感器检测的自激电磁振动信号幅值均呈显著上升趋势，但二者的幅值水平存在明显差异。压电陶瓷声发射传感器的输出幅值整体高于压电薄膜，且信号衰减速度较快；而压电薄膜传感器的幅值相对较低，但信号形态更加平滑，持续时间更长。

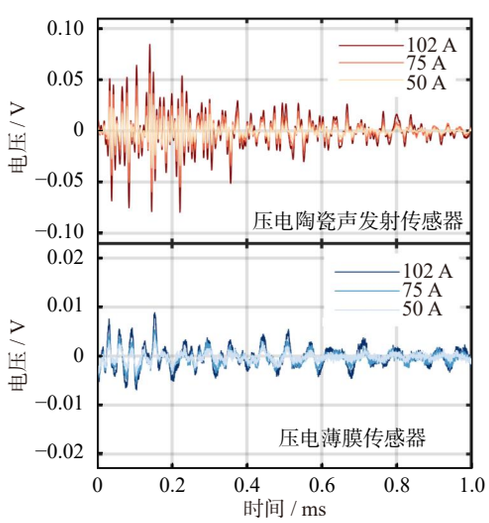
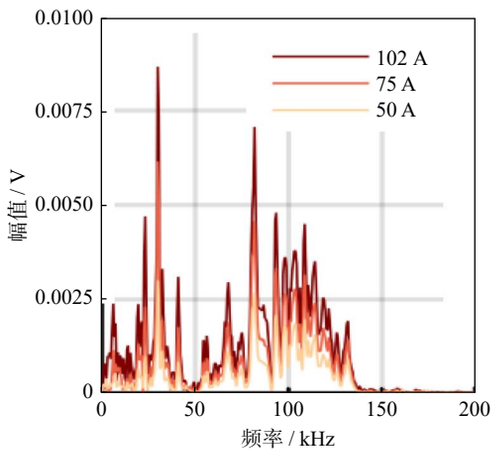


图 15　不同关断电流下的自激电磁振动信号时域波形

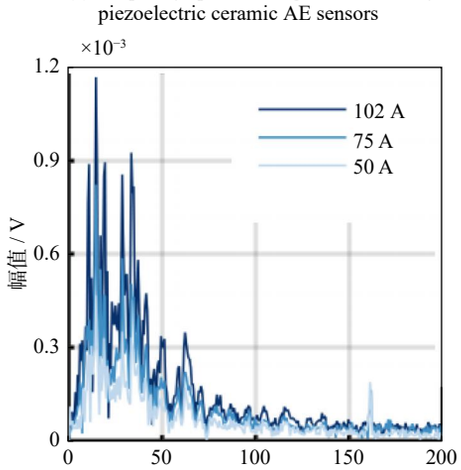
Fig. 15　Time-domain waveforms of SEMV signals under different turn-off current

进一步地，对采集到的信号进行傅里叶变换，得到如图 16 所示的自激电磁振动信号频谱分布。压电陶瓷声发射传感器的有效信号主要集中在 15~45 kHz 以及 50~140 kHz 两个频段。而压电薄膜声发射传感器的频谱主要集中在 50 kHz 以下，幅值整体较低但谱线相对平稳，体现出其在 50 kHz 以下低频范围的自激电磁振动信号稳定检测能力。质量轻、柔性高、机械阻抗低等特性，使其在低频振动作用下能够产生更显著的应变响应并实现更充分的表面贴

合，提高信号耦合效率和信噪比。因此，薄膜传感器可用于器件的键合线退化、过栅压失效及短路检测等会引起低频信号显著变化的应用场景，为相关故障的早期识别提供高灵敏度监测手段。



(a) 压电陶瓷声发射传感器检测信号频谱
(a) Frequency spectra of signals detected by piezoelectric ceramic AE sensors



(b)压电薄膜传感器检测信号频谱
(b) Frequency spectra of signals detected by piezoelectric thin film sensors

图 16 不同关断电流下的自激电磁振动信号频谱

Fig. 16 Frequency spectra of SEMV signals under different turn-off current

图 17 和表 2 为两种传感器检测的自激电磁振动信号能量特征。压电薄膜和压电陶瓷声发射传感器的自激电磁振动信号能量均随关断电流的增大而呈单调上升趋势，但压电陶瓷声发射传感器在相同电流条件下的输出能量明显高于压电薄膜。这一现象与其更高的压电常数和机械耦合系数有关，该特性使其在相同应力条件下能够产生更大的电信号。而压电薄膜虽然能量输出较低，但自激电磁振动信号能量随着关断电流的变化趋势与压电陶瓷声发射传感器几乎一致，说明压电薄膜传感器在不同关断电流工况下的良好应用能力。压电薄膜传感器检测的信号能量较为微弱，其实际应用需重点关注高阻抗放大、严格电磁屏蔽及高质量界面耦合，以保障高频、动态微弱信号的信噪比。而压电陶瓷声发射传感器虽然信号强度较高，但其应用需要注意高刚度带来的负载效应及其脆性对检测结果的影响。压电薄膜传感器具备轻薄柔性、安装适应性强等优势，可在低频、小幅振动信号检测中实现较高灵敏度。但是其输出电平低、抗干扰能力弱，信号能量显著低于压电陶瓷声发射传感器，工程应用中需配合高阻抗、低噪声放大与屏蔽措施。

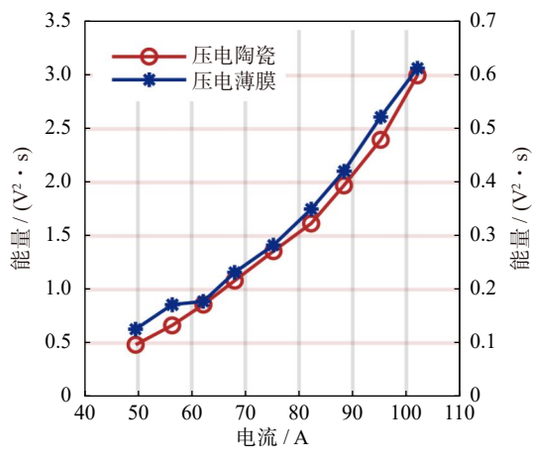


图 17 不同传感器测量的 IGBT 器件自激电磁振动信号能量随关断电流的变化曲线

Fig. 17 Variation curves of SEMV signal energy of IGBT devices with turn-off current measured by different sensors

表 2 不同关断电流下传感器测量的自激电磁振动信号能量

Tab. 2 SEMV signal energy measured by sensors under different turn-off currents

关断电流/A	压电陶瓷信号能量/(V^2·s)	压电薄膜信号能量/(V^2·s)
49	0.4860	0.0126
56	0.6665	0.0172
62	0.8605	0.0178
68	1.0842	0.0232
75	1.3595	0.0283
82	1.6181	0.0350
88	1.9731	0.0421
95	2.3991	0.0523
102	3.0005	0.0614

综上所述，压电薄膜传感器在不同关断电流工况下的自激电磁振动信号能量响应变化趋势与传统压电陶瓷声发射传感器基本一致，并且在 50 kHz 以下的低频范围内能够实现自激电磁振动信号的相对稳定检测。

6 结 论

本研究围绕 IGBT 器件在关断瞬态自激电磁振动信号的压电薄膜传感方法展开，基于 SDT1-028K

压电薄膜传感器构建了 IGBT 器件的脉冲测试平台，并从传播路径影响、电路参数影响及与压电陶瓷声发射传感器的性能对比等方面进行了系统研究。主要结论如下：

（1）通过对比不同传播路径与耦合剂使用情况发现，将压电薄膜传感器安装在 IGBT 器件封装侧并涂抹耦合剂，可有效提高自激电磁振动信号的信号幅值和持续时间，降低信号能量衰减，并减少传感器的机械磨损。

（2）压电薄膜传感器测得的自激电磁振动信号幅值和能量均与其关断电流及母线电压变化呈现正相关，且变化趋势稳定可重复。自激电磁振动信号频谱成分主要分布在 35、57 和 135 kHz 三个频率附近。此外，过栅压失效会显著增强压电薄膜传感器检测到的自激电磁振动低频信号幅值和能量。压电薄膜传感器可以用于会引起低频信号显著变化的器件过栅压失效诊断场景。

（3）压电薄膜传感器和压电陶瓷传声发射传感器这两类传感器测得的自激电磁振动信号在时域信号能量响应趋势上具有一致性，但频谱分布存在差异：压电陶瓷声发射传感器在两个窄频段内响应能力更为明显，而压电薄膜传感器在 50 kHz 以下的自激电磁振动信号低频段响应能力相对平稳。

此外，压电薄膜的柔软性特点也很适合传感器在空间受限的场景下使用。因此，压电薄膜传感器在 IGBT 器件自激电磁振动检测中具有广阔的应用前景。

参考文献：

[1] 李辉，刘人宽，王晓，等. 压接型 IGBT 器件封装退化监测方法综述 [J]. 电工技术学报，2021，36(12)：2505-2521.
LI Hui，LIU Renkuan，WANG Xiao，et al. Review on package degradation monitoring methods of press-pack IGBT modules[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2021，36(12)：2505-2521.

[2] 张国政，陈炜，谷鑫，等. 三电平牵引变流器改进同步空间矢量调制策略 [J]. 电工技术学报，2020，35(18)：3908-3916.
ZHANG Guozheng，CHEN Wei，GU Xin，et al. An improve synchronized space vector modulation strategy for three-level inverter[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2020，35(18)：3908-3916.

[3] 涂春鸣，李庆，郭祺，等. 具备电压质量调节能力的串并联一体化多功能变流器 [J]. 电工技术学报，2020，35(23)：4852-4863.
TU Chunming，LI Qing，GUO Qi，et al. Research on series-parallel integrated multifunctional converter with voltage quality adjustment[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2020，35(23)：4852-4863.

[4] 刘爽，牟龙华，许旭锋，等. 电力电子器件故障对微电网运行可靠性的影响 [J]. 电力系统保护与控制，2017，45(24)：63-70.
LIU Shuang，MU Longhua，XU Xufeng，et al. Research on power electronic devices failures' effect on microgrid operational reliability[J]. Power System Protection and Control，2017，45(24)：63-70.

[5] 赵子轩，陈杰，邓二平，等. 负载电流对 IGBT 器件中键合线的寿命影响和机理分析 [J]. 电工技术学报，2022，37(1)：244-253.
ZHAO Zixuan，CHEN Jie，DENG Erping，et al. The influence and failure mechanism analysis of the load current on the IGBT lifetime with bond wire failure[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2022，37(1)：244-253.

[6] 姚陈果，李孟杰，余亮，等. 基于脉冲耦合响应的 IGBT 故障检测方法 [J]. 电工技术学报，2020，35(15)：3235-3244.
YAO Chenguo，LI Mengjie，YU Liang，et al. A condition detecting method for the IGBT module based on pulse coupling response[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2020，35(15)：3235-3244.

[7] 黄先进，李鑫，刘宜鑫，等. 基于量化电压并行比较的 IGBT 状态监测保护电路 [J]. 电工技术学报，2021，36(12)：2535-2547.
HUANG Xianjin，LI Xin，LIU Yixin，et al. Condition monitoring and protection circuit for IGBTs based on parallel comparison methods of quantized voltages[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2021，36(12)：2535-2547.

[8] 姚芳，胡洋，李铮，等. 基于结温监测的风电 IGBT 热安全性和寿命耗损研究 [J]. 电工技术学报，2018，33(9)：2024-2033.
YAO Fang，HU Yang，LI Zheng，et al. Study on thermal safety and lifetime consumption of IGBT in wind power converters based on junction temperature monitoring[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，2018，33(9)：2024-2033.

[9] HE Y Z，LI M C，MENG Z Q，et al. An overview of acoustic emission inspection and monitoring technology in the key components of renewable energy systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，148：107146.

[10] 王庆锋，吴斌，焦敬品，等. 一种声发射传感器的研制 [J]. 压电与声光，2007，29(2)：179-181.
WANG Qingfeng，WU Bin，JIAO Jingpin，et al. Design of a kind of acoustic emission sensor[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics，2007，29(2)：179-181.

[11] KÄRKKÄINEN T J，TALVITIE J P，KUISMA M，et al. Acoustic emission in power semiconductor modules：first observations[J]. IEEE Transactions on Power Electronics，2014，29(11)：6081-6086.

[12] MÜLLER S，DRECHSLER C，HEINKEL U，et al. Acous-

tic emission for state-of-health determination in power modules[C]//Proceedings of 13th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD). IEEE, 2016: 468-471.

[13] DAVARI P, KRISTENSEN O, IANNUZZO F. Investigation of acoustic emission as a non-invasive method for detection of power semiconductor aging[J]. Microelectronics Reliability, 2018, 88-90: 545-549.

[14] CHOE C, CHEN C T, NAGAO S, et al. Real-time acoustic emission monitoring of wear-out failure in SiC power electronic devices during power cycling tests[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2020, 36(4): 4420-4428.

[15] LI M C, HE Y Z, MENG Z Q, et al. Acoustic emission-based experimental analysis of mechanical stress wave in IGBT device[J]. IEEE Sensors Journal, 2020, 20(11): 6064-6074.

[16] 何赟泽，邹翔，李孟川，等. 30 V 条件下功率 MOSFET 器件应力波理论与试验研究 [J]. 中国电机工程学报，2021，41(16)：5683-5693.
HE Yunze, ZOU Xiang, LI Mengchuan, et al. Theoretical and experimental study on stress wave of power MOSFET under 30 volts[J]. Proceedings of the CSEE, 2021, 41(16): 5683-5693.

[17] GENG X F, HE Y Z, LI Q Y, et al. Theoretical study on the generation of switching stress waves in power semiconductor devices[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2023, 38(3): 3939-3950.

[18] 何佳霖，马登龙，覃荣卓，等. 新型柔性压电薄膜在管道泄漏检测中的应用 [J]. 西安交通大学学报，2023，57(2)：184-191.
HE Jialin, MA Denglong, QIN Rongzhuo, et al. Application of new flexible piezoelectric film in pipeline leakage monitoring and identification[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2023, 57(2): 184-191.

[19] 张继轩，豆涵杰，刘涛，等. 基于 MEMS 声发射传感器的齿轮故障检测系统 [J]. 压电与声光，2024，46(5)：638-643.
ZHANG Jixuan, DOU Hanjie, LIU Tao, et al. Gear fault detection system based on mems acoustic emission sensor[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2024, 46(5): 638-643.

[20] 耿学锋，何赟泽，王广鑫，等. IGBT 关断时刻的应力波测量优化及影响因素分析 [J]. 电工技术学报，2022，37(21)：5503-5512.
GENG Xuefeng, HE Yunze, WANG Guangxin, et al. Measurement optimization and analysis of influencing factors of IGBT's turn-off stress wave[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2022, 37(21): 5503-5512.

第一作者：何赟泽(1983—)，男，博士，教授。
E-mail: yhe@hnu.edu.cn

通信作者：李祺颖(2000—)，男，博士研究生。
E-mail: liqiying@hnu.edu.cn

连杆铰链型非线性能量阱设计及试验研究

柴 凯[1]，初嘉文[2]，楼京俊[1]，杨庆超[1]

（1. 海军工程大学舰船与海洋学院，湖北 武汉 430033；2. 海军工程大学动力工程学院，湖北 武汉 430033）

摘要：针对船用线性吸振器在低频段减振效能不足、环境适应性较差及工作频带较窄等难题，设计了一种连杆铰链型非线性能量阱装置用于船舶机械设备宽频线谱控制。阐述了该非线性能量阱样机的设计原理，通过力学建模推导了系统的运动微分方程，确定了实现本质非线性刚度的参数约束条件；对耦合非线性能量阱的系统进行建模，运用增量谐波平衡法分析其动力学特性，并与等效线性吸振器的吸振效果进行对比；搭建模拟试验台架开展试验研究。试验表明该非线性能量阱在 8~22 Hz 频段内吸振效果可达 6 dB 以上，为船舶振动控制提供了技术方案，对提升船舶声隐身性能具有重要意义。

关键词：船舶振动控制；非线性能量阱；连杆铰链；动力学特性；增量谐波平衡法；吸振效果

中图分类号：TB535；O322 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202504052

Design and experimental study of connecting rod hinge type nonlinear energy sink

CHAI Kai[1], CHU Jiawen[2], LOU Jingjun[1], YANG Qingchao[1]

（1.College of Naval Architecture and Ocean，Naval University of Engineering，Wuhan 430033，China；
2.College of Power Engineering，Naval University of Engineering，Wuhan 430033，China）

Abstract: To address the shortcomings of marine linear vibration absorbers —including inadequate low-frequency vibration reduction performance，limited environmental adaptability，and narrow operating bandwidth—a connecting-rod-hinged nonlinear energy sink (NES) was designed for broadband line spectrum control in marine mechanical equipment. The design principles of the NES prototype were elaborated，and its differential equation of motion was derived, with the conditions for achieving essential nonlinear stiffness established. The coupled NES system was modeled，and its dynamic characteristics were analyzed via the incremental harmonic balance method，with comparisons drawn to an equivalent linear vibration absorber. A simulation test bench was constructed for experimental validation. Results demonstrate that the NES achieves vibration reduction exceeding 6 dB within the 8~22 Hz frequency band，offering a technical approach for marine vibration control and significantly enhancing ship acoustic stealth performance.

Keywords: vibration control of ships; nonlinear energy sink (NES); connecting rod hinge; dynamic characteristics; incremental harmonic balance (IHB) method ; vibration absorption effect

机械振动是工程领域普遍存在的物理现象，在航空航天装备、船舶动力系统、高速轨道交通等大型机械装备中表现得尤为突出，绝大多数情况下会对系统产生危害，因此进行有效的振动抑制是非常必要的[1]。在确定的振动系统中，抑制结构振动的策略通常有两种：隔振，即在基础与振子间设置隔振装置抑制振动传递；吸振，则是在振动主结构上附加子系统吸收并抑制振动。

目前船舶液压泵、辅冷泵以及多台共用隔振浮筏等设备上大量安装有基于线性理论的动力吸振器，其原理简单、鲁棒性好，应用较为广泛，但也存在如下不足：吸振频率固定且工作带宽极窄，外界激励变化时鲁棒性较差。若在线性吸振器中引入非线性因素，能够有效拓宽吸振频带且不出现新的共振峰[2]。非线性能量阱（nonlinear energy sink, NES）通过引入本质非线性刚度元件，突破传统线性系统的固有频率限制，可实现对主系统多频线谱能量的俘获，不同频率的共振俘获导致能量像“泵”一样从主系统吸收且被局部耗散，这种单向传递能量现象称为靶能量传递（targeted energy transfer, TET），从而实现宽频减振[3]。

在靶能量传递上，KOPIDAKIS 等[4]首次在非线性系统中观察到该现象；GENDELMAN 等[5]探讨了初始输入能量对弱耦合非线性系统能量传递的影

收稿日期：2025-04-28；**修订日期：**2025-07-11

基金项目：国家自然科学基金资助项目（52471354, 52201389）

响，给出了触发靶能量传递的能量阈值。在外界激励上，LEE 等[6]研究了两自由度非线性能量阱吸振系统动力学行为，指出两个振子之间可以发生 1∶1、1∶3 甚至是任何频率比的内共振，并发现瞬态共振俘获现象可导致系统振动能量出现局部化；STAROSVETSKY 等[7]对非线性能量阱系统平衡点类型以及分岔现象进行了严格的数学分析，指出激励幅值不同，系统可能呈现稳态、弱调制以及强调制三种响应，而系统出现靶能量传递时对应一种强调制响应机制。在结构设计上，王菁菁等[8]利用特殊形状滑轨设计了一种轨道型非线性能量阱，并验证了该结构能使系统响应频率从低模态向高模态转移；TREACY 等[9]设计了一种旋转式立方刚度非线性能量阱，并发现特殊的“幅值锁定”现象；TAN 等[10]在双边碰撞型非线性结构的基础上，设计了一种单边非对称碰撞型非线性能量阱，能够展现更高的靶能量传递效率。在工程应用上，甄冬等[11]研究了复杂汽车悬架系统主动控制策略，表明悬架系统耦合非线性能量阱后可有效提高汽车的操纵性与舒适性；LI 等[12]提出利用非线性能量阱来抑制耦合颤振下大跨桥的气动弹性失稳；KREMER 等[13]利用预压状态下的屈曲梁结构耦合电磁单元设计了基于非线性能量阱的能量采集系统。

目前工程中应用的 NES 构型主要分为以下几类：轨道型 NES 通过特殊形状滑轨（如立方抛物线、正弦曲线轨道）实现非线性刚度，但该构型垂向承载能力较弱，且滑轨加工精度要求高，在船舶强冲击环境中易出现接触磨损问题。旋转式 NES 利用旋转机构与弹性元件耦合产生非线性恢复力，但结构体积较大，旋转部件可能存在动平衡、轴承寿命问题，难以适配船舶机电设备的紧凑安装空间。碰撞型 NES 通过质量块与限位装置的碰撞产生非线性响应，但性能对间隙敏感，长时间运行存在冲击磨损问题，承载能力依赖约束面强度，且碰撞噪声易成为新的噪声源，不符合船舶声隐身要求。屈曲梁型 NES 基于预压屈曲梁的几何非线性特性设计，但屈曲梁的载荷-位移曲线存在突变区域，可能带来稳定性挑战和疲劳问题，在船舶低频宽频振动环境中稳定性不足。

尽管非线性能量阱具有结构简单、能量靶向传递、吸振频带宽等优点，已应用于航空航天、建筑桥梁、切削刀具、汽车悬架、旋转钻井和输液管道等领域，然而其在船舶振动控制中却鲜有报道[14]。为此，本研究提出一种刚度可调、结构紧凑、兼具一定垂向承载能力的非线性能量阱装置，可以用于船舶机电设备低频段特征线谱控制，提升其声隐身性能。

本文提出一种连杆铰链型 NES 设计，通过刚性连杆铰链与预压弹簧的并联构型，实现立方刚度与负刚度的协同调控，在保证结构紧凑性的同时提升垂向承载能力。结合增量谐波平衡法与 Floquet 稳定性理论，揭示耦合系统的非线性动力学特性；通过预压力-刚度映射关系优化，突破吸振频带自适应拓展的技术瓶颈。研究成果为船舶特征线谱控制提供了兼具理论深度与工程可行性的 NES 解决方案。

1 非线性能量阱样机的设计原理

刚性连杆铰链型非线性能量阱结构如图 1 所示，其中对称分布的刚性连杆铰链与垂直螺旋弹簧并联布置，连杆铰链两端受一定的预压载荷，中间承载非线性能量阱质量块；分别布置两个调节装置：一是预压力调节机构，二是螺旋弹簧高度调节机构。m_3 为预压力调节机构连杆轴承的质量，k_{s2} 和 c_{s2} 分别为预压力调节机构连杆的水平弹簧刚度和水平方向阻尼。预压力调节机构用于调节连杆铰链的刚度特性，螺旋弹簧高度调节机构用于对不同非线性能量阱质量进行重力补偿，保证非线性能量阱始终工作在静平衡位置附近。刚性连杆铰链结构用于垂直方向引进立方刚度和负刚度的恢复力，调整水平弹簧的预压程度即可调整机构的负刚度。

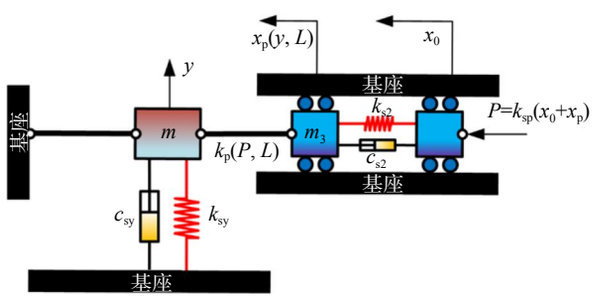


图 1 连杆铰链型非线性能量阱结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of nonlinear energy sink structure with connecting rod hinge type

非线性能量阱结构的运动微分方程如下：

$$m\ddot{y}+\left(k_{sy}+k_p\right)y+c_{sy}\dot{y}=0 \tag{1}$$

式中，m为子系统质量；k_{sy}为垂直刚度；k_p为受到预压的水平连杆装置产生的刚度；c_{sy}为垂直方向的阻尼。当质量产生微小位移Δy时，由于压缩力产生额外的力矩$P\Delta y$。该力矩会进一步使铰链偏转，即产生负刚度。在压缩力的作用下，梁的刚度具有复杂的三角函数形式，而铰链弯曲部分的等效长度取决于其变形程度。

基于刚柔耦合设计非线性能量阱的核心原理在于[15-16]：

（1）刚性连杆（刚性机构）通过铰链转角 θ 的几

何非线性将垂向位移 y 转化为刚性连杆对于质量块的垂向非线性作用力，从而产生立方刚度；

（2）竖直弹簧（柔性机构）恢复力抵消由质量块引起的静变形，确保负刚度效应在平衡点附近稳定工作；

（3）通过刚性连杆铰链的几何非线性与柔性弹簧的线性恢复力协同作用，实现正负刚度的动态调控和能量的耦合传递。

鉴于铰链弯曲部分的刚度难以精确量化，采用近似表达式对其模型进行推导。水平压缩力通过将刚度 k_{s2} 的水平弹簧压缩到一定位移 x_0 而产生：

$$\begin{cases} k_{\mathrm{p}}(P,L) \approx -P/L \\ P = k_{s2}(x_0 + x_{\mathrm{p}}) \end{cases} \tag{2}$$

式中，L 的工程含义是连杆铰链有效臂长。铰链部分的连杆在 y 方向上的变形导致其在 x 方向上产生运动 x_{p}，基于小变形假设和几何非线性分析，该运动学关系满足：

$$x_{\mathrm{p}} = -\frac{2y^2}{L + \sqrt{L^2 - y^2}} \approx -\frac{y^2}{L} \tag{3}$$

可得动力学模型如下：

$$m\ddot{y} + \left(k_{\mathrm{sy}} - k_{s2}\frac{x_0}{L} + k_{s2}\frac{y^2}{L^2}\right)y + c_{s2}\dot{y} = 0 \tag{4}$$

引入等效刚度 $k_{\mathrm{n}} = -k_{s2}\dfrac{x_0}{L}$，$k_{\mathrm{c}} = k_{s2}\dfrac{1}{L^2}$，$k_{\mathrm{eq}} = k_{\mathrm{sy}}$。其中 k_{n} 为等效负刚度，k_{c} 为等效立方刚度，k_{eq} 为等效线性刚度。由式 (4) 可得：

$$m\ddot{y} + k_{\mathrm{eq}}y + k_{\mathrm{n}}y + k_{\mathrm{c}}y^3 + c_{s2}\dot{y} = 0 \tag{5}$$

故当 $k_{\mathrm{eq}} = -k_{\mathrm{n}}$ 时，该结构可以构成非线性能量阱装置所需的本质非线性刚度形式。

2　非线性能量阱系统的力学特性

2.1　系统建模

图 2 为耦合非线性能量阱系统结构示意图，非线性能量阱由一对刚性连杆铰链和位于铰链内的质量 m_2 组成，采用垂直弹簧来消除重力影响。连杆铰链的两端被固定于基座，其运动位移量由 x_1 表示。在建立模型时，由于连杆铰链机构自身的质量与阻尼对非线性恢复力的影响甚微，故可忽略不计；而水平弹簧刚度 k_{h} 则为主要影响因素。轴向力 P 的大小可表示为 $P = k_{\mathrm{h}}(x_1 + x_0)$，其仅施加在一端，通过改变轴向力 P 大小，可调整非线性能量阱的类型（双稳态 NES 或立方刚度 NES）。

耦合非线性能量阱的系统运动微分方程如下：

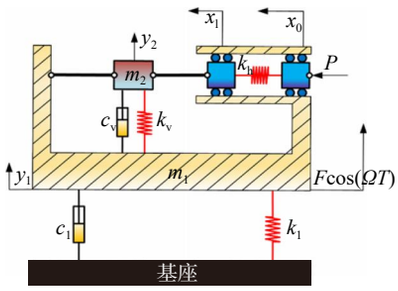


图 2　耦合非线性能量阱吸振系统结构示意图

Fig. 2　Schematic diagram of the structure of a coupled nonlinear energy sink absorption system

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 + c_{\mathrm{v}}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2(y_1 - y_2)^3 = F\cos(\Omega T) \\ m_2\ddot{y}_2 + c_{\mathrm{v}}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1)^3 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

非线性能量阱与主系统相连，主系统由待吸振设备 m_1、线性弹簧 k_1 和阻尼 c_1 组成；非线性能量阱与主系统耦合连接，其组成元素包括质量 m_2、刚度 k_{v} 以及阻尼 c_{v}，根据前文结论，得到等效非线性刚度为 $k_2 = \left(k_{\mathrm{sy}} - k_{\mathrm{sp}}\frac{x_0}{L}\right)$。外界激励信号为 $F\cos(\Omega T)$，主系统和非线性能量阱产生的垂向位移分别为 y_1 和 y_2，非线性能量阱的恢复力为 $k_2(y_2 - y_1)^3$，l_0 为弹簧 k_1 在重力作用下产生的静态伸长量。振子运动至该位置（即平衡位置）时，其重力已与弹簧的弹性恢复力相平衡。

引入如下变量代换：

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{m_2}{m_1}, \Omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}}, \alpha = \dfrac{k_2}{m_1}, \xi_1 = \dfrac{c_1}{m_1\Omega_1}, \xi_2 = \dfrac{c_v}{m_1\Omega_1} \\ \omega = \dfrac{\Omega}{\Omega_1}, f = \dfrac{F}{l_0k_1}, \beta = \dfrac{k_2l_0^2}{k_1}, z_1 = \dfrac{y_1}{l_0}, z_2 = \dfrac{y_2}{l_0}, t = \Omega_1 T \end{cases} \tag{7}$$

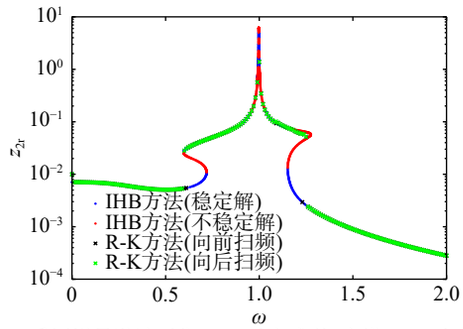
将式 (6) 进行无量纲处理，可得：

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + \xi_1\dot{z}_1 + z_1 + \xi_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + \beta(z_1 - z_2)^3 = f\cos(\omega t) \\ \ddot{z}_2 + \dfrac{\xi_2}{\varepsilon}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + \dfrac{\beta}{\varepsilon}(z_2 - z_1)^3 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

2.2　动力学特性分析

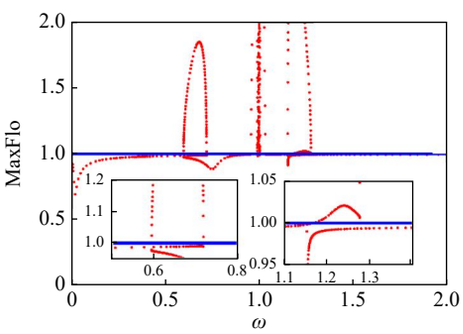
采用增量谐波平衡（incremental harmonic balance, IHB）法对式 (8) 的周期解进行分析。通过引入关于增量的弧长参数追踪完整的解曲线，并结合 Floquet 理论判别周期解的稳定性，进而构建耦合非线性能量阱系统周期解的完整图像，具体过程见文献 [17]。选取如下参数：$\varepsilon = 0.005$，$\xi_1 = 1.2\times10^{-3}$，$\xi_2 = 1.2\times10^{-3}$，$\beta = 1.5$，$f = 0.01$，谐波截断阶数为 2。图 3 展示了增量谐波平衡法与龙格-库塔数值解法的幅频响应曲线对比情况，$z_{2\mathrm{r}}$ 为两种方法求解得到的 NES 振子的振动响应幅值，两种方法除了在 $\omega \in (1.09, 1.25)$ 区间内出现了较小的误差外，其余频率段相对一致，验证了理论模型的准确性。

幅频特性曲线与最大 Floquet 乘子图共同揭示了系统的强非线性动力学行为。在 ω=0.75 处出现幅值陡升（>1.8），并在 ω=1.15 处形成次峰，揭示了主共振



(a) 采用增量谐波平衡(IHB)法与龙格-库塔(R-K)法获得的系统幅频特性曲线对比

(a) Comparison of the system's amplitude-frequency characteristic curves obtained by the incremental harmonic balance (IHB) method and the Runge-Kutta (R-K) method



(b) 对应的最大Floquet乘子

(b) The corresponding largest Floquet multiplier

图 3 耦合非线性能量阱系统的幅频响应特性与 Floquet 稳定性分析

Fig. 3 Amplitude-frequency response characteristics and Floquet stability analysis of the coupled nonlinear energy sink system

与 3∶1 超谐波共振机制；蓝色实线则表征线性基础响应(幅值稳定≈0.5)。下方放大区更清晰地展现出 $\omega\in[0.7,0.8]$ 的 S 型滞回曲线，证明系统存在鞍结分岔导致的跳跃现象——当激振频率扫过该区间时，响应会突跳至高幅稳态(硬弹簧特性)。

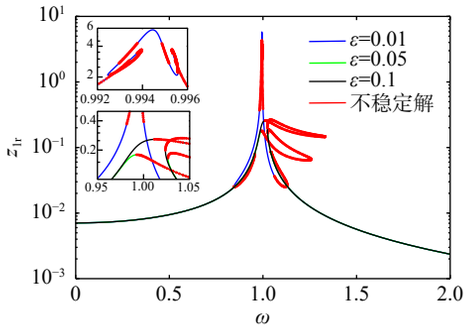
图 4 为 NES 的参数对主系统振动的影响，z_{1r} 为增量谐波平衡法求解得到的主系统振动响应幅值。从图中可以发现，对非线性能量阱系统进行参数分析，得到结论如下：

(1)NES 质量比影响：质量比的增加会导致非线性能量阱低频段与高频段的振动幅值明显降低，而对机械设备在低频段与高频段的响应几乎无影响；

(2)NES 阻尼影响：NES 阻尼增强会致使不稳定解分支轻微左移，并逐步收窄不稳定频域。阻尼过大则会削弱非线性耦合效应，致使系统呈现出单共振峰的线性特征；

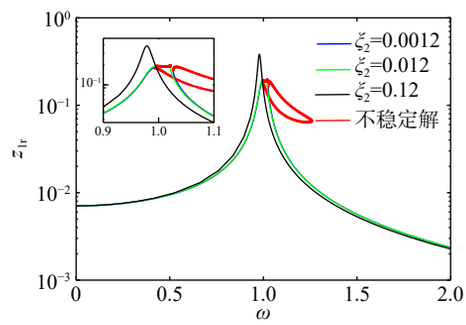
(3)NES 非线性刚度影响：适度提高刚度能拓宽共振附近不稳定周期解的频域。但过度提高刚度会促发分支激增，使不稳定解分支增多、系统动态特性复杂化，同时还会压缩中心频率周边的不稳定解区域。

耦合非线性能量阱的系统与其等效线性系统的



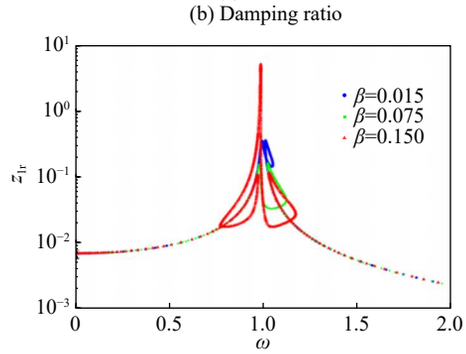
(a) 质量比

(a) Mass ratio



(b) 阻尼比

(b) Damping ratio



(c) 非线性刚度

(c) Nonlinear stiffness

图 4 非线性能量阱参数对系统幅频特性曲线的影响

Fig. 4 The influence of nonlinear energy sink parameters on the amptitude-frequency characteristic curves of the system

幅频特性曲线对比如图 5 所示，其中撤去定向预压部分称为等效线性吸振器。由图可知：等效线性吸振器与非线性能量阱都具备一定的共振峰抑制能力，甚至线性吸振器性能要优于非线性能量阱，但当外界激励频率远离主系统固有频率时，线性吸振器

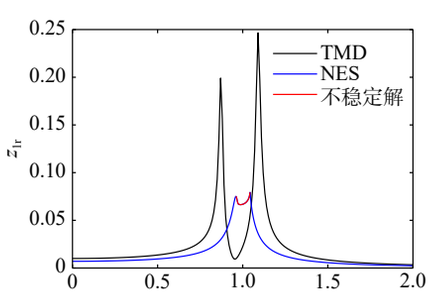


图 5 非线性能量阱与线性吸振器的幅频特性曲线对比

Fig. 5 Comparison of amplitude-frequency characteristic curves between nonlinear energy sink and linear absorber

会使系统新增 2 个固定共振频率点，而耦合非线性能量阱后则不存在该现象，因此在宽频区间内，非线性能量阱具有相对优越的抑振性能。

将本结构对比其他构型的非线性能量阱，如双稳态型[7, 9]、碰撞型[18]、轨道型[8]，连杆铰链型结构具备以下特点：

（1）适用于船舶设备振动中的垂向振动控制。传统的非线性能量收集装置通常仅限于水平振动控制。连杆铰接 NES 克服了这一局限，通过重力补偿实现了垂直振动控制；

（2）独特的预压力调节机构和螺旋弹簧高度调节机构，实现了对等效线性刚度（用于重力补偿）和等效立方/负刚度（用于非线性吸振）的便捷调节。

3　试验研究

3.1　试验台架设计

图 6 为非线性能量阱原理样机装配图，它主要由连杆及铰链机构、水平弹簧、垂向线性弹簧和轴向预紧力调节机构组成。

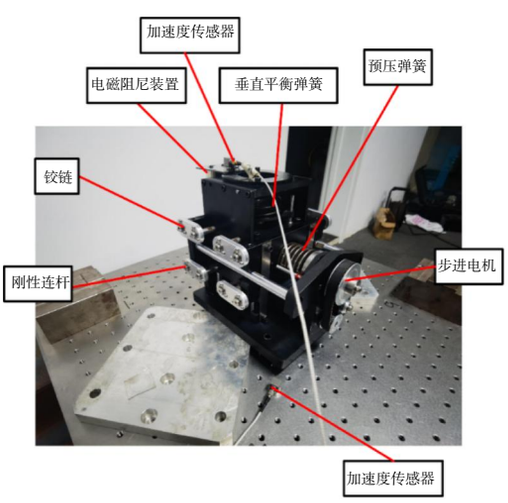
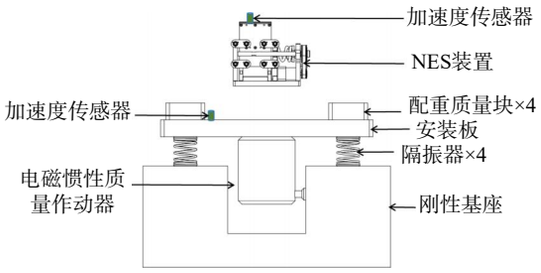


图 6　非线性能量阱原理样机装配图

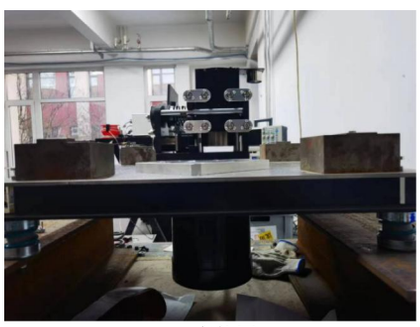
Fig. 6　Assembly diagram of nonlinear energy sink principle prototype

试验平台基于模块化设计理念，构建了涵盖激励源、传感系统、控制单元和数据采集系统的综合测试体系如图 7(a) 所示，用于对连杆铰链型非线性能量阱的动力学特性展开试验研究。模拟试验台架如图 7(b) 所示，主要由以下部分组成：作为激励源的电磁惯性质量作动器；2 个加速度传感器，分别置于安装板和 NES 装置；模拟控制对象的质量由惯性质量作动器、安装板和配重 3 部分质量共同构成；NES 装置；控制器以及数据采集系统。

试验台架借助 4 个螺旋弹簧实现单层隔振，平台由质量为 28 kg 的面包板、20 kg 的辅助配重以及 16 kg 的激振器构成。非线性能量阱样机则包含质量为 1.93 kg



(a) 示意图
(a) Schematic diagram



(b) 实物图
(b) Physical diagram

图 7　模拟负载试验台架方案

Fig. 7　Simulated load test bench scheme

的配重块和 0.95 kg 的辅助支撑结构。激励源为电磁惯性质量作动器，保持输入电压不变，步长为 1 Hz，测试频率范围为 10~200 Hz。每次激励频率变化后，控制器根据加速度传感器数据，自适应调节步进电机压缩水平弹簧，保持 NES 始终处于最优工作状态。

3.2　试验结果分析

施加 10 和 20 Hz 线谱激励时，通过步进电机调节水平弹簧拉压量，并依据跟踪平台加速度与 NES 相对加速度的相位差实现自适应调节。与未装 NES 的平台相比，NES 对两根线谱的减振效果如图 8 所示。10 和 20 Hz 特征线谱的振动加速度级分别衰减 8.3 和 7.1 dB，表明 NES 在低频段（8~20 Hz）具有稳定性能，原因是低频段能量主要通过线性刚度元件传递，立方刚度尚未完全激活，但仍通过靶能量传递实现有效能量耗散。

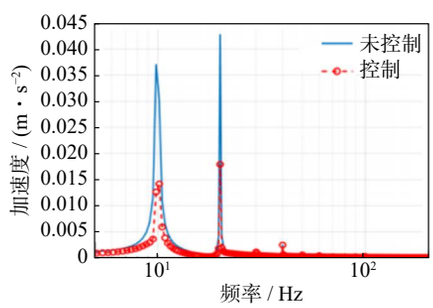


图 8　10 和 20 Hz 的线谱测试结果

Fig. 8　Line spectrum test results at 10 and 20 Hz

施加 10 和 43 Hz 的线谱激励，通过步进电机调节水平弹簧拉压量，通过跟踪平台加速度与 NES

相对加速度的相位差实现自适应调节。与未装 NES 的平台相比，NES 对两根线谱的减振效果如图 9 所示。线谱强度分别降低 7.3 和 9.4 dB，高频激励触发立方刚度元件的强非线性响应，能量通过 TET 机制快速从主系统转移至 NES 并耗散，高频段能量局部化效应增强，提升了吸振效率。

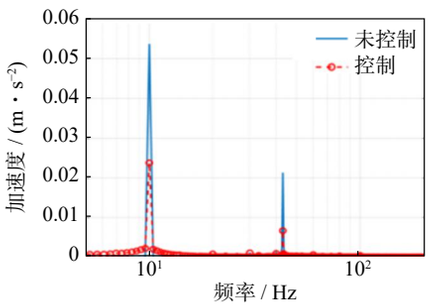


图 9 10 和 43 Hz 的线谱测试结果

Fig. 9 Line spectrum test results at 10 and 43 Hz

施加 10 和 93 Hz 的线谱激励，通过步进电机调节水平弹簧拉压量，通过跟踪平台加速度与 NES 相对加速度的相位差实现自适应调节。与未装 NES 的平台相比，NES 对两根线谱的减振效果如图 10 所示。线谱强度分别降低 7.8 和 9.8 dB，原因是立方刚度元件在高频激励下产生显著的非线性恢复力，增强能量俘获能力。

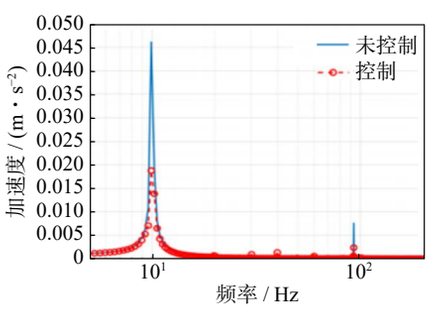


图 10 10 和 93 Hz 的线谱测试结果

Fig. 10 Line spectrum test results at 10 and 93 Hz

施加 20 和 200 Hz 的线谱激励，通过步进电机调节水平弹簧拉压量，通过跟踪平台加速度与 NES 相对加速度的相位差实现自适应调节。与未装 NES 的平台相比，NES 对 2 根线谱的减振效果如图 11 所示，线谱强度分别降低 7.9 和 6.14 dB。

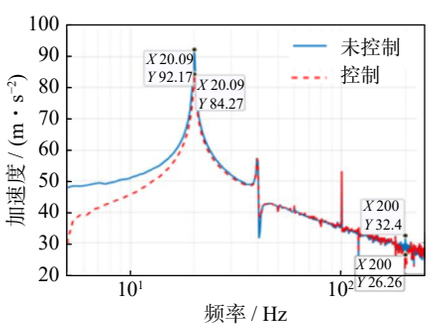


图 11 20 和 200 Hz 的线谱测试结果

Fig. 11 Line spectrum test results at 20 and 200 Hz

8~22 Hz 频段内的线谱通过步进电机调节水平弹簧拉压量，通过跟踪平台加速度与非线性能量阱相对加速度相位差实现自适应调节。线性吸振器（蓝色圆圈）与非线性能量阱（红色实点）的吸振效果对比如图 12 所示。当激励频率从 10 Hz 变化到 20 Hz 时，非线性能量阱的吸振效果都能达到 6 dB 以上，在 13 Hz 时达到 8.2 dB，原因在于非线性刚度抑制了频带分裂问题，避免新增共振峰，实现宽频吸振，可通过预压力调节机构动态优化刚度参数，使 NES 适应不同频率激励。

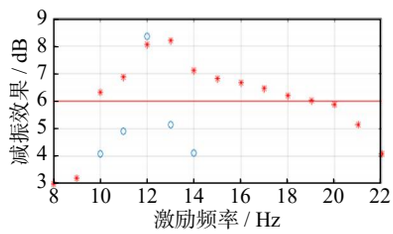


图 12 线性吸振器与非线性能量阱的吸振效果对比

Fig. 12 Comparison of vibration absorption effects between linear absorbers and nonlinear energy sinks

频段内的线谱通过步进电机调节水平弹簧拉压量，通过跟踪平台加速度与非线性能量阱相对加速度相位差实现自适应调节。非线性能量阱的吸振效果如图 13 所示。当激励频率从 30 Hz 变化到 40 Hz 时，连杆铰链型非线性能量阱的减振效果都能达到 6 dB 以上。

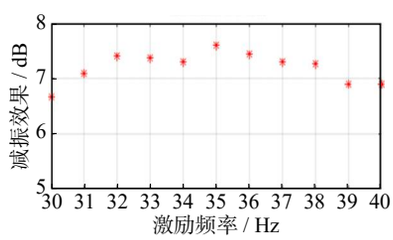


图 13 30~40 Hz 频段内非线性能量阱的吸振效果

Fig. 13 Vibration absorption effect of nonlinear energy sinks in the 30~40 Hz

4 结 论

本文针对船用线性吸振器存在的不足，设计了连杆铰链型非线性能量阱装置，开展了理论分析、特性研究和试验验证，具体结论总结如下：

（1）基于刚柔耦合原理设计的连杆铰链构型非线性能量阱，配合预压力调节机构和螺旋弹簧高度调节机构，有效实现了刚度调节和重力补偿。其中，对称分布的连杆铰链，通过几何大变形产生立方刚度和负刚度非线性恢复力；并联的螺旋弹簧，提供线性恢复力并实现重力补偿，保证系统始终工作在静平衡位置附近。二者的协同实现了刚体运动与弹性变形的能量耦合传递。

（2）通过非线性动力学分析，揭示了 NES 特有的靶能量传递机制，而且 IHB 法计算结果可靠，非线性能量阱相较于等效线性吸振器，展现出显著的宽频抑振优势。

（3）搭建模拟试验台架，在 8~22 Hz 频段内，非线性能量阱的吸振效果可达 6 dB 以上，在 13 Hz 时吸振效果更是达到 8.2 dB，验证了连杆铰链型非线性能量阱在宽频线谱控制中的有效性。

（4）相较于其他 NES 构型，本文提出的连杆铰链型 NES 高度紧凑且基于刚性连接，避免了旋转部件、复杂曲面或易损间隙，具有良好的环境适应性和潜在鲁棒性；独特的预压力调节机构和垂向弹簧补偿机构更使其具备工作频带自适应优化的潜力，高度契合船舶振动控制需求。

综上所述，连杆铰链型非线性能量阱拥有 6 dB 以上的减振效果，可直接降低船舶特征线谱噪声，在船舶振动控制方面展现出良好的应用潜力，为解决船用线性吸振器的不足提供了技术途径。后续将针对 NES 的自适应算法响应延迟进行改进研究以实现瞬时频率跟踪。

参考文献：

[1] 苏强，王桂波，朱鹏飞，等. 国外潜艇声隐身前沿技术发展综述 [J]. 舰船科学技术，2014，36(1)：1-9.
SU Qiang，WANG Guibo，ZHU Pengfei，et al. Summarize of foreign submarine acoustic stealth frontier technologies development[J]. Ship Science and Technology，2014，36(1)：1-9.

[2] DOU J X，YAO H L，CAO Y B，et al. Permanent magnet based nonlinear energy sink for torsional vibration suppression of rotor systems[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics，2023，149：104321.

[3] CAO R Q，WANG Z J，ZANG J，et al. Resonance response of fluid-conveying pipe with asymmetric elastic supports coupled to lever-type nonlinear energy sink[J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)，2022，43(12)：1873-1886.

[4] KOPIDAKIS G，AUBRY S，TSIRONIS G P. Targeted energy transfer through discrete breathers in nonlinear systems [J]. Physical Review Letters，2001，87(16)：165501.

[5] GENDELMAN O V，STAROSVETSKY Y，FELDMAN M. Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink I：description of response regimes[J]. Nonlinear Dynamics，2008，51(1)：31-46.

[6] LEE J S，CLEAVER G B. Investigation of the quantum vacuum as an energy sink for subcritical and supercritical vaporization lasers[J]. Heliyon，2020，6(1)：e03210.

[7] STAROSVETSKY Y，GENDELMAN O V. Interaction of nonlinear energy sink with a two degrees of freedom linear system：internal resonance[J]. Journal of Sound and Vibration，2010，329(10)：1836-1852.

[8] 王菁菁，李浩博，刘志彬. 高层结构附加轨道非线性能量阱减振性能研究 [J]. 振动与冲击，2020，39(3)：173-180.
WANG Jingjing，LI Haobo，LIU Zhibin. Track nonlinear energy sink attached to a high-rise building for response mitigation[J]. Journal of Vibration and Shock，2020，39(3)：173-180.

[9] TREACY C，STEIN D，CHELIDZE D. Irrational nonlinearity enhances the targeted energy transfer in a rotary nonlinear energy sink[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics，2024，19(6)：061001.

[10] TAN T，WANG Z M，ZHANG L，et al. Piezoelectric autoparametric vibration energy harvesting with chaos control feature[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，161：107989.

[11] 甄冬，李堃，刘晓昂，等. 非线性能量阱对汽车车身垂向振动的抑制效果 [J]. 中国机械工程，2022，33(1)：24-33.
ZHEN Dong，LI Kun，LIU Xiaoang，et al. Suppression effectiveness of NES for vehicle body vertical vibrations[J]. China Mechanical Engineering，2022，33(1)：24-33.

[12] LI H Q，LI A，ZHANG Y F，et al. Importance of gravity and friction on the targeted energy transfer of vibro-impact nonlinear energy sink[J]. International Journal of Impact Engineering，2021，157：104001.

[13] KREMER D，LIU K F. A nonlinear energy sink with an energy harvester：harmonically forced responses[J]. Journal of Sound and Vibration，2017，410：287-302.

[14] SHAO J W，YANG J M，WU X，et al. Nonlinear energy sink applied for low-frequency noise control inside acoustic cavities：a review[J]. Journal of Low Frequency Noise，Vibration and Active Control，2021，40(3)：1453-1472.

[15] 李海波，赵学清，耿葵花. 一种多自由度-刚柔耦合筛分机械的构型设计与分析 [J]. 矿山机械，2020，48(4)：46-50.
LI Haibo，ZHAO Xueqing，GENG Kuihua. Design and analysis on configuration of a multiple DOF and rigid-flexible coupling sieving machine[J]. Mining & Processing Equipment，2020，48(4)：46-50.

[16] 郑力新，李宗刚，王治平，等. 刚柔耦合仿生胸鳍结构设计与动力学分析 [J]. 中南大学学报(自然科学版)，2025，56(5)：1826-1838.
ZHENG Lixin，LI Zonggang，WANG Zhiping，et al. Design and hydrodynamic modeling of bionic pectoral fin with rigid-flexible coupled structure[J]. Journal of Central South University (Science and Technology)，2025，56(5)：1826-1838.

[17] LIU Q H，CAO J Y，ZHANG Y，et al. Interpretable sparse identification of a bistable nonlinear energy sink[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，193：110254.

[18] 黎文科. 一类单侧碰撞非线性能量阱的动力学特性分析研究 [D]. 哈尔滨：哈尔滨工程大学，2019.
LI Wenke. Study on dynamic behavior of a class of single-sided vibro-impact nonlinear energy sinks[D]. Harbin：Harbin Engineering University，2019.

第一作者：柴　凯(1989—)，男，博士，副教授。
E-mail：hjcckll@sina.com

通信作者：初嘉文(1993—)，男，博士研究生。
E-mail：chujiawen@hnu.edu.cn

非线性振动控制恢复力辨识方法研究进展

刘清华[1]，曹军义[2]，金 睿[1]，沈祥力[1]，姜 东[1]

（1. 南京林业大学机械电子工程学院，江苏 南京 210037；2. 西安交通大学机械工程学院，陕西 西安 710049）

摘要：非线性振动控制在航天、航空和航海等领域的高端装备中扮演着极其重要的角色，在振动控制方程中非线性恢复力的设计与调控直接影响振动控制水平的优劣。然而，在实际服役环境下，准确的非线性恢复力估计依赖于高质量的数据集获取和鲁棒的参数辨识算法。基于此，针对非线性振动控制中的隔振、减振和吸振等热门非线性振动控制方式，将其非线性恢复力调控归纳为三种典型形式：准零刚度、双稳态刚度和迟滞阻尼类型。针对三种恢复力类型，系统回顾了恢复力曲面法、希尔伯特变换、时频分析、非线性子空间、无迹卡尔曼滤波、优化算法、物理先验神经网络和稀疏辨识 8 种辨识方法的研究进展和辨识流程。此外，简要总结了非线性恢复力辨识中的一些问题及对未来研究方向的展望。

关键词：非线性振动控制；准零刚度；双稳态刚度；迟滞阻尼；恢复力辨识

中图分类号：TH113 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508096

Research progress on restoring forces identification in nonlinear vibration control

LIU Qinghua[1], CAO Junyi[2], JIN Rui[1], SHEN Xiangli[1], JIANG Dong[1]

（1.College of Mechanical and Electronic Engineering，Nanjing Forestry University，Nanjing 210037，China；
2.School of Mechanical Engineering，Xi’an Jiaotong University，Xi’an 710049，China）

Abstract: Nonlinear vibration control plays a crucial role in advanced aerospace, aviation, and marine equipment. The design and regulation of the nonlinear restoring force within vibration control equations directly determine the effectiveness of vibration control. However，accurate estimation of this force in practical applications depends on acquiring high-quality datasets and employing robust parameter identification algorithms. Consequently，prevalent nonlinear vibration control strategies-such as isolation，reduction，and absorption-can be categorized by their nonlinear restoring forces into three primary types：quasi-zero stiffness，bistable，and hysteresis. This review systematically examines recent progress in identifying three types of nonlinear restoring forces using eight key methodologies：the restoring force surface method，Hilbert transform，time-frequency analysis，nonlinear subspace identification，unscented Kalman filter，optimization algorithms，physics-informed neural networks，and sparse identification. Additionally，certain challenges inherent in nonlinear restoring force identification are highlighted，and potential future research directions are briefly outlined.

Keywords: nonlinear vibration control; quasi-zero stiffness; bistable stiffness; hysteretic damping; restoring force identification

在航天、航空、航海、汽车工程、高端精密仪器、建筑桥梁等领域，利用线性弹簧、黏性阻尼、结构阻尼实现控制对象与激励源有效隔离，形成隔振频带并耗散能量，从而降低振动与噪声水平的方法已很成熟[1]。随着高端装备对振动控制水平要求的提高、大推力航空发动机和船舶发动机驱动设备的发展、大型柔性空间可展开结构的使用以及人们对舒适性等要求的提高，利用非线性设计增强隔振、减振、阻振或者吸振结构的性能逐渐成为振动控制领域的学术研究与工程应用的主流，这得益于近年来非线性结构设计技术、建模理论和动力学参数辨识与控制技术的蓬勃发展[2-5]。

孙秀婷等[6]系统回顾了非线性隔振与时滞消振方法，并阐明了其动力学隔振和消振机理。DING 等[7]、GENG 等[8]、ZENG 等[9]提出多种基于钢丝绳、磁铁和斜弹簧等结构的分段线性、硬特性及多稳态非线性吸振结构，应用于多层框架结构、柔性梁板及输流管道结构。鲁正等[10]对非线性能量阱的基本概念、发展与研究现状进行了归纳，并总结了非线性能量阱在航空航天、机械工程、土木工程和能量采集中的应用进展。YANG 等[11]对非线性振动控制的应用、设计形式、非线性机制、优化技术以及未来发

收稿日期：2025-08-16；**修订日期：**2025-09-09

基金项目：国家自然科学基金资助项目（12502011，52375126）

展的前景进行了综述。PU 等[12] 和 WU 等[13] 针对高端精密机械装备与尖端仪器的减振需求，发明了高磁负刚度主动控制减振器等装置，成功应用于国防机载仪器、扫描电镜等超精密制造与测量装备。肖庆雨等[14]、昌耀鹏等[15]、王凯等[16] 在新型准零刚度隔振器、双层主动隔振系统、非线性弹性体调控超结构方面进行了系列研究。YAN 等[17-18] 对非线性电磁准零刚度和双稳态隔振器开发了系列样机，对电磁阻尼隔减振技术进行了深入研究。JING 等[19] 对有益非线性 X 型结构和仿生隔振结构的设计、机理、动力学分析及应用进行了系统研究。FANG 等[20] 提出新的手性超结构，推动了材料的轻质、高刚度、高强度与高韧性协同优化。

综合现有非线性隔振、减振与吸振技术的发展现状，非线性刚度与结构阻尼的调控占据主导地位，因此非线性恢复力的参数辨识成为关键问题。材料、加工与安装等环节的不确定性均会导致实际样机性能偏离预期设计。因此，实际工况中非线性刚度与阻尼的准确辨识，不仅对结构性能预测与健康监测至关重要，还能为优化设计提供直接指导，最终形成“恢复力设计→测试→参数辨识→优化/控制/监测→再优化”的闭环流程，显著推动非线性振动控制技术的进一步发展。

在非线性系统参数辨识方法方面，NOËL 等[21] 系统回顾了结构动力学领域参数辨识方法，并以卫星惯性轮碰撞减振结构为例说明了恢复力曲面法和非线性子空间方法的应用。JIN 等[22] 利用辨识方法系统检测了螺栓连接梁结构非线性刚度和阻尼随激励强度的变化特性，这些方法一般适用于弱非线性结构，且主要从时频特征观察模态频率和阻尼变化，难以直接映射到物理非线性恢复力指导设计。AL-HABABI 等[23] 总结了土木工程结构动力学中的非线性阻尼辨识技术，重点涵盖了黏性阻尼、库伦摩擦阻尼以及迟滞阻尼等典型非线性阻尼结构的辨识方法。姜金辉等[24] 回顾了动载荷识别方法的发展历程，系统性总结了现有经典信号处理和数据驱动等动载荷识别方法，但针对非线性恢复力辨识的系统性综述仍属空白。考虑到非线性振动控制中强非线性恢复力辨识问题，系统回顾现有辨识方法与研究进展，梳理现有的非线性参数辨识框架，对非线性振动控制的正问题研究者从试验和工程角度进一步优化设计具有重要意义。

本文将现有非线性振动控制技术中采用的典型非线性恢复力模型归纳为三类：准零刚度、双稳态刚度以及结构迟滞非线性恢复力。针对这三类典型的非线性恢复力形式，系统梳理了恢复力曲面法、希尔伯特变换、时频分析、非线性子空间、无迹卡尔曼滤波、优化算法、物理先验神经网络及稀疏辨识在恢复力辨识中的应用及发展历程，并对现有辨识方法仍存在的问题进行了简单总结，对未来研究热点领域进行了展望。

1　非线性恢复力的典型形式

非线性振动控制可根据实现方式分为主动、半主动与被动控制，按功能可分为隔振、减振和吸振等不同类型。从经典牛顿第二定律出发，各类非线性振动控制系统的动力学行为均可简化表示为如下微分方程：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{L}_{\mathrm{n}i}\boldsymbol{f}_{\mathrm{n}i}(t)=\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(t) \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵；$\boldsymbol{C}$ 为线性阻尼矩阵；$\boldsymbol{K}$ 为线性刚度矩阵；$\boldsymbol{f}_{\mathrm{n}i}(t)$ 表示在任意自由度上耦合的非线性恢复力；$\boldsymbol{L}_{\mathrm{n}i}$ 决定了非线性位置与数量，通常为−1，0 和 1；$\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(t)$ 为外部激励力；$\boldsymbol{x}$、$\dot{\boldsymbol{x}}$和$\ddot{\boldsymbol{x}}$分别为位移、速度和加速度组成的矩阵。通常情况下，系统线性弹性力与外部耦合非线性力的总和$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{L}_{\mathrm{n}i}\boldsymbol{f}_{\mathrm{n}i}(t)$被认为是非线性恢复力，这种恢复力既可以是由纯弹性部件引起的，也可以是材料发生弹塑性变形或者干摩擦引发的迟滞类型恢复力，迟滞类型恢复力可以耗散能量，降低共振传递率。

研究表明，非线性振动控制中耦合的非线性力主要实现形式包括：永磁铁/电磁[25]、凸轮连杆齿轮/斜弹簧[26]、屈曲梁[27]、3D 打印超结构[28]、MEMS 和形状记忆合金材料等[29]。这些附加非线性力结构耦合到原有线性弹簧上形成准零刚度和双稳态结构，实现高频振动隔离。而材料弹塑性或者干摩擦导致的迟滞恢复力，可以形成能量耗散，降低共振传递率达到减振目的。非线性振动控制的典型工程应用、非线性刚度和阻尼的实现形式以及归纳的三种非线性恢复力如图 1 所示，准零刚度可以表示为分段线性/多项式耦合形式，双稳态可以用高阶多项式函数表征，而迟滞阻尼的表征可以用双线性滞回和 Bouc-Wen 模型等。本文总结的恢复力辨识方法主要针对这几种函数。

2　非线性恢复力辨识方法研究进展

结构动力学中非线性恢复力辨识方法可总结如图 2 所示。以 IBÁÑEZ 等[30]、MASRI 等[31] 为代表的学者提出了恢复力曲面方法。该方法通过构建位移、速度与力的三维曲面来直观截取非线性刚度和阻尼特性，为非线性辨识奠定了直观的物理基础。

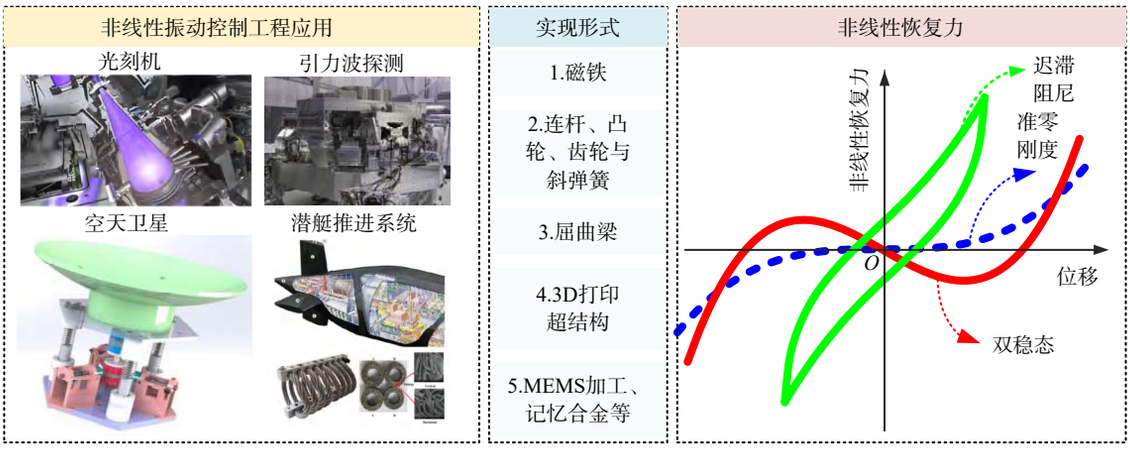


图 1 非线性振动控制典型工程应用[32-35]、实现方式及其非线性恢复力本质

Fig. 1 Typical engineering applications[32-35], implementation methods and the essence of nonlinear restoring force in nonlinear vibration control

基于带外生输入的非线性自回归滑动平均模型，BOX 等[36]、KORENBERG 等[37] 发展了正交估计算法和谐波探测算法，极大地提升了对复杂非线性参数模型的参数估计能力。以 STASZEWSKI[38] 的时频分析方法以及 FELDMAN 等[39] 的希尔伯特变换方法为代表，研究者们转向利用瞬态响应的幅值与频率信息来识别时变的非线性动力学特性。21 世纪，状态空间和概率方法成为主流。非线性子空间方法通过将非线性力反馈与状态空间矩阵投影相结合进行辨识非线性动力学特性[40]，而无迹卡尔曼滤波方法则通过概率分布传递来处理非线性，显著提高了对强非线性系统的状态估计精度[41]。以 BRUNTON 等[42] 提出的稀疏辨识方法为标志，研究焦点转向数据驱动与算法创新。该方法通过构建过完备的非线性基函数库，并采用序贯阈值最小二乘等稀疏优化算法，从数据中自动发现支配动力学方程的稀疏结构，实现了模型复杂性、可解释性与精度之间的平衡。随着人工智能浪潮的到来，物理信息神经网络等新型方法由 RAISSI 等[43] 推动。该方法将物理定律（常以微分方程残差形式）嵌入神经网络的损失函数中，兼具数据驱动与物理模型的双重优势，为求解高维、部分已知的复杂非线性系统提供了全新范式。非线性系统辨识技术始终致力于追求更强大的能力：处理更高维的系统、拥有更高的抗噪性、实现更高的计算效率、逼近任意的非线性特性，并最终获得具有清晰物理意义的可解释模型。这一演进过程不仅体现了方法论上的进步，也反映了不同时期工程问题需求与计算工具发展的相互促进与深度融合。



图 2 非线性恢复力辨识发展历程

Fig. 2 Research progress on nonlinear restoring force identification

结合 NOËL 等[21] 回顾的结构动力学参数辨识算法以及 2006~2016 年结构动力学参数辨识十年研究进展，本文结合了最近十年发展的物理先验神经网络和稀疏辨识方法，简要介绍恢复力曲面、希尔伯特变换、时频分析、非线性子空间、无迹卡尔曼滤波、优化算法、物理先验神经网络和稀疏辨识方法在非线性恢复力辨识中的代表性研究进展，并给出辨识流程图。在对 8 种辨识方法进行回顾和辨识流程介绍之后，给出了不同辨识方法对准零刚度、双稳态刚度及迟滞类型恢复力的适用性、抗噪声能力、辨识效率和适用高维系统能力对比。

2.1 恢复力曲面法

恢复力曲面法最早由 MASRI 等[31] 提出，也称为力-状态映射方法。该方法是一种将非线性激励力减去惯性力作为 Z 坐标，将位移和速度分别作为 X 和 Y 坐标，从而将牛顿第二运动定律方程视为三维恢复力曲面的方法。非线性恢复力轨迹可以通过

恢复力曲面与垂直的零速度和零位移平面相交来可视化，需要注意的是，零速度/位移平面并非绝对的零速度/位移平面，可选取合理的阈值范围来截取曲面以保证识别精度。由于恢复力曲面法适用于任意非线性恢复力形式，且操作简单，因此得到广泛的关注和应用，其详细辨识流程如图 3 所示。

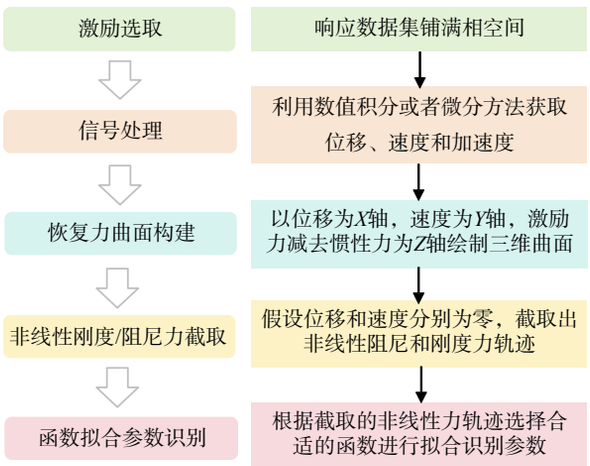


图 3　恢复力曲面法辨识流程

Fig. 3　Identification process of restoring force surface method

MASRI 等[31] 首先提出了非线性动力系统的非参辨识方法，该方法适用于强弱非线性及单自由度至多自由度系统，并在杜芬振子和双线性滞回系统中得到了验证。ALLEN 等[44] 将基于速度测量的恢复力曲面法应用于微机电系统悬臂梁结构，分析了分段非线性恢复力现象。NOËL 等[45-46] 探索了空间螺栓连接板、卫星惯性轮碰撞结构的接触、碰撞非线性刚度特性。CARBONI 等[47] 和 PEI 等[48] 利用恢复力曲面法获取钢丝绳隔振器非线性迟滞恢复力轨迹。LIU 等[49] 系统分析了加速度测量、位移测量恢复力曲面法在准零刚度、双稳态和多稳态悬臂梁结构中应用的局限性。恢复力曲面法的局限性在于，对位移、速度和加速度质量要求高，否则截取的非线性恢复力轨迹很难提取特征，且不适用于某自由度存在两个及以上的坐标耦合情况，阻碍了其在多自由度系统中的应用。

2.2　希尔伯特变换

希尔伯特变换应用于参数辨识最早由 FELDMAN[50] 提出，并在线性、分段线性和硬化特性振子上做了数值验证。希尔伯特变换方法将非线性恢复力和阻尼表达为瞬时固有频率和瞬时幅值（包络）的函数，其中瞬时固有频率和瞬时幅值是通过振动微分方程的希尔伯特变换形式得到的。当遭遇强非线性时，非线性振子的响应包含多阶谐波分量，即包含快变分量使得瞬时幅值和瞬时固有频率提取困难，因此，FELDMAN[51] 又提出了希尔伯特振动分解，将非线性响应分解为慢变分量，从而可以提取叠加瞬时固有频率和叠加瞬时幅值，解决了强非线性振子非线性恢复力辨识的难题。其详细的辨识流程如图 4 所示，根据恢复力形式不同，可以采用多步方法，关键在于提取包络和计算叠加瞬时固有频率，从解析信号的角度计算非线性刚度和阻尼。

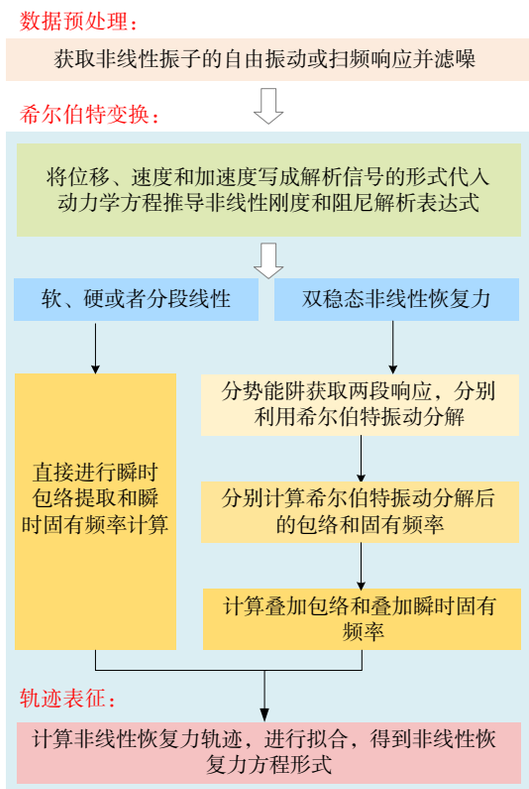


图 4　希尔伯特变换法辨识流程

Fig. 4　Identification process of Hilbert transform method

FELDMAN[52-53] 提出了非线性恢复力和黏性阻尼辨识的自由振动和强迫振动希尔伯特变换算法；又在强非线性振动衰减响应基础上提出了希尔伯特振动分解方法，为强非线性结构恢复力辨识提供了一种振动信号分解求叠加包络的方法[50]；并将希尔伯特变换应用于一种分段线性刚度微机电驱动器结构[54]。WU 等[55] 拓展了希尔伯特变换方法，应用于可折叠机翼铰链处分段非线性刚度的识别。FELDMAN 等[56] 将希尔伯特变换应用于精密加工平台结合面非线性迟滞恢复力的非参数表征。YUAN 等[57] 将希尔伯特变换方法拓展到机电耦合系统，分析了压电层合板俘能器的软化-硬化非线性刚度特性。LIU 等[58] 提出最优希尔伯特变换方法辨识准零、双稳态非线性振子恢复力，提高了其抗噪声能力。希尔伯特变换方法提取非线性恢复力的过程可以附带计算非线性频响和骨架曲线，然而，该方法仅适用于单自由度和弱耦合二自由度系统，且与恢复力曲面法类似，其抗噪能力仍显不足。

2.3 时频分析

时频分析方法(如短时傅里叶变换、小波变换和 Hilbert-Huang 变换等),可通过可视化瞬时固有频率随振子幅值衰减变化关系辨识非线性刚度特性,且能够可视化非线性响应信号在不同时间和频率的能量密度或强度,从而提取出信号的瞬时频率和幅值,进而辨识系统的阻尼特性。这种方法在结构健康监测领域受到广泛关注,在非线性刚度和阻尼识别应用较少。本文仅对其应用情况进行简要回顾。

ALLEN 等[59]提出了一种时频信号处理技术,用于识别和表征具有七个自由度和非线性连接结构的质量-弹簧系统瞬态响应测量中的非线性。BAO 等[60]提出自适应稀疏时频分析技术检测桥梁电缆张力的变化,结果表明,与 Hilbert-Huang 变换技术相比,自适应稀疏时频分析方法可以更精确地估计随时间变化的电缆张力。WANG 等[61]提出了一种离散小波变换和子结构算法来跟踪剪切结构刚度的突然退化。在一个三层剪切框架为特征的结构上进行试验验证,发现了刚度的突然退化。MENG 等[62]使用短时傅里叶变换来识别具有不同裂纹长度的齿轮齿的时变啮合刚度,以进行故障表征。QU 等[63]将自适应小波变换分析引入到斜拉桥损伤识别,提取的非线性刚度和阻尼系数为地震激励期间的损伤进展提供了初步见解。

2.4 非线性子空间辨识

子空间辨识最早在自动化与控制中广泛应用,MARCHESIELLO 等[40]提出了非线性子空间辨识方法应用于动力学控制方程中。非线性子空间辨识方法通过利用几何工具,借助正交三角分解和奇异值分解等强大的数值技术,在动态方程中将非线性恢复力视为非线性内部反馈力,利用动态系统以及与输入、输出和直接前馈相关的矩阵,使得通过扩展频率响应函数矩阵进行参数估计变得可行,其详细辨识流程如图 5 所示。

NOËL 等[64]发展了频域子空间非线性辨识方法,并在多种非线性基准上进行了数值验证。MARCHESIELLO 等[65]研究了伪极点对非线性子空间辨识算法的影响,并在具有局部硬化非线性的多自由度框架上进行了验证。ZHANG 等[66]提出两阶段子空间辨识方法识别底层线性系统和耦合非线性时频响。MA 等[67]介绍了一种仅利用输出数据在时域中识别非线性子空间的技术,该方法已成功应用于三个包含间隙非线性的系统。LIU 等[68]提出两阶段时域子空间方法分离双稳态压电悬臂梁中非线性恢复力项和电学项。ZHU 等[69]研究了使用气动力

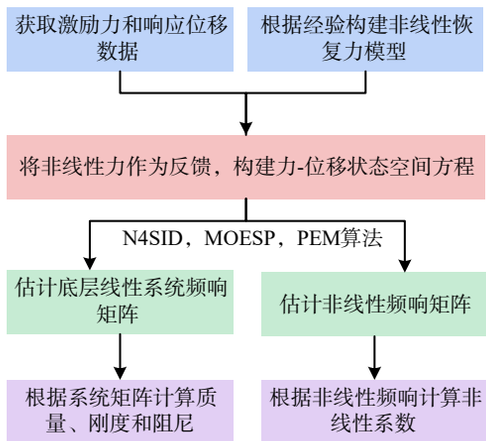


图 5 非线性子空间方法辨识流程

Fig. 5 Identification process of nonlinear subspace identification method

的非线性子空间识别方法,并在翼型挂载导弹系统上进行了数值试验。结果表明,该方法可以有效地识别非线性刚度和非线性阻尼。与恢复力曲面法、希尔伯特变换法和时频分析不同的是,非线性子空间辨识需预设恢复力函数形式,进行参数辨识,虽然其抗噪声能力较强,且适用于多自由度系统,但是需要对恢复力形式有足够的先验,或者假定多种形式备选,其计算效率有待提升。

2.5 无迹卡尔曼滤波

无迹卡尔曼滤波是一种用于处理非线性系统状态估计的递归滤波器,利用“无迹变换”技术来传播非线性恢复力函数,与扩展卡尔曼滤波相比避免了对雅可比矩阵的计算,这使得它对非线性振动控制系统有更好的适应性。在使用无迹卡尔曼滤波器进行参数识别时,需要合理选择状态参数和测量参数,建立系统动态模型,设定初始参数,对数据进行处理,并通过优化更新的方式逐步确定系统的参数值。无迹卡尔曼滤波详细的辨识流程如图 6 所示,主要分为初始状态估计、预测步和更新步三个流程。

YUEN 等[70]提出了一种用于实时系统识别的先进贝叶斯算法,该算法将最先进的模型聚类选择组件纳入扩展卡尔曼滤波器,其中模型选择和参数识别可以同时进行。LEI 等[71]引入了一种独特的无迹卡尔曼滤波器,该滤波器结合了未知输入,能够同时估计非线性结构系统和外部激励,并在剪力墙试验中准确识别了滞回力。LUND 等[72]利用无迹卡尔曼滤波器来估计试验非线性能量吸收装置的模型参数,该装置在刚度上表现出几何非线性,在阻尼行为上表现出基于摩擦的非线性。PAUL 等[73]探索了基于卡尔曼滤波器的算法的各种迭代,包括扩展卡尔曼滤波器、两级增广卡尔曼滤波和无迹卡尔曼滤波

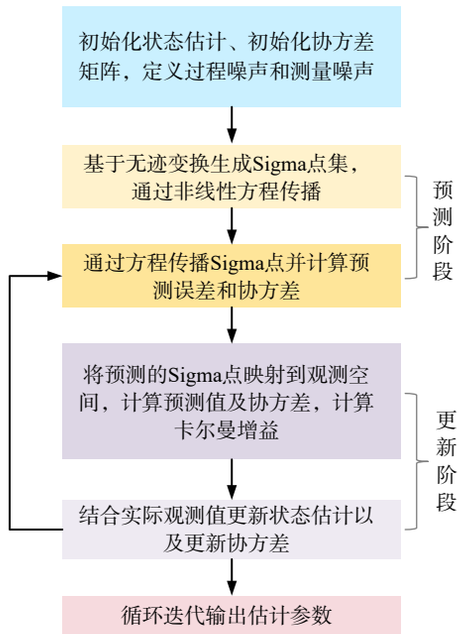


图 6　无迹卡尔曼滤波辨识流程

Fig. 6　Identification process of unscented Kalman filter

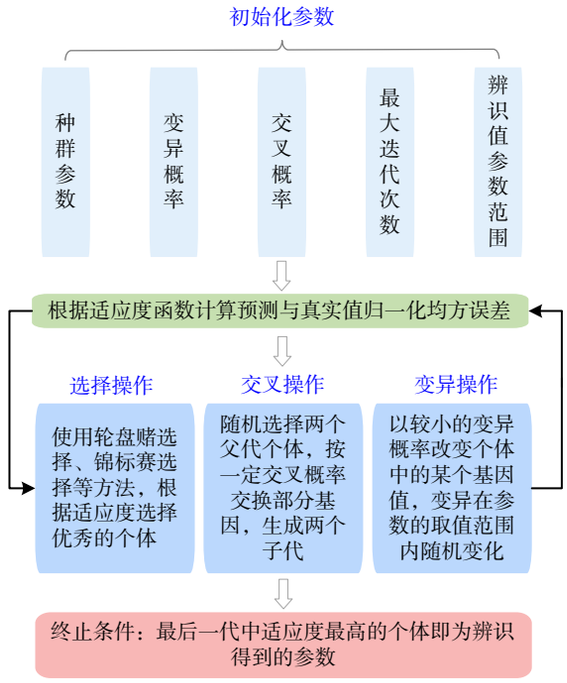


图 7　优化算法辨识流程（以遗传算法为例）

Fig. 7　Optimizing algorithm identification process (taking genetic algorithm as an example)

器。在模拟未连接的纤维增强弹性体隔振器的过程中，这些算法被用来评估和比较它们在确定非线性滞后模型的条件和特征方面的有效性。CAO 等[74]提出结合贝叶斯滤波器和截断概率密度函数的参数估计方法实现无迹卡尔曼滤波器，三阶容积卡尔曼滤波器和五阶容积卡尔曼滤波器，明显提高了多层框架中 Bouc-Wen 迟滞恢复力辨识精度和效率。ZHAO 等[75]基于部分自由度的加速度测量，开发了一种改进的扩展卡尔曼滤波器，用于估计未知输入，在具有多个自由度的框架结构上进行了试验，该结构结合了不同的参数磁流变阻尼器来复制各种非线性特性。KWASNIOK[76]探讨了一种利用无迹卡尔曼滤波从时间序列数据重构马尔可夫和非马尔可夫朗之万方程的半参数方法，并在一个双稳态模型上进行了数值验证。

无迹卡尔曼滤波在多自由度、强耦合和各种类型非线性恢复力识别中展现独特优势，具有很强的抗噪声能力，辨识效率很高，但需已知系统模型结构。值得注意的是，随着维度增加，其计算复杂度呈指数增长，且数值稳定性有待提升。

2.6　优化算法

优化算法理论上适用于任何非线性振动控制微分方程的参数辨识，通常情况下将预测响应与实际工况采集响应的归一化均方误差建模为目标函数，利用数值微积分方法进行微分方程求解，同时利用优化算法（如遗传算法、粒子群优化或者差分进化）进行参数寻优，直至误差函数收敛到一个阈值。以遗传算法为例，其详细的参数辨识流程见图 7。

使用优化算法进行参数辨识发展历史较久，近年来其改进方法应用于非线性迟滞结构辨识较为常见。JIANG 等[77]提出了一种利用序列模型优化识别非线性滞后系统参数的新方法，研究结果表明，所确定的数值模型能够准确捕捉强度和刚度的退化。NEGASH 等[78]提出了一种新的遗传算法来估计磁流变流体阻尼器的 Bouc-Wen 模型参数，通过修改遗传算法的交叉和突变步骤，提高了优化效率和识别精度。YI 等[79]基于 Hammerstein 的分数阶多项式修正 Prandtl-Ishlinskii 模型提出一种优化算法识别方法，能够对智能材料驱动器的速率/负载/温度磁滞进行精确识别。LIU 等[80]基于加速度恢复力曲面、极限环和粒子群优化方法辨识了不对称钢丝绳隔振器软化-硬化迟滞非线性恢复力。GUO 等[81]利用粒子群优化算法对特定工况下的双稳态层合板隔振系统混沌识别和参数优化进行了设计。优化算法是参数辨识中最常用的方法之一。然而，该方法需要基于一定的物理先验知识给定合理的参数区间，否则容易导致算法不收敛甚至无解，从而导致辨识失败。相比于其他方法，优化算法的计算效率较低，但其优势在于在理想情况下可以获得全局最优解。

2.7　物理先验神经网络

物理先验神经网络是一种将物理信息与神经网络相结合的科学计算方法。该方法最初由 RAISSI 等[43]提出，旨在通过数据驱动方式，实现对流体力学与量子力学等领域中偏微分方程参数的识别，尤其

在动力学反问题研究中具有重要应用。物理神经网络的参数识别过程是在给定某些边界条件和物理定律的前提下，通过神经网络自动学习系统的数学表达式的过程，物理先验的恢复力参数识别步骤包括：(1)非线性振动建模；(2) 设计合适的神经网络结构以拟合物理方程和边界条件；(3)根据物理知识和经验定义所有的边界条件和初始条件，且满足物理方程和所需的解；(4)结合物理和数学设计损失函数，常微分方程通常用预测响应的 NMSE 误差；(5)使用梯度下降等优化算法进行优化。其总结的辨识流程如图 8 所示。

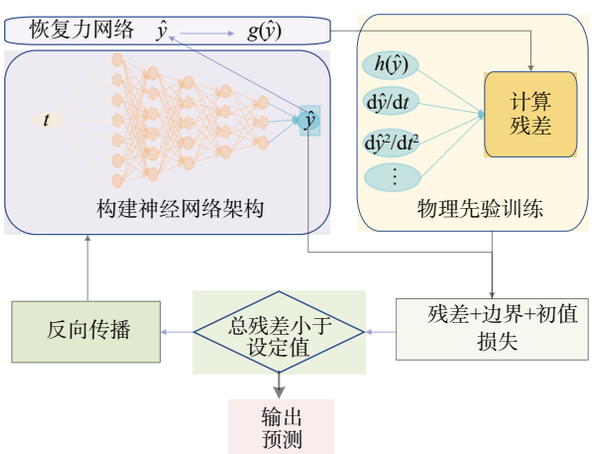


图 8 物理神经网络参数辨识流程

Fig. 8 Identification process of physics informed network parameters

LI 等[82]探索了一种神经网络框架，结合了边界条件的近似函数，旨在解决自适应软机器人中脚关节的重复自然屈曲动态刚度和阻尼参数。LAI 等[83]利用神经常微分方程开发了一种新的结构识别方法，特别强调结合结构动力学等领域知识。该方法在配置负刚度滞后装置的结构系统上进行了验证。JIANG 等[84]提出了一种基于数据驱动方法的识别-控制集成方法。采用物理信息神经网络和龙格-库塔法相结合的识别算法，结合原模型的输入输出信号，建立了准零刚度隔振系统的动态代理模型。

GUO 等[85]通过引入物理约束，同时将有限元计算与均匀设计相结合，生成理想的训练数据集。所提出的物理信息神经网络用于估计实验室规模框架模型和实际框架结构的刚度参数。LIU 等[86]提出了一种新的物理信息神经网络来预测和设计无标记数据的折纸结构势能曲线，为折纸超结构参数辨识后的优化设计奠定了基础。物理神经网络架构用于参数辨识的缺点在于需要预训练网络，虽然可以适用于任意自由度上任意非线性恢复力形式，但是难以实现在线实时辨识，且训练时间较长。

2.8 稀疏辨识

大多数非线性动力系统特性主要由有限数量的重要非线性函数来定义，因此在基函数空间内产生稀疏的控制方程。非线性动力系统的稀疏辨识最初由 BRUNTON 等[42]提出，该算法在各种问题领域得到了验证，诸如洛伦兹方程、杜芬方程、纳维斯托克斯方程等基本系统。在过去的几年里，稀疏识别及其增强方法在非线性系统识别领域引起了极大的关注。稀疏辨识原理主要基于正则化技术，特别是 L1 正则化(也称为 LASSO 正则化)，来实现模型的稀疏性。稀疏辨识通过在损失函数中添加一个惩罚项，促使模型权重向零收缩，从而实现特征选择和模型简化。其详细的辨识流程及示意如图 9 所示。

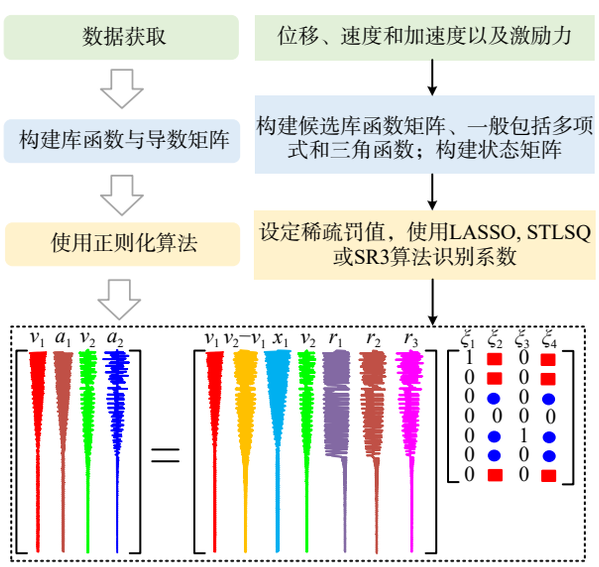


图 9 稀疏辨识流程

Fig. 9 Sparse regression parameter identification process

稀疏辨识非线性动力学系统自被提出以来，研究论文占比最多。LAI 等[87]扩展了 BRUNTON 等[42]的工作，在原有稀疏字典里纳入了能够识别强非线性以及伴随永久变形的滞后或非弹性行为的函数。在一种新型多自由度结构耦合负刚度迟滞阻尼器上验证了所提出框架的性能。LIN 等[88]提出了一种识别非线性动力系统的创新方法，该方法将稀疏辨识算法与可分离最小二乘法相结合，利用 Duhamel 积分来描述系统输入和输出之间的动态相关性。此外，引入了一种基于再现核 Hilbert 空间的新方法来降低振动位移中的非参数噪声，最终在一种屈曲梁型准零刚度隔振器上进行了试验验证。CHENG 等[89]提出了一种两阶段稀疏识别方法，即使测量存在噪声，该方法也能够准确定位和表征包含非线性成分的局部非线性结构。与一阶段稀疏算法相比，即使在较低的信噪比下，该方法也能准确识别局部非线性结构。NOVELLI 等[90]提出了一种有效的数据驱动的动力系统稀疏辨识方法，在一种碰撞型分

段线性电磁俘能器上进行了验证。LIU 等[91-92] 提出一种结合非参数辨识方法进行变量选择后进行稀疏辨识的可解释辨识方法，在双稳态非线性吸振器结构进行了试验验证。SUN 等[93] 提出了一种通过在压缩感知过程中，在时域上施加任意扰动以及任意初始条件来超越局部吸引子的方法。这种广义模型重建方法能够连续和压缩地感知折纸元结构中多个吸引子和多稳定悬臂梁稳态切换过程中的动态行为和稳定性。稀疏辨识理论上适用于任意自由度及非线性恢复力，但是依赖于库函数的构建，如果能够提高足够的先验知识，才能提高辨识精度和效率。

2.9　其他辨识方法

需要注意的是，上述非线性参数辨识方法并不详尽，还有如灵敏度分析方法[94-96]、贝叶斯推理方法[97-98] 和谐波平衡方法[99-100] 等。LI 等[94] 提出的一种从频率响应灵敏度分析中识别非线性系统参数的新方法，将参数识别建模为非线性最小二乘问题，并采用灵敏度方法结合信赖域约束进行收敛求解。LIU 等[95-96] 推导了一种增强响应灵敏度方法，将其用于识别分数阶系统的参数。WORDEN 等[97] 概述了在结构动力学中采用贝叶斯方法进行非线性系统识别的可能优势，在杜芬振荡系统及 Bouc-Wen 迟滞系统进行了数值验证，证明了在非线性恢复力识别中的优势。WANG 等[98] 研究了一种能同时进行模型选择和参数估计的分层贝叶斯概率模型，在分段碰撞和分段多稳态系统进行了数值和试验验证。此外，谐波平衡也是一种经典的参数辨识方法，近年来，TAGHIPOUR 等[99] 开发了一种利用多谐波激励/响应数据的交变频率/时间谐波平衡识别方法，试验证实了其在非线性悬臂梁上参数辨识的性能。BREUNUNG 等[100] 提出了一种自动根据强迫响应数据推导非线性振子的稀疏控制方程的技术，依赖于谐波平衡框架内稳态测量的扩展，并使用库函数中基的组合来拟合非线性恢复力。当然，应用于结构动力学中的参数辨识方法还不止于此，只不过目前所讨论的八种恢复力辨识方法可能是目前研究最为广泛的。

2.10　非线性辨识方法总结

根据上述八种辨识方法，总结了其在非线性振动控制结构中的典型应用，如图 10 所示。此外，针对这八种辨识方法，归纳了其对不同非线性恢复力结构的适用性、辨识效率、适应高维系统的能力及抗噪声水平 4 个方面，由于辨识精度易受其他 4 个因素综合影响，因此这里不考虑辨识精度对比，详细归纳如表 1 所示。

恢复力曲面法和希尔伯特变换属于非参数辨识方法，不需要对非线性恢复力模型有先验知识，主要应用在一些单自由度强非线性结构或者多自由度局部单非线性振子。恢复力曲面法适用于准零刚度（分段线性/非线性、软化和硬化）、双稳态及多稳态、迟滞恢复力，而希尔伯特变换不适用于复杂迟滞恢复力参数辨识。时频分析主要在于刻画系统固有频率随着振动衰减时间的变换，从频率和峰值的变化反映刚度和阻尼特征，也属于非参数辨识方法。由于分段线性可能包含碰撞，导致无法从时频图观察瞬态固有频率随着幅值变化，因此只适用于简单软化或者硬化多项式类型非线性。非线性子空间方法应用于多自由度非线性结构时关键在于模型阶次确定以及非线性类型确定，该方法适用于多自由度非线性结构，暂时还没有文献指出可以直接识别复杂迟滞恢复力的参数，当识别分段线性/非线性时也需要预先假定模型函数。优化算法作为一种在各个学科都在广泛使用的方法，在代数方程和微分方程优化中都起到重要作用，缺点就是迭代优化寻找重构响应与实际响应误差时耗时太长，且会存在假设不合理、无法收敛的情况，理论上适用于任何非线性类型。无迹卡尔曼滤波在控制中被应用于实时状态估计，优点在于快速、准确和实时，当应用于结构动力学中非线性恢复力辨识中优势较为明显，且适用于任意假定的非线性类型。物理神经网络和稀疏辨识方法最近被应用于一些新型研究方向如软体机器人和折纸结构中。神经网络强大的拟合能力可以拟合任意非线性恢复力，而稀疏辨识只要库函数构建足够合理，可以寻找主要贡献的非线性恢复力函数基。尽管二者需要一定先验知识，但其改进版本凭借较快迭代速度，正逐步应用于工程实践。无迹卡尔曼滤波、稀疏辨识和物理先验神经网络有望成为未来面对复杂工作场景下非线性振动控制恢复力辨识中的主流方法。

需要注意的是，相比于准静态测量，利用辨识的方法获取振动控制元件动态条件下的恢复力至少具有如下两个明显优势：首先，动态测试可以在装配条件下实施，仅依赖有限的传感器测量，且可以实时在线完成真实场景下的恢复力辨识，对动力学实时控制与健康监测尤为关键；其次，准静态测试无法获取非线性恢复力的率相关特性（超过低频范畴），而动力学参数辨识可以覆盖更广的频率条件下振动控制元件的力学特性。

3　问题与展望

3.1　无模型恢复力辨识

在众多恢复力曲面辨识方法中，除恢复力曲面、



图 10 非线性恢复力辨识主要应用对象总结

Fig. 10 Review of nonlinear restoring force identification methods

表 1 八种辨识方法在振动控制结构中非线性恢复力辨识能力对比

Tab. 1 Comparison of nonlinear restoring force identification capability of eight identification methods in vibration control structures

辨识方法	适用的恢复力类型	辨识效率	适应高维系统能力	抗噪声能力
恢复力曲面法	准零刚度(分段线性/非线性、软化和硬化)、双稳态及多稳态、迟滞恢复力	较低	较弱	较差
希尔伯特变换	分段线性/非线性、软化和硬化	较低	较弱	较差
时频分析	准零刚度(软化和硬化)	较高	较弱	较差
非线性子空间	准零刚度(分段线性/非线性、软化和硬化)、双稳态及多稳态(需要模型先验)	较高	较强	较好
无迹卡尔曼滤波	任意非线性类型(需要模型先验)	较高	较强	较好
优化算法	任意非线性类型(需要模型先验)	较低	较弱	较好
物理神经网络	任意非线性类型(需要模型先验)	较低	较强	较好
稀疏辨识	任意非线性类型(需要模型先验)	较高	较强	较好

希尔伯特变换以及时频分析技术，其他五种方法均在恢复力函数中提供了先验，前三种方法属于非参数辨识方法，最终获得的是恢复力轨迹，需要对恢复力轨迹进行函数拟合获得最终方程。后面的五种方法属于参数辨识方法，尽管可以假定更多的基函数形式如稀疏辨识方法，但是这种操作会大大增加回归算法的计算量，降低辨识效率。无模型恢复力辨识方法依赖于很强的模型先验，在非线性振动控制系统中，很多模型在辨识之前便有了经验知识，例如斜弹簧和欧拉屈曲梁型准零刚度隔振器通常用高阶多项式进行拟合，钢丝绳和金属橡胶隔振器通常用 Bouc-Wen 迟滞模型可以进行表征等。但是对于不连续非光滑及非整数阶函数表示复杂恢复力曲线时，在无模型条件下进行参数辨识精度会大大降低。

3.2　数据不完备条件下恢复力辨识

测量数据不完备几乎是所有辨识方法可能遭遇的重大挑战。工程场景下仅测量动态加速度或者位移非常普遍，准确获得位移、速度和加速度数据集是大多数辨识算法的基础，但传统数值微积分方法在积分时面临趋势项去除问题，在微分时存在噪声放大问题，这些都会严重影响辨识结果。尽管神经网络可用于重构未测量的位移、速度或加速度变量中的任意两个，并展现出较好的抗噪性，但这种方法在计算效率和普适性方面仍面临较大挑战。此外，测量数据的不完备还可能体现在数据种类上。理想情况下，宽频随机激励与响应更适合作为辨识数据集，但大多数装备工作在稳定正弦激励条件下，这会导致数据代表性不足，进而影响辨识精度甚至无法辨识。

3.3　其他问题

在非参数非线性动力系统辨识过程中，若遭遇自由度数目增加，维数可能的参数值集的空间随着未知参数的数量会呈现指数增长，严重损害了对全局最优参数值的搜索，在轨道车辆、大型空间梁板以及连接组合非线性装备等复杂振动控制结构中，局部非线性的定位与表征可能遭遇这种维数灾难问题，目前的处理方式多为降维简化分析。

尽管恢复力辨识在优化设计、结构健康监测等领域不要求计算效率控制在毫秒级，但参数辨识是源于控制及为了控制，实时准确获取动力学系统的实时状态参数尤为重要，对于含主动作动器的非线性振动控制系统中恢复力的辨识应该尽可能缩短辨识时间，这就要求选择合适的辨识算法进行参数辨识以提高响应速度。

3.4　恢复力辨识发展领域展望

尽管非线性恢复力辨识方法在结构优化设计与振动控制中展现出很大潜力，但在面向实际工程应用时仍面临诸多问题。复杂动力系统往往具有高维、强非线性和多物理场耦合等特征，特别是在新型智能结构与高端装备领域，传统的辨识策略尚存在明显局限。基于当前研究的总结与分析，本文提出以下几个值得深入探索的研究方向与发展建议：

第一，针对准零刚度、双稳态和迟滞型振动控制结构在新兴领域（如超材料、仿生智能结构）中的应用，其恢复力特性常表现出多尺度、非集中参数和复杂滞后行为等特点。未来研究应致力于发展基于物理机理与数据驱动融合的建模框架，结合深度神经网络与非线性动力系统理论，建立可同时处理分布参数特性与复杂滞后非线性的一致性问题表征和辨识方法。

第二，在实际工况中，激励不可测、时变特性与强噪声干扰等因素严重制约现有辨识方法的鲁棒性与适用性。建议进一步开发不依赖激励测量的仅输出参数辨识技术，并引入自适应时变参数追踪算法（如基于递归贝叶斯学习或时频分析的方法）。同时，应增强算法在低信噪比条件下的稳定性，例如通过结合稀疏正则化和鲁棒优化策略，提升其在恶劣环境中的实用价值。

第三，尽管机器学习方法在恢复力辨识、系统控制和健康监测中应用广泛，但其依赖大量高质量数据与高计算成本的问题尚未妥善解决。未来的研究可侧重于小样本学习、迁移学习与物理信息嵌入的神经网络结构，在保证辨识精度的同时降低对数据规模和计算资源的需求，推动其在嵌入式系统和实时控制中的落地应用。

第四，随着微机电系统与大型组装结构的迅速发展，非线性恢复力设计-模型表征-参数辨识的闭环研究方法，已成为提升系统性能与可靠性的关键。建议加强面向特定应用场景的一体化建模与辨识工具开发，例如结合数字孪生技术，构建具有实时更新与预报能力的智能振动控制平台，实现从部件级到系统级的非线性动力学协同设计与控制。

综上所述，非线性恢复力辨识正处于从理论走向工程应用的关键阶段。未来研究应在跨尺度建模、鲁棒算法设计、机器学习与物理模型的融合、以及行业专用工具链开发等方向寻求突破，以推动辨识技术在高端装备振动控制与结构健康管理中的深入应用。

参考文献：

[1]　徐鉴. 振动控制研究进展综述 [J]. 力学季刊，2015，

36(4)：547-565.
XU Jian. Advances of research on vibration control[J]. Chinese Quarterly of Mechanics，2015，36(4)：547-565.

[2] 肖国栋，孙秀婷. 仿生隔振器设计方法研究进展 [J]. 动力学与控制学报，2024，22(2)：4-22.
XIAO Guodong，SUN Xiuting. Advances in design methods for bio-inspired isolators[J]. Journal of Dynamics and Control，2024，22(2)：4-22.

[3] YAN B，YU N，WU C. A state-of-the-art review on low-frequency nonlinear vibration isolation with electromagnetic mechanisms[J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)，2022，43(7)：1045-1062.

[4] YANG T，ZHOU S X，FANG S T，et al. Nonlinear vibration energy harvesting and vibration suppression technologies：designs，analysis，and applications[J]. Applied Physics Reviews，2021，8(3)：031317.

[5] YAN G，ZOU H X，WANG S，et al. Bio-inspired vibration isolation：methodology and design[J]. Applied Mechanics Reviews，2021，73(2)：020801.

[6] 孙秀婷，钱佳伟，齐志凤，等. 非线性隔振及时滞消振方法研究进展 [J]. 力学进展，2023，53(2)：308-356.
SUN Xiuting，QIAN Jiawei，QI Zhifeng，et al. Review on research progress of nonlinear vibration isolation and time-delayed suppression method[J]. Advances in Mechanics，2023，53(2)：308-356.

[7] DING H，CHEN L Q. Designs，analysis，and applications of nonlinear energy sinks[J]. Nonlinear Dynamics，2020，100(4)：3061-3107.

[8] GENG X F，DING H，MAO X Y，et al. Nonlinear energy sink with limited vibration amplitude[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，156：107625.

[9] ZENG Y C，DING H. A tristable nonlinear energy sink[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2023，238：107839.

[10] 鲁正，王自欣，吕西林. 非线性能量阱技术研究综述 [J]. 振动与冲击，2020，39(4)：1-16.
LU Zheng，WANG Zixin，LYU Xilin. A review on nonlinear energy sink technology[J]. Journal of Vibration and Shock，2020，39(4)：1-16.

[11] YANG T，ZHOU S X，LITAK G，et al. Recent advances in correlation and integration between vibration control，energy harvesting and monitoring[J]. Nonlinear Dynamics，2023，111(22)：20525-20562.

[12] PU H Y，YUAN S J，PENG Y，et al. Multi-layer electromagnetic spring with tunable negative stiffness for semi-active vibration isolation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2019，121：942-960.

[13] WU J L，ZENG L Z，HAN B，et al. Analysis and design of a novel arrayed magnetic spring with high negative stiffness for low-frequency vibration isolation[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2022，216：106980.

[14] 肖庆雨，周加喜，徐道临，等. 一种六自由度准零刚度隔振平台 [J]. 振动与冲击，2019，38(1)：258-264.
XIAO Qingyu，ZHOU Jiaxi，XU Daolin，et al. A 6-DOF quasi-zero stiffness vibration isolation platform[J]. Journal of Vibration and Shock，2019，38(1)：258-264.

[15] 昌耀鹏，周加喜，徐道临. 双层主动隔振系统优化设计方法研究 [J]. 动力学与控制学报，2022，20(1)：35-41.
CHANG Yaopeng，ZHOU Jiaxi，XU Daolin. Research on optimization design method of double layer active vibration isolator system[J]. Journal of Dynamics and Control，2022，20(1)：35-41.

[16] 王凯，周加喜，蔡昌琦，等. 低频弹性波超材料的若干进展 [J]. 力学学报，2022，54(10)：2678-2694.
WANG Kai，ZHOU Jiaxi，CAI Changqi，et al. Review of low-frequency elastic wave metamaterials[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2022，54(10)：2678-2694.

[17] YAN B，MA H Y，ZHANG L，et al. A bistable vibration isolator with nonlinear electromagnetic shunt damping[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2020，136：106504.

[18] YAN B，WANG X J，WANG Z H，et al. Enhanced lever-type vibration isolator via electromagnetic shunt damping[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2022，218：107070.

[19] JING X J，CHAI Y Y，CHAO X，et al. In-situ adjustable nonlinear passive stiffness using X-shaped mechanisms[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2022，170：108267.

[20] FANG X，YU D L，WEN J H，et al. Large recoverable elastic energy in chiral metamaterials via twist buckling[J]. Nature，2025，639(8055)：639-645.

[21] NOËL J P，KERSCHEN G. Nonlinear system identification in structural dynamics：10 more years of progress[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2017，83：2-35.

[22] JIN M S，BRAKE M R W，SONG H W. Comparison of nonlinear system identification methods for free decay measurements with application to jointed structures[J]. Journal of Sound and Vibration，2019，453：268-293.

[23] AL-HABABI T，CAO M S，SALEH B，et al. A critical review of nonlinear damping identification in structural dynamics：methods，applications，and challenges[J]. Sensors，2020，20(24)：7303.

[24] 姜金辉，张方. 结构动载荷识别研究进展 [J]. 振动工程学报，2024，37(10)：1625-1650.
JIANG Jinhui，ZHANG Fang. Research progress on structural dynamic load identification[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(10)：1625-1650.

[25] ZHOU S X，CAO J Y，INMAN D J，et al. Broadband tristable energy harvester：modeling and experiment verification[J]. Applied Energy，2014，133：33-39.

[26] ZHOU J X，WANG X L，XU D L，et al. Nonlinear dynamic characteristics of a quasi-zero stiffness vibration isolator with cam–roller–spring mechanisms[J]. Journal of

Sound and Vibration，2015，346：53-69.

[27] LIU X T，HUANG X C，HUA H X. On the characteristics of a quasi-zero stiffness isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector[J]. Journal of Sound and Vibration，2013，332(14)：3359-3376.

[28] HAMZEHEI R，BODAGHI M，WU N. Mastering the art of designing mechanical metamaterials with quasi-zero stiffness for passive vibration isolation：a review[J]. Smart Materials and Structures，2024，33(8)：083001.

[29] YAO Z C，ZEGA V，SU Y，et al. Design，fabrication and experimental validation of a metaplate for vibration isolation in MEMS[J]. Journal of Microelectromechanical Systems，2020，29(5)：1401-1410.

[30] IBÁÑEZ P. Identification of dynamic parameters of linear and non-linear structural models from experimental data[J]. Nuclear Engineering and Design，1973，25(1)：30-41.

[31] MASRI S F，CAUGHEY T K. A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems[J]. Journal of Applied Mechanics，1979，46(2)：433-447.

[32] ZHOU L，WU J J. Magnetic levitation technology for precision motion systems：a review and future perspectives[J]. International Journal of Automation Technology，2022，16(4)：386-402.

[33] MATICHARD F，LANTZ B，MASON K，et al. Advanced LIGO two-stage twelve-axis vibration isolation and positioning platform. part 1：design and production overview[J]. Precision Engineering，2015，40：273-286.

[34] YAN B，LING P，ZHOU Y L，et al. Shock isolation characteristics of a bistable vibration isolator with tunable magnetic controlled stiffness[J]. Journal of Vibration and Acoustics，2022，144(2)：021008.

[35] ZHANG Y C，XU W，LI Z M，et al. Review of the vibration isolation technology of submarine thrust bearing[C]// Proceedings of 25th International Conference on Automation and Computing (ICAC). IEEE，2019：1-6.

[36] BOX J E P，JENKINS G M. Some recent advances in forecasting and control[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)，1974，23(2)：158-179.

[37] KORENBERG M，BILLINGS S A，LIU Y P，et al. Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems[J]. International Journal of Control，1988，48(1)：193-210.

[38] STASZEWSKI W J. Identification of damping in MDOF systems using time-scale decomposition[J]. Journal of Sound and Vibration，1997，203(2)：283-305.

[39] FELDMAN M，BRAUN S. Identification of non-linear system parameters via the instantaneous frequency：application of the Hilbert transform and Wigner-Ville technique[C]//Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference. Nashville，1995：637-642.

[40] MARCHESIELLO S，GARIBALDI L. A time domain approach for identifying nonlinear vibrating structures by subspace methods[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2008，22(1)：81-101.

[41] CHOW S M，FERRER E，NESSELROADE J R. An unscented Kalman filter approach to the estimation of nonlinear dynamical systems models[J]. Multivariate Behavioral Research，2007，42(2)：283-321.

[42] BRUNTON S L，PROCTOR J L，KUTZ J N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences，2016，113(15)：3932-3937.

[43] RAISSI M，PERDIKARIS P，KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks：a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics，2019，378：686-707.

[44] ALLEN M S，SUMALI H，EPP D S. Piecewise-linear restoring force surfaces for semi-nonparametric identification of nonlinear systems[J]. Nonlinear Dynamics，2008，54(1)：123-135.

[45] NOËL J P，RENSON L，KERSCHEN G. Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure：experimental identification and modal interactions[J]. Journal of Sound and Vibration，2014，333(12)：2588-2607.

[46] NOËL J P，RENSON L，GRAPPASONNI C，et al. Identification of nonlinear normal modes of engineering structures under broadband forcing[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2016，74：95-110.

[47] CARBONI B，LACARBONARA W. Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device：experiments and computations[J]. Nonlinear Dynamics，2016，83(1-2)：23-39.

[48] PEI J S，CARBONI B，LACARBONARA W. Memmodels as building blocks for simulation and identification of hysteretic systems[J]. Nonlinear Dynamics，2020，100(2)：973-998.

[49] LIU Q H，HOU Z H，ZHANG Y，et al. Nonlinear restoring force identification of strongly nonlinear structures by displacement measurement[J]. Journal of Vibration and Acoustics，2022，144(3)：031002.

[50] FELDMAN M. Hilbert transform in vibration analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2011，25(3)：735-802.

[51] FELDMAN M. Time-varying vibration decomposition and analysis based on the Hilbert transform[J]. Journal of Sound and Vibration，2006，295(3-5)：518-530.

[52] FELDMAN M. Non-linear system vibration analysis using Hilbert transform：Ⅰ. Free vibration analysis method ‘Freevib’[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，1994，8(2)：119-127.

[53] FELDMAN M. Non-linear system vibration analysis using Hilbert transform：Ⅱ. Forced vibration analysis method ‘Forcevib’[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，1994，8(3)：309-318.

[54] FELDMAN M，BUCHER I，ROTBERG J. Experimental

identification of nonlinearities under free and forced vibration using the Hilbert transform[J]. Journal of Vibration and Control，2009，15(10)：1563-1579.

[55] WU Z G，YANG N，YANG C. Identification of nonlinear multi-degree-of freedom structures based on Hilbert transformation[J]. Science China Physics，Mechanics & Astronomy，2014，57(9)：1725-1736.

[56] FELDMAN M，ZIMMERMAN Y，GISSIN M，et al. Identification and modeling of contact dynamics of precise direct drive stages[J]. Journal of Dynamic Systems，Measurement，and Control，2016，138(7)：071001.

[57] YUAN T C，YANG J，CHEN L Q. Experimental identification of hardening and softening nonlinearity in circular laminated plates[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics，2017，95：296-306.

[58] LIU Q H，ZHANG Y，HOU Z H，et al. Optimal Hilbert transform parameter identification of bistable structures[J]. Nonlinear Dynamics，2023，111(6)：5449-5468.

[59] ALLEN M S，MAYES R L. Estimating the degree of nonlinearity in transient responses with zeroed early-time fast Fourier transforms[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2010，24(7)：2049-2064.

[60] BAO Y Q，SHI Z Q，BECK J L，et al. Identification of time-varying cable tension forces based on adaptive sparse time-frequency analysis of cable vibrations[J]. Structural Control and Health Monitoring，2017，24(3)：e1889.

[61] WANG C，AI D M，REN W X. A wavelet transform and substructure algorithm for tracking the abrupt stiffness degradation of shear structure[J]. Advances in Structural Engineering，2019，22(5)：1136-1148.

[62] MENG Z，SHI G X，WANG F L. Vibration response and fault characteristics analysis of gear based on time-varying mesh stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory，2020，148：103786.

[63] QU H Y，LI T T，WANG R L，et al. Application of adaptive wavelet transform based multiple analytical mode decomposition for damage progression identification of Cable-Stayed bridge via shake table test[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，149：107055.

[64] NOËL J P，KERSCHEN G. Frequency-domain subspace identification for nonlinear mechanical systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2013，40(2)：701-717.

[65] MARCHESIELLO S，FASANA A，GARIBALDI L. Modal contributions and effects of spurious poles in nonlinear subspace identification[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2016，74：111-132.

[66] ZHANG M W，WEI S，PENG Z K，et al. A two-stage time domain subspace method for identification of nonlinear vibrating structures[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2017，120：81-90.

[67] MA Z S，PANG Z Y，LIANG J X，et al. A novel output-only time-domain nonlinear subspace approach for identifying vibrating structures with clearance nonlinearity[J]. Journal of Sound and Vibration，2021，511：116332.

[68] LIU Q H，CAO J Y，HU F Y，et al. Parameter identification of nonlinear bistable piezoelectric structures by two-stage subspace method[J]. Nonlinear Dynamics，2021，105(3)：2157-2172.

[69] ZHU R，JIANG D，HANG X C，et al. Using novel nonlinear subspace identification to identify airfoil-store system with nonlinearity[J]. Aerospace Science and Technology，2023，142：108647.

[70] YUEN K V，MU H Q. Real-time system identification：an algorithm for simultaneous model class selection and parametric identification[J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering，2015，30(10)：785-801.

[71] LEI Y，XIA D D，ERAZO K，et al. A novel unscented Kalman filter for recursive state-input-system identification of nonlinear systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2019，127：120-135.

[72] LUND A，DYKE S J，SONG W，et al. Identification of an experimental nonlinear energy sink device using the unscented Kalman filter[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2020，136：106512.

[73] PAUL P K，DUTTA A，DEB S K. Comparison of the performance of nonlinear Kalman filter based algorithms for state-parameter identification of base isolated structures[J]. Structural Control and Health Monitoring，2022，29(10)：e3029.

[74] CAO J X，QUEK S T，XIONG H B，et al. Comparison of constrained unscented and cubature Kalman filters for nonlinear system parameter identification[J]. Journal of Engineering Mechanics，2023，149(11)：04023088.

[75] ZHAO Y，XU B，DENG B C，et al. Generality of nonparametric nonlinearity identification approach with improved extended Kalman filter using different polynomial models[J]. Measurement，2024，227：114235.

[76] KWASNIOK F. Semiparametric maximum likelihood reconstruction of stochastic differential equations driven by white and correlated noise[J]. Chaos，2024，34(10):103139.

[77] JIANG K J，WEN J N，HAN Q，et al. Identification of nonlinear hysteretic systems using sequence model-based optimization[J]. Structural Control and Health Monitoring，2020，27(4)：e2500.

[78] NEGASH B A，YOU W，LEE J，et al. Parameter identification of bouc-wen model for magnetorheological (mr) fluid damper by a novel genetic algorithm[J]. Advances in Mechanical Engineering，2020，12(8)：16878140209 50546.

[79] YI S C，ZHANG Q，XU L，et al. Hysteresis online identification approach for smart material actuators with different input signals and external disturbances[J]. Nonlinear Dynamics，2022，110(3)：2557-2572.

[80] LIU Q H，CAO J Y. Identification of asymmetric Bouc-Wen hysteresis under Intense noise by only measuring acceleration[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics，

2023，18(8)：081009.

[81] GUO F，FANG H. Chaos identification and parameter optimization for vibration suppression in composite bistable structures[J]. Mechanics Research Communications，2024，135：104236.

[82] LI W J，LEE K M. Physics informed neural network for parameter identification and boundary force estimation of compliant and biomechanical systems[J]. International Journal of Intelligent Robotics and Applications，2021，5(3)：313-325.

[83] LAI Z L，MYLONAS C，NAGARAJAIAH S，et al. Structural identification with physics-informed neural ordinary differential equations[J]. Journal of Sound and Vibration，2021，508：116196.

[84] JIANG J Y，TANG J，SUN K，et al. Data-driven model identification and control of the quasi-zero-stiffness system[J]. Nonlinear Dynamics，2025，113(5)：3999-4013.

[85] GUO X Y，FANG S G. Structural parameter identification using physics-informed neural networks[J]. Measurement，2023，220：113334.

[86] LIU C X，WANG X H，LIU W M，et al. A physics-informed neural network for Kresling origami structures[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2024，269：109080.

[87] LAI Z L，NAGARAJAIAH S. Sparse structural system identification method for nonlinear dynamic systems with hysteresis/inelastic behavior[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2019，117：813-842.

[88] LIN M M，CHENG C M，PENG Z K，et al. Nonlinear dynamical system identification using the sparse regression and separable least squares methods[J]. Journal of Sound and Vibration，2021，505：116141.

[89] CHENG C M，ZHAO B X，FU C K，et al. A two-stage sparse algorithm for localization and characterization of local nonlinear structures[J]. Journal of Sound and Vibration，2022，526：116823.

[90] NOVELLI N，LENCI S，BELARDINELLI P. Boosting the model discovery of hybrid dynamical systems in an informed sparse regression approach[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics，2022，17(5)：051007.

[91] LIU Q H，CAO J Y，ZHANG Y，et al. Interpretable sparse identification of a bistable nonlinear energy sink[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，193：110254.

[92] LIU Q H，LI Q Y，JIANG D. On efficiency and accuracy of sparse identification of bistable nonlinear energy sink chains[J]. International Journal of Dynamics and Control，2024，12(12)：4413-4422.

[93] SUN X T，QIAN J W，XU J. Compressive-sensing model reconstruction of nonlinear systems with multiple attractors[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2024，265：108905.

[94] LI W L，CHEN Y M，LU Z R，et al. Parameter identification of nonlinear structural systems through frequency response sensitivity analysis[J]. Nonlinear Dynamics，2021，104(4)：3975-3990.

[95] LIU G，WANG L，LUO W L，et al. Parameter identification of fractional order system using enhanced response sensitivity approach[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2019，67：492-505.

[96] LIU G，WANG L，LIU J K，et al. Identification of an airfoil-store system with cubic nonlinearity via enhanced response sensitivity approach[J]. AIAA Journal，2018，56(12)：4977-4987.

[97] WORDEN K，HENSMAN J J. Parameter estimation and model selection for a class of hysteretic systems using Bayesian inference[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2012，32：153-169.

[98] WANG Y S，QIAN H，LIU Q H，et al. Hierarchical Bayesian model for identifying clearance-type nonlinear system[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2025，235：112891.

[99] TAGHIPOUR J，HADDAD KHODAPARAST H，FRISWELL M I，et al. Harmonic-Balance-Based parameter estimation of nonlinear structures in the presence of Multi-Harmonic response and force[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2022，162：108057.

[100] BREUNUNG T，BALACHANDRAN B. Frequency response based identification of nonlinear oscillators[J]. Journal of Sound and Vibration，2025，594：118651.

第一作者：刘清华(1994—)，男，博士，讲师。
E-mail：liuqinghua@njfu.edu.cn

通信作者：曹军义(1977—)，男，博士，教授。
E-mail：caojy@mail.xjtu.edu.cn

融合显式 Newmark-β 法与迭代正则化的动载荷识别

李鸿秋[1]，姜金辉[2]，陈国平[2]

（1. 金陵科技学院机电工程学院，江苏 南京 211169；
2. 南京航空航天大学航空航天结构力学及控制全国重点实验室，江苏 南京 210016）

摘要：本文基于显式 Newmark-β 法建立了适用于连续系统的动载荷时域识别方法，突破了传统 Newmark-β 法只适用于离散系统的局限。针对 Newmark-β 法在动载荷识别问题中出现的不适定性，本文提出了一种混合 LSQR 正则化修正方法。该方法在传统 LSQR 算法中融入了 Tikhonov 正则化思想，抑制求解过程中的数值震荡，引入一种基于响应残差的动态修正机制，通过对比计算响应与实测响应之间的残差，对载荷估计进行修正，该方法将 Tikhonov 正则化的稳定优势与迭代算法的适应性有效结合，显著改善了动载荷识别过程中的不适定性。通过典型工况的数值仿真，在不同噪声水平与多种载荷条件下验证了所提方法的鲁棒性与识别精度，性能明显优于传统正则化算法。随机载荷识别试验的研究结果表明，本文所提的混合 LSQR 正则化修正方法具备较强的抗噪能力与优异的识别精度。

关键词：动载荷识别；显式 Newmark-β 法；模态空间；混合 LSQR 修正算法；连续系统
中图分类号：TB123；O32 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508006

Dynamic load identification using the explicit Newmark-β method combined with iterative regularization

LI Hongqiu[1], JIANG Jinhui[2], CHEN Guoping[2]

（1.School of Mechanical and Electrical Engineering，Jinling Institute of Technology，Nanjing 211169，China；2.State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China）

Abstract: This study presents a time-domain identification method for dynamic loads in continuous systems，overcoming the limitation of the conventional Newmark-β method that is restricted to discrete systems. The proposed approach employs an explicit Newmark-β formulation and introduces a hybrid LSQR regularization correction technique to address the inherent ill-posedness in dynamic load identification. The novel method incorporates the idea of Tikhonov regularization into the standard LSQR algorithm to suppress numerical oscillations during the solution process. It introduces a dynamic correction mechanism based on response residuals，which adjusts the load estimation by comparing the residuals between the computed response and the measured response. By effectively combining the stability advantages of Tikhonov regularization with the adaptability of iterative algorithms，the method significantly improves the ill-posedness in the process of dynamic load identification. Numerical simulations of typical cases，with different noise levels and various load conditions，validate the robustness and identification accuracy of the proposed method. Experimental results from random load identification demonstrate that the proposed hybrid LSQR regularization correction method possesses strong noise resistance and excellent identification accuracy.

Keywords: dynamic load identification; explicit Newmark-β method; modal space; hybrid LSQR modified algorithm; continuous system

动载荷识别是结构健康监测与动力学反问题研究中的关键环节，已知系统特性，通过输出响应反求输入激励[1]。动载荷识别主要有频域法、时域法[2-3]。近年来，一些智能算法也被应用到动载荷识别领域[4]。但动载荷识别问题通常具有不适定性，一定程度上限制了载荷识别技术在工程上的应用。

频域法能够规避时域卷积积分的复杂性而成为主流方法之一。KORSUN 等[5]提出了一种将系统辨识和飞行动力学相结合的方法，通过平滑随机测量误差，提高参数辨识的准确性。秦远田等[6]建立频域识别模型，采用自适应算法和非线性规划对遗传算法进行改进，用于求解最值问题，得到动载荷参数。时域载荷识别方法具有直接性和适用于瞬态、冲击载荷等优势。SAMAGASSI 等[7]通过贝叶斯方法求解逆问题，实现了作用在线弹性结构上的多个力的重建和定位。LI 等[8]用时域均值函数和协方差

收稿日期：2025-08-05；**修订日期：**2025-09-28
基金项目：国家自然科学基金资助项目（12372066, U23B6009, 52171261）；航空科学基金资助项目 (20240013052002)

函数来表示随机动态载荷，将识别问题转化为 2 个确定时间函数的问题。张景等[9]基于分离变量法提出了一种识别动载荷位置及时间历程的方法，以提高载荷定位的效率。

动载荷识别作为典型的反问题，其不适定性主要表现为解对输入误差的高度敏感性和解的非唯一性。邱雨晴等[10]通过遗传算法优化半余弦基函数的区间参数，建立基于半余弦函数拟合的冲击载荷识别正则化模型，解决基于函数拟合的冲击载荷识别方法的稳定性问题。最小二乘 QR 分解（LSQR）方法因其在处理大型稀疏系统方面的优势，成为解决该问题的重要工具。SUN 等[11]提出了使用多窗口局部最小二乘拟合模型（MWLSFM）构建拟合载荷函数，考虑了采样点的加权贡献，MWLSFM 可以提高识别出的动态载荷的连续性和平滑性。WANG 等[12]提出了快速收敛迭代正则化方法，利用矩阵摄动法将不确定结构的动态载荷识别转化为一系列确定性反问题，解决了结构随机动载荷识别问题。LIU 等[13]提出了一种结合 Tikhonov 正则化和截断广义奇异值分解的方法，在时域中识别安装在商用电动车辆上的动力电池组的动载荷。ZHOU 等[14]采用概率模型来表征结构不确定性，采用矩阵平衡法和改进的 Tikhonov 正则化方法解决结构固有频率附近识别误差较大的问题。井雯等[15]针对随机载荷识别中的病态逆问题，根据频响函数矩阵奇异值的大小对识别结果稳定性影响程度存在差异，在识别过程中采用变正则化参数方式，提高了识别精度。

随着深度学习的发展，基于深度学习的动态载荷识别方法受到广泛关注。YANG 等[16]构建了振动响应和外部激励之间的直接映射关系，避免了对结构模型参数的过度依赖。CUI 等[17]引入卷积神经网络（CNN）用于未知载荷区间的重构，采用数据驱动的识别方法，解决传统物理模型中的病态矩阵、噪声干扰和参数不确定性问题。WANG 等[18]利用卷积神经网络（CNN）和长短期记忆网络（LSTM）结合注意力机制（SA）识别了薄壁舱的动态载荷。

Newmark-β 法直接在时域中推导，适合分析随时间变化的动载荷。POURZEYNALI 等[19]采用显式 Newmark-β 法识别考虑路面不平度的移动荷载，李晓旺等[20]为了反演作用在不确定性结构上的动态激励上下界，在时域内建立了矩阵摄动和 Newmark-β 逐步积分相结合的载荷识别算法。CHENG 等[21]提出了基于状态空间法（SSM）和 Newmark-β 的连续系统载荷识别算法，得到载荷识别模型，该方法减小了传递矩阵的规模，缩短了求解时间。

与传统的 Tikhonov 正则化方法相比，LSQR 更适合处理大规模问题，本文将显式 Newmark-β 法载荷识别理论和修正迭代正则化算法应用于连续系统的动载荷识别。通过显式 Newmark-β 法获得系统在模态空间响应关系式，确立载荷与响应之间的卷积关系，实现初步载荷识别。进而，推导结合传统 LSQR 算法和正则化策略的混合 LSQR 方法，并进一步利用混合 LSQR 算法计算得到某位置的响应和该处的测量响应之间的偏差，动态控制正则化强度以提高解的稳定性和精度。最后，以简支梁为例，通过仿真和试验验证基于混合 LSQR 的修正法的载荷识别算法在不同噪声下对不同数量和不同类型载荷的可靠性和准确性。

1　基于显式 Newmark-β 法的连续系统动载荷识别

连续系统是无限自由度系统，模态阶数是无限的。高阶模态对系统的振动响应贡献很小，因此对连续系统进行载荷识别时，可以使用模态截断来降低系统阶次。假设模态截断阶数为 r，则连续系统的动力学方程可以转化为模态空间下有限数量的独立方程[22]：

$$\boldsymbol{M}_r\ddot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{C}_r\dot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{K}_r\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t) \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{M}_r$、$\boldsymbol{C}_r$和$\boldsymbol{K}_r$分别为模态质量、模态阻尼和模态刚度；$\boldsymbol{\Phi}=[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N]$为固有振型；$\boldsymbol{q}(t)=[q_1(t),q_2(t),\cdots,q_r(t)]^{\mathrm{T}}$为模态坐标向量；$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)$为模态力。

将式 (1) 关于模态质量归一化，得到：

$$\ddot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{2}$$

其中，

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2\xi_r\omega_r\end{bmatrix},\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \omega_r^2\end{bmatrix}。$$

式中，ω_1、ω_2、$\cdots$、ω_r为系统的固有频率；ξ_1、ξ_2、$\cdots$、ξ_r为系统的模态阻尼系数。则 Newmark-β 法在模态空间下t_{i+1}时刻的模态加速度和模态速度表达式为：

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{q}}(t_{i+1})&=\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}[\boldsymbol{q}(t_{i+1})-\boldsymbol{q}(t_i)]-\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\boldsymbol{q}}(t_i)-\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\ddot{\boldsymbol{q}}(t_i),\\ \dot{\boldsymbol{q}}(t_{i+1})&=\frac{\gamma}{\beta\Delta t}[\boldsymbol{q}(t_{i+1})-\boldsymbol{q}(t_i)]+\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\boldsymbol{q}}(t_i)+\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\boldsymbol{q}}(t_i)\end{aligned} \tag{3}$$

式中，Δt为时间增量；γ、β为积分参数。将式 (3) 代入式 (2)，获得t_{i+1}时刻的模态位移：

$$\boldsymbol{q}(t_{i+1})=(\boldsymbol{K}^*)^{-1}\boldsymbol{f}^*(t_{i+1}) \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{K}^*=\dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}\boldsymbol{I}+\dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}$，

$$\boldsymbol{f}^{*}(t_{i+1})=\boldsymbol{f}(t_{i+1})+\left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^{2}}\boldsymbol{I}+\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{C}\right]\boldsymbol{q}(t_i)+\left[\frac{1}{\beta\Delta t}\boldsymbol{I}+\left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\boldsymbol{C}\right]\dot{\boldsymbol{q}}(t_i)+\left[\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}-2\right)\boldsymbol{C}\right]\ddot{\boldsymbol{q}}(t_i)。$$

式中，$\boldsymbol{I}$为单位向量。令$\boldsymbol{A}_0=(\boldsymbol{K}^{*})^{-1}$，

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{A}_0\left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^{2}}\boldsymbol{I}+\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{C}\right],$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{v}}=\boldsymbol{A}_0\left[\frac{1}{\beta\Delta t}\boldsymbol{I}+\left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\boldsymbol{C}\right],$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{A}_0\left[\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\boldsymbol{I}+\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}-2\right)\boldsymbol{C}\right]。$$

式 (4) 可以重写为：

$$\boldsymbol{q}(t_{i+1})=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{f}(t_{i+1})+\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{q}(t_i)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{v}}\dot{\boldsymbol{q}}(t_i)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}\ddot{\boldsymbol{q}}(t_i)\tag{5}$$

将式(5)代入式(3)，获得t_{i+1}时刻的模态加速度和模态速度：

$$\ddot{\boldsymbol{q}}(t_{i+1})=\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{f}(t_{i+1})+\boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{q}(t_i)+\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}\dot{\boldsymbol{q}}(t_i)+\boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}\ddot{\boldsymbol{q}}(t_i)\tag{6}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t_{i+1})=\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{f}(t_{i+1})+\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{q}(t_i)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{v}}\dot{\boldsymbol{q}}(t_i)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{a}}\ddot{\boldsymbol{q}}(t_i)\tag{7}$$

式中，

$$\boldsymbol{C}_0=\frac{1}{\beta(\Delta t)^{2}}A_0;\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}=-\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{K};\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}=-\boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{C}+\Delta t\boldsymbol{K});$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{C}_0\left[(\gamma-1)\Delta t\boldsymbol{C}-\beta(\Delta t)^{2}\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\boldsymbol{K}\right];$$

$$\boldsymbol{B}_0=\frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\boldsymbol{K}^{*})^{-1};\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}=-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K};$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{v}}=\boldsymbol{B}_0\left[\left(\frac{\beta\Delta t}{\gamma}-\Delta t\right)\boldsymbol{K}+\frac{1}{\gamma\Delta t}\boldsymbol{I}\right];$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{B}_0\left[\left(\frac{\beta(\Delta t)^{2}}{\gamma}-\frac{(\Delta t)^{2}}{2}\right)\boldsymbol{K}+\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\boldsymbol{I}\right]。$$

将式(5)和式(6)、(7)结合，获得系统在t_{i+1}时刻与t_i时刻之间的模态响应关系式：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}(t_{i+1})\\ \dot{\boldsymbol{q}}(t_{i+1})\\ \ddot{\boldsymbol{q}}(t_{i+1})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{B}_0\\ \boldsymbol{C}_0\end{bmatrix}\boldsymbol{f}(t_{i+1})+\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{a}}\\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}(t_i)\\ \dot{\boldsymbol{q}}(t_i)\\ \ddot{\boldsymbol{q}}(t_i)\end{bmatrix}\tag{8}$$

由于$[\boldsymbol{q}(t_{i+1}),\dot{\boldsymbol{q}}(t_{i+1}),\ddot{\boldsymbol{q}}(t_{i+1})]^{\mathrm{T}}$和$[\boldsymbol{q}(t_i),\dot{\boldsymbol{q}}(t_i),\ddot{\boldsymbol{q}}(t_i)]^{\mathrm{T}}$为线性关系，且在零初始响应状态下，$[\boldsymbol{q}(t_0),\dot{\boldsymbol{q}}(t_0),\ddot{\boldsymbol{q}}(t_0)]^{\mathrm{T}}$为 0，根据递推关系，式(8)可写为：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}(t_i)\\ \dot{\boldsymbol{q}}(t_i)\\ \ddot{\boldsymbol{q}}(t_i)\end{bmatrix}=\sum_{j=0}^{i-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{a}}\\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}\end{bmatrix}^{j}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{B}_0\\ \boldsymbol{C}_0\end{bmatrix}\boldsymbol{f}(t_{i-j})\tag{9}$$

设系统输出响应在物理空间与模态空间之间有转换关系：

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{a}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\\ \ddot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix}\tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{m\times 1}$为系统输出响应在物理空间的表达式；$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{d}}$、$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{v}}$、$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{a}}\in\mathbb{R}^{m\times r}$分别表示测量的位移、速度和加速度输出影响矩阵，其中 m 为测量响应点的数量。当获得的响应为加速度响应时，有：

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{d}}=0,\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{v}}=0,\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{a}}=\begin{bmatrix}\varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \cdots & \varphi_r^1\\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_r^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^m & \varphi_2^m & \cdots & \varphi_r^m\end{bmatrix}\tag{11}$$

式中，$\varphi_i^j(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,m)$表示第 i 阶固有振型的第 j 自由度上的值。

定义$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{d}},\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{v}},\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{a}}\end{bmatrix}$，结合式(9)和(10)，$\boldsymbol{y}(t_i)$可以表示为：

$$\boldsymbol{y}(t_i)=\sum_{j=0}^{i-1}\boldsymbol{\Psi}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{a}}\\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}\end{bmatrix}^{j}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{B}_0\\ \boldsymbol{C}_0\end{bmatrix}\boldsymbol{f}(t_{i-j})\tag{12}$$

同样，根据模态叠加法获得物理空间载荷与模态空间模态力之间的计算公式：

$$\boldsymbol{f}(t_i)=\begin{bmatrix}f_1(t_i)\\ f_2(t_i)\\ \vdots\\ f_r(t_i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_1^1 & \varphi_1^2 & \cdots & \varphi_1^n\\ \varphi_2^1 & \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_2^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_r^1 & \varphi_r^2 & \cdots & \varphi_r^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1(t_i)\\ F_2(t_i)\\ \vdots\\ F_n(t_i)\end{bmatrix}\tag{13}$$

式中，n 为需要识别的载荷个数；$f_r(t_i)$和$F_n(t_i)$分别表示 t_i 时间的第 r 阶模态力和第 n 个集中载荷。令：

$$\boldsymbol{H}_l=\boldsymbol{\Psi}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{a}}\\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{v}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}\end{bmatrix}^{l-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{B}_0\\ \boldsymbol{C}_0\end{bmatrix};\ l=1,2,\cdots,z\tag{14}$$

式中，z 表示时间点的个数。将式(12)简化为：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\tag{15}$$

式中，

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_1 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{H}_z & \boldsymbol{H}_{z-1} & \cdots & \boldsymbol{H}_1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}(t_1)\\ \dot{\boldsymbol{y}}(t_1)\\ \ddot{\boldsymbol{y}}(t_1)\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}(t_m)\\ \dot{\boldsymbol{y}}(t_m)\\ \ddot{\boldsymbol{y}}(t_m)\end{bmatrix};\ \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}F_1(t_i)\\ F_2(t_i)\\ \vdots\\ F_n(t_i)\end{bmatrix}。$$

因此：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H}^{+}\boldsymbol{Y}\tag{16}$$

需要指出，为了保证上述计算，响应个数 m 应该大于等于模态截断阶数 r，模态截断阶数 r 应大于等于载荷识别个数 n，即$m\geqslant r\geqslant n$，式 (16) 方程组有解。如果响应为位移或者速度，载荷识别的过程类似。

2 混合 LSQR 修正正则化算法

上文中使用显式 Newmark-β 算法确立载荷与响应之间的映射关系，实现动载荷识别。但是当求解复杂系统时，由于矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的条件数太大，方程(16)是不适定的。工程上通常引入正则化策略解决不适定性，提高载荷识别精度。最小二乘 QR(LSQR)迭代方法是求解病态、稀疏系统的重要工具，适用于大规模不适定问题。

2.1 LSQR 算法

LSQR 算法的数学本质是通过 Krylov 子空间投影将问题转化为双对角化形式。

动载荷识别需要考虑下式最小二乘问题的解:

$$\min_{\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^n}\|\boldsymbol{HF}-\boldsymbol{Y}\| \tag{17}$$

基于 $\boldsymbol{H}$ 的 Lanczos 双对角化过程, 获得 Krylov 子空间正交基。令 $\boldsymbol{F}_0$ 为式 (17) 的初始近似解, 则残差为 $r_0=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{HF}_0$, 对应第 k 步残差 $r_k=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{HF}_k$。经过 k 步 Lanczos 双对角化迭代, 可以得到 2 个标准正交化矩阵 $\boldsymbol{V}_k=(v_1,v_2,\cdots,v_k)\in\mathbb{R}^{m\times k}$, $\boldsymbol{U}_{k+1}=(u_1,u_2,\cdots,u_{k+1})\in\mathbb{R}^{m\times(k+1)}$ 和一个双对角矩阵 $\boldsymbol{B}_k=\begin{bmatrix}\alpha_1 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & \\ & \beta_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_k \\ & & & \beta_{k+1}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(k+1)\times k}$, 其迭代过程可以简化为:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}_{k+1}(\beta_1\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{Y},\\ &\boldsymbol{HV}_k=\boldsymbol{U}_{k+1}\boldsymbol{B}_k,\\ &\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{k+1}=\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\alpha_{k+1}v_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{18}$$

式中, $\alpha_j=\left\|r_j\right\|$; $v_j=r_j/\alpha_j$; $\beta_1=\|\boldsymbol{Y}\|$; $u_1=\boldsymbol{Y}/\beta_1\in\mathbb{R}^m$; $v_0=0$; $\boldsymbol{e}_i$ 为单位矩阵的第 i 列。若初始解 $\boldsymbol{F}_0=0$, LSQR 算法近似解为 $\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{V}_kq_k$。残差 r_k 可以写为:

$$r_k=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{HF}_k=\boldsymbol{U}_{k+1}(\beta_1\boldsymbol{e}_1)-\boldsymbol{U}_{k+1}\boldsymbol{B}_kq_k=\boldsymbol{U}_{k+1}t_{k+1} \tag{19}$$

在 k 次迭代后希望残差 r_k 尽可能的小, 由于 $\boldsymbol{U}_{k+1}$ 为标准正交矩阵, 所以残差 r_k 最小等价于 $\|t_{k+1}\|$ ($\|\cdot\|$表示欧几里得范数)最小, 即求解子空间上简单的最小二乘问题:

$$\min\|t_{k+1}\|=\|\beta_1\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{B}_kq_k\|=\left\|\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{B}_kq_k\right\| \tag{20}$$

由于 $\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\beta_1\boldsymbol{e}_1$, 得到 LSQR 算法近似解:

$$\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{V}_kq_k=\|\boldsymbol{Y}\|\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{B}_k^{+}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{B}_k^{+}\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{21}$$

2.2 混合 LSQR 修正算法

尽管 LSQR 本身非常强大, 但在处理稀疏且病态的矩阵时, LSQR 算法存在半收敛性[23], 需要依赖迭代停止准则作为隐式正则化手段, 相当于将迭代次数 k 作为正则化参数。而参数选择不当会导致解过度平滑或保留过多噪声。混合 LSQR 的核心目标是将正则化过程整合到 LSQR 的迭代框架中, 在其子空间的最小二乘问题中添加 Tikhonov 正则化, 可以有效抑制干扰引起的高频振荡。混合 LSQR 算法可以解决 LSQR 算法的半收敛性问题。将式(20)转化为:

$$\min\left\{\left\|\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{B}_kq_k\right\|+\lambda^2\|q_k\|\right\} \tag{22}$$

式中, λ 为通过 L 曲线准则[24] 获得的正则化参数, 则子空间内 Tikhonov 正则化解为:

$$q_k^R=\left(\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k+\lambda^2\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{23}$$

由于解向量 $\boldsymbol{F}_k$ 在 $\boldsymbol{V}_k$ 的列张成的子空间中, 即 $\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{V}_kq_k$, 混合 LSQR 算法解为:

$$\boldsymbol{F}_k^R=\boldsymbol{V}_kq_k^R=\boldsymbol{V}_k\left(\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k+\lambda^2\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{24}$$

混合 LSQR 算法在 LSQR 算法生成的低维子空间上解决较小的正则化问题, 实现了在大尺度稀疏问题上进行精细正则化的目标。本文进一步提出混合 LSQR 修正算法, 在迭代过程中动态控制正则化强度以提高解的稳定性和精度。评估混合 LSQR 算法计算得到的某位置响应和该处的测量响应之间的偏差, 以修正混合 LSQR 算法求解的计算载荷。其解表示为:

$$\boldsymbol{F}_k^M=\boldsymbol{F}_k^R+\mu\Delta\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{V}_kq_k^R+\mu\boldsymbol{V}_k\Delta q_k=\boldsymbol{V}_k\left(q_k^R+\mu\boldsymbol{B}_k^R\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{Y}\right) \tag{25}$$

式中, μ为修正系数; $\Delta\boldsymbol{F}_k$ 为第 k 步的动载荷修正值, 源自于第 k 步识别的动载荷的计算响应与测量响应的偏差。

混合 LSQR 算法得到的计算响应 $\boldsymbol{Y}_k^R=\boldsymbol{HF}_k^R$, 测量响应与计算响应之间的偏差 $\Delta\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}_k^R$, 则:

$$\Delta\boldsymbol{Y}^m=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{F}_k^R+\mu\Delta\boldsymbol{F}_k\right)=\Delta\boldsymbol{Y}-\mu\boldsymbol{U}_{k+1}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^R\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{Y} \tag{26}$$

构造目标函数:

$$\omega(\mu)=\|\Delta\boldsymbol{Y}^m\|^2=\left\|\Delta\boldsymbol{Y}-\mu\boldsymbol{U}_{k+1}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^R\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{Y}\right\|^2 \tag{27}$$

令 $\omega(\mu)$对 μ的偏导数为零, 得到:

$$\mu=\frac{\left(\boldsymbol{U}_{k+1}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^R\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{Y}\right)^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{Y}}{\left\|\boldsymbol{U}_{k+1}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{B}_k^R\boldsymbol{U}_{k+1}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{Y}\right\|^2} \tag{28}$$

将式(28)代入式(25), 就可以获得混合 LSQR 修正算法的第 k 步迭代正则化解 $\boldsymbol{F}_k^M$。根据混合 LSQR 修正算法进行迭代计算, 即可反演出结构的动载荷。混合 LSQR 修正算法载荷识别流程图如图 1 所示。

使用终止条件 $\left\|\boldsymbol{F}_{k+1}^M-\boldsymbol{F}_k^M\right\|/\left\|\boldsymbol{F}_k^M\right\|<\varepsilon$, 指定阈值 $\varepsilon=5\times10^{-4}$, 令最高迭代次数 $k=500$, 若 $k>500$时依旧不满足上述条件, 则使用测量响应 $\boldsymbol{Y}$ 和计算响应 $\boldsymbol{Y}_k^R$之间的最小相对误差确定最佳迭代次数 k_{opt}。

综上, 混合 LSQR 修正算法是在 LSQR 算法和 Tikhonov 正则化的基础上获得的, 该算法通过 LSQR 算法将一个大规模矩阵投影到 Krylov 子空间中, 并使用 Tikhonov 正则化求解子空间内小规模矩阵的最小二乘问题, 进而通过评估计算响应和测量响应的误差, 动态调整正则化强度, 获得修正解。

3 仿真分析

以简支梁为例, 载荷信号和加速度响应信号由有限元仿真分析软件 Patran 的瞬态分析获得。简支梁模型及各节点位置如图 2 所示, 确定模态截断阶数, 将连续系统转化为模态空间的多自由度系统, 通

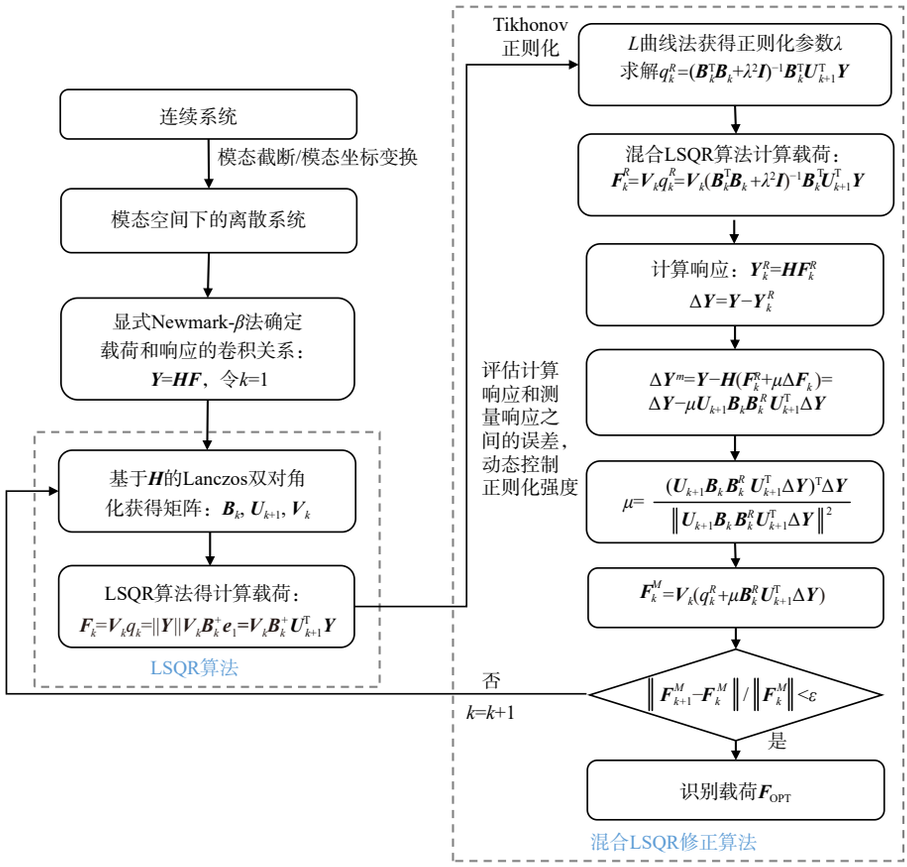


图 1 混合 LSQR 修正算法载荷识别流程图

Fig. 1 Flowchart of load recognition using hybrid LSQR correction algorithm

过显式 Newmark-β 法获得载荷和响应之间的卷积关系，利用混合 LSQR 算法获得子空间的最小二乘问题解，使用计算响应和测量响应之间的偏差进一步完成解的修正，并评估误差，直到满足要求，获得最终载荷结果。

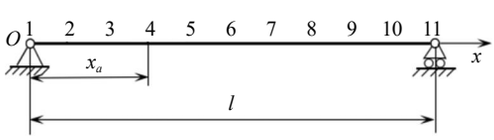


图 2 简支梁及各节点位置示意图

Fig. 2 Schematic diagram of simply supported beam and each node location

3.1 动载荷识别评估方法

将识别得到的载荷与真实载荷对比可以评估载荷识别算法的效果。考虑到多种类型载荷，本文使用信噪比、峰值相对误差评估识别载荷与实际载荷之间的误差。实际载荷信号用 $X(i)$ 表示，识别的载荷信号用 $Y(i)$ 表示。

（1）信噪比 *SNR*

$$SNR(X,Y)=10\lg\left(\frac{\sum_{i=1}^{m_c}X^2(i)}{\sum_{i=1}^{m_c}[X(i)-Y(i)]^2}\right) \tag{29}$$

式中，m_c 为采样点数。信噪比 *SNR* 用于评估识别载荷与实际载荷之间的整体误差，*SNR* 越大，载荷识别的误差越小；反之，*SNR* 越小，载荷识别误差越大。

（2）峰值相对误差 *PREM*

$$PREM(X,Y)=\frac{|\max(Y(i))-\max(X(i))|}{\max(X(i))}\times 100\% \tag{30}$$

PREM 关注的是识别载荷的最大峰值与实际载荷的最大峰值之间的相对误差。

本文使用的这两种评估方法，能够全面地评估识别载荷的峰值误差和整体误差。

3.2 算 例

建立长 $l=1$ m，宽 $a=0.05$ m，高 $b=0.01$ m的简支梁模型，弹性模量 $E=210$ GPa，密度 $\rho=7800$ kg/m^3，泊松比 $\nu=0.3$，简支梁模型以及节点分布如图 2 所示，l为简支梁长度，x_a表示节点位置。

通过显式 Newmark-β 法获得载荷和响应之间的卷积关系，分别设置参数 $\gamma=0.5$、$\beta=1.1$。同时结合混合 LSQR 修正算法进行单点激励和多点激励的载荷识别仿真分析。单点激励的激励点在 4 号节点，多点激励的激励点在 4 号和 9 号节点。使用软件 Patran 施加载荷和约束，完成瞬态响应分析，采集施加的载荷和 2~8 号节点的响应信号，设置采样率为 2000 Hz，选取 1 s 进行载荷识别分析。

（1）单点连续冲击载荷识别

如图 2 所示的简支梁模型，在 4 号节点即 $x_1=0.3$ m

处施加一个连续冲击载荷 $F = 20\sin(100\pi t)$ N，载荷作用时间 $t_1 = 0.20 \sim 0.21$ s，$t_2 = 0.40 \sim 0.41$ s，$t_3 = 0.60 \sim 0.61$ s，选取模态截断阶次为 3 阶。简支梁结构初始条件为零，施加的连续冲击载荷如图 3 所示。

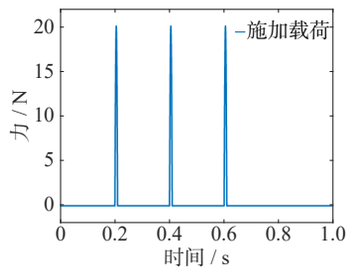


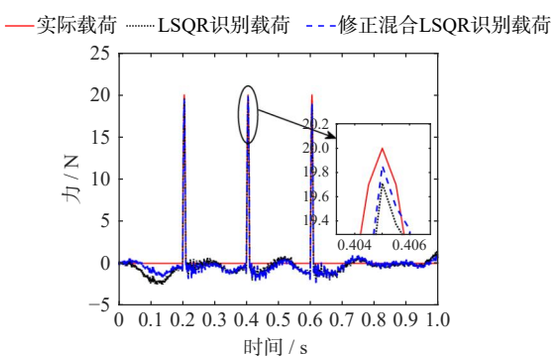
图 3　单点连续冲击激励信号

Fig. 3　Single point continuous impact excitation signal

考虑到噪声的影响，在测量的加速度响应信号中分别加入 10% 和 20% 的高斯白噪声，为量化所添加噪声的强度，采用基于信号振幅的相对度量。设原始信号为 $S(t)$，其振幅定义为信号的标准差 $A_S = \mathrm{std}(S(t))$。生成一个均值为零，标准差为 A_n 的白噪声序列 $N(t)$。10% 的高斯白噪声表示所添加的噪声的标准差是原始信号标准差的 10%，最终的含噪信号 $X(t)$ 通过线性叠加构成，即 $X(t) = S(t) + N(t)$。

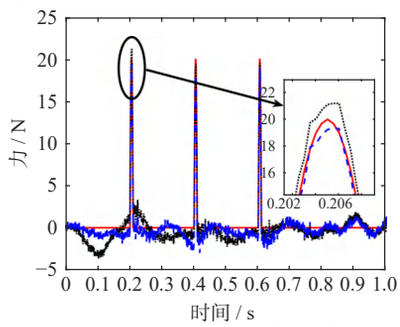
分别利用 LSQR 算法以及本文所提修正混合 LSQR 算法完成该连续系统的载荷识别。2 种载荷识别结果对比如图 4 所示。

在 10% 和 20% 的噪声下，LSQR 算法峰值识别较



(a) 噪声等级为 10%的连续冲击载荷识别结果

(a) Identification results of continuous impact loads with a noise level of 10%



(b) 噪声等级为 20%的连续冲击载荷识别结果

(b) Identification results of continuous impact loads with a noise level of 20%

图 4　连续冲击载荷识别结果

Fig. 4　Identification results of continuous impact loads

差，且在非峰值处有较大波动，混合 LSQR 修正算法则能较为准确地识别峰值，并且在非峰值处，在较高的噪声水平下依旧保持较平稳的状态，具有较强的抗噪性。表 1 为分别采用 LSQR 算法、混合 LSQR 算法以及混合 LSQR 修正算法得到的连续冲击载荷识别结果的误差评估数值。

表 1　连续冲击载荷识别结果评估

Tab. 1　Evaluation of continuous impact load identification results

噪声等级	算法	*PREM* /%	*SNR*
10%	LSQR算法	1.445	9.076
	混合LSQR算法	2.837	10.711
	混合LSQR修正算法	0.717	10.789
20%	LSQR算法	5.947	6.700
	混合LSQR算法	13.453	7.869
	混合LSQR修正算法	2.371	9.622

由表 1 可知，在不同程度的噪声下，混合 LSQR 修正算法都有最好的识别结果，其信噪比 *SNR*、峰值相对误差 *PREM* 均优于同噪声下 LSQR 算法和混合 LSQR 算法。在不同噪声下，混合 LSQR 算法在 LSQR 算法的基础上提高了识别的信噪比，但是对峰值识别出现了相对较大的误差，混合 LSQR 修正算法则在上述算法的基础上进一步提高了识别的信噪比。并克服了混合 LSQR 算法峰值识别误差较大的问题，能够准确识别冲击载荷的峰值。在 20% 的高噪声下，混合 LSQR 修正算法依旧具有较好的识别结果，其峰值相对误差仅为 2.371%，信噪比高达 9.622。可见，混合 LSQR 修正算法在冲击载荷的识别中具有更强的抗噪性和更高的精度。

（2）多点随机载荷识别

使用如图 2 所示简支梁，在其 4 号点（$x_1 = 0.3$ m）处施加一个均值为零、方差为 100、带宽为 0~600 Hz 的高斯白噪声，在 9 号点（$x_2 = 0.8$ m）施加一个同样均值为零、带宽为 0~600 Hz、方差为 10 的高斯白噪声，选取模态截断阶次为 7 阶，施加的载荷信号如图 5 所示。

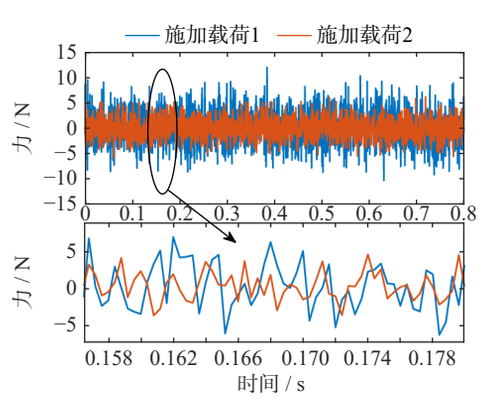
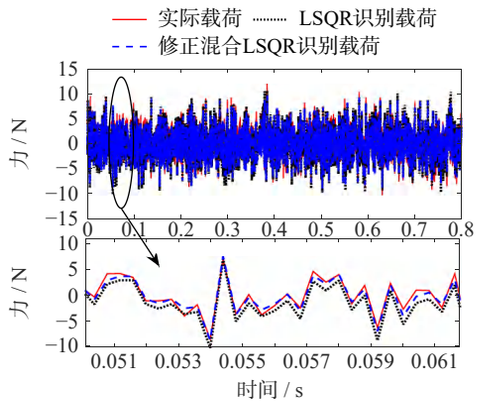


图 5　多点随机载荷激励信号

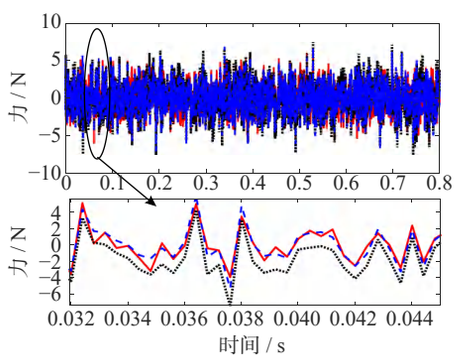
Fig. 5　Multi-point random load excitation signal

在加速度响应信号中分别加入 10% 和 20% 的高斯白噪声，得到多点随机载荷识别结果如图 6 和 7 所示。



(a) 10%噪声下随机载荷1的识别结果

(a) Identification results of random load 1 under 10% noise



(b) 10%噪声下随机载荷2的识别结果

(b) Identification results of random load 2 under 10% noise

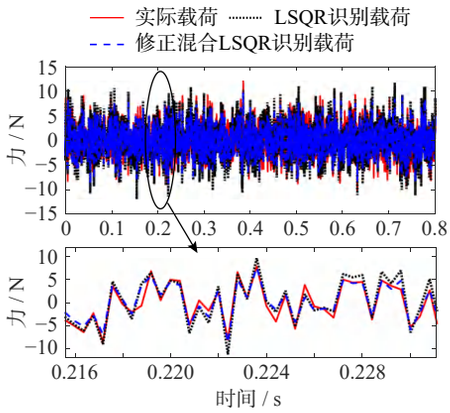
图 6 噪声等级为 10% 的多点随机载荷识别结果

Fig. 6 Identification results of multi-point random loads with a noise level of 10%

由图 6 和 7 可知，在多点随机载荷识别中，随着噪声的增加，LSQR 算法与修正混合 LSQR 算法相比，逐渐出现偏离实际载荷的情况，尤其是识别的载荷 2。与 LSQR 算法相比，修正混合 LSQR 算法在高噪声下依旧具有较高的精度，因此其具有较强的抗噪性和稳定性。

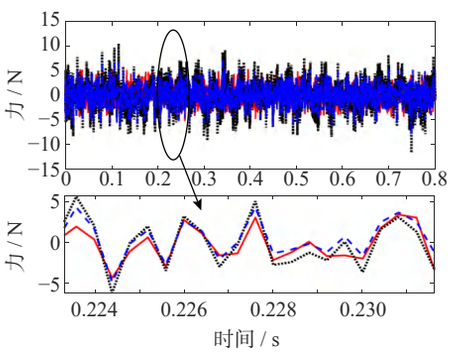
表 2 为利用 Newmark-β 法获得载荷与响应之间的卷积关系之后，分别利用 LSQR 算法、混合 LSQR 算法以及修正混合 LSQR 算法完成多点随机载荷识别的结果评估数值。

由表 2 可知，在不同的噪声下，对于多点随机载荷识别，混合 LSQR 算法载荷识别的信噪比与 LSQR 算法相比有较大幅度提升，混合 LSQR 修正算法则在混合 LSQR 算法的基础上获得了更好的信噪比，且降低了载荷识别的峰值相对误差。在 20% 的噪声下，载荷 2 的识别结果均不够理想，但混合 LSQR 修正算法能够识别出实际载荷的趋势。因此，对于多点随机载荷识别，所提修正算法在低噪声下具有较强的抗噪性和较高的识别精度，在高噪声下依旧能够识别出随机载荷的趋势且吻合度较高。



(a) 20%噪声下随机载荷1的识别结果

(a) Identification results of random load 1 under 20% noise



(b) 20%噪声下随机载荷2的识别结果

(b) Identification results of random load 2 under 20% noise

图 7 噪声等级为 20% 的多点随机载荷识别结果

Fig. 7 Identification results of multi-point random loads with a noise level of 20%

表 2 多点随机载荷识别结果评估

Tab. 2 Evaluation of multi-point random load identification results

噪声等级	载荷	算法	*PREM* /%	*SNR*
10%	载荷1	LSQR算法	12.075	9.875
		混合LSQR算法	18.659	10.732
		修正混合LSQR算法	12.827	11.588
	载荷2	LSQR算法	22.065	4.607
		混合LSQR算法	18.888	6.862
		修正混合LSQR算法	10.506	7.038
20%	载荷1	LSQR算法	0.471	4.552
		混合LSQR算法	17.882	6.598
		修正混合LSQR算法	6.117	7.296
	载荷2	LSQR算法	87.216	−1.231
		混合LSQR算法	52.492	1.224
		修正混合LSQR算法	25.395	2.683

4 试验研究

本文设计了简支梁试验以验证混合 LSQR 修正算法的准确性和稳定性。简支梁及各测点位置如图 2 所示，材料为低碳钢。动响应试验流程图如图 8 所示。以加速度信号作为输入，通过动响应试验，采集随机载荷下各测点的加速度响应，为载荷识别提供响应数据和激励数据。并对比计算载荷与测量的激励载荷。

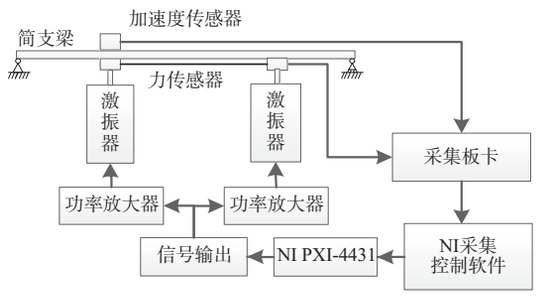


图 8　连续激励动响应试验流程图

Fig. 8　Flow chart of continuous excitation dynamic response test

使用激振器施加随机载荷，随机载荷激励点和响应点同仿真分析的算例(2)，采样率设置为 2048，并采集 6 个测点的加速度响应。利用显示 Newmark-β 法联合混合 LSQR 修正算法完成载荷识别计算，获得多点随机载荷识别结果，如图 9 和 10 所示，多点随机载荷识别评估结果如表 3 所示。

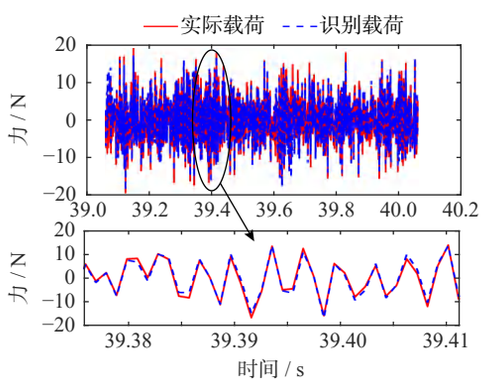


图 9　随机载荷 1 识别结果

Fig. 9　Identification results of random load 1

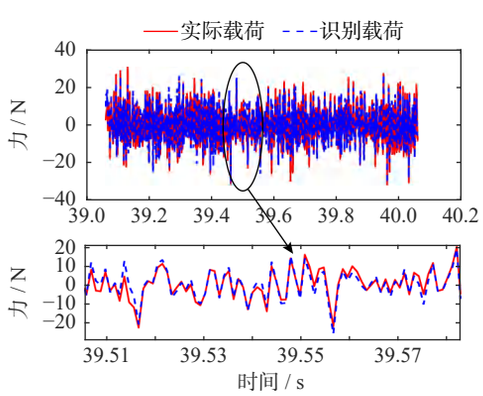


图 10　随机载荷 2 识别结果

Fig. 10　Identification results of random load 2

表 3　多点随机载荷识别结果评估

Tab. 3　Evaluation of random load identification results

激励类型	载荷	*PREM* /%	*SNR*
多点随机载荷	载荷1	2.785	13.934
	载荷2	1.547	11.231

由识别结果可以看出，多点随机载荷均有较好的识别结果，其中峰值相对误差 *PREM* 均小于 3%，信噪比 *SNR* 均大于 11，能够很好地拟合工程中的实际载荷。对简支梁结构进行多点随机载荷识别的结果表明，本文所提混合 LSQR 修正算法在工程实际应用中具有较高的可靠性和稳定性。

5　结　论

结合显式 Newmark-β 法和混合 LSQR 修正法完成了动载荷识别算法的理论推导和仿真以及试验验证，得到以下结论：

(1)基于显式 Newmark-β 法的载荷识别理论，通过模态截断获得连续系统的载荷响应关系矩阵。

(2)在不适定问题上，标准 LSQR 算法的迭代次数过多会导致误差被迅速放大(即半收敛性)。本文所提混合 LSQR 修正算法，通过引入正则化方法克服系统矩阵的病态性，有效遏制了半收敛现象，使迭代过程更加稳定。在迭代过程中通过评估计算响应和测量响应之间的误差，动态控制正则化强度，通过动态修正机制加速了收敛进程，用更少的迭代步数获得了更优的解。

(3)使用简支梁作为典型结构，通过不同载荷类型和不同噪声下的仿真算例证明，相比较 LSQR 算法和混合 LSQR 算法，本文所提混合 LSQR 修正算法在噪声下仍然具有相对较好的识别结果，尤其是对载荷峰值的识别，误差较小，具有良好的抗噪性和识别精度。

(4)设计了简支梁动载荷识别试验，给出了多点随机载荷的实测识别结果。通过对比识别载荷与实测激励载荷，验证了所提算法在真实试验环境下的准确性和稳定性。

参考文献：

[1]　姜金辉，张方. 结构动载荷识别研究进展 [J]. 振动工程学报，2024，37(10)：1625-1650.
JIANG Jinhui，ZHANG Fang. Research progress on structural dynamic load identification[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(10)：1625-1650.

[2]　LIU R X，DOBRIBAN E，HOU Z C，et al. Dynamic load identification for mechanical systems：a review[J]. Archives of Computational Methods in Engineering，2022，29(2)：831-863.

[3]　WANG W T，LIU B，LI H K，et al. Fast time-domain identification of dynamic loads and inversion of dynamic response field for flood discharge sluice structure based on data-level information fusion[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2025，232：112677.

[4]　杨智春，杨特. 动载荷识别物理嵌入式神经网络模型与方法 [J]. 航空学报，2025，46(5)：381-399.
YANG Zhichun，YANG Te. Physical embedded neural

network model and method for dynamic load identification[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2025，46(5)：381-399.

[5] KORSUN O N，POPLAVSKY B K，STULOVSKII A V，et al. Identification of engine thrust and aerodynamic drag force according to flight test data with smoothing of random measurement errors[J]. Journal of Computer and Systems Sciences International，2024，63(3)：432-446.

[6] 秦远田，唐甜，张炉平. 基于改进遗传算法的动载荷识别研究 [J]. 振动、测试与诊断，2025，45(1)：146-153.
QIN Yuantian，TANG Tian，ZHANG Luping. Dynamic load identification based on improved genetic algorithm[J]. Journal of Vibration，Measurement & Diagnosis，2025，45(1)：146-153.

[7] SAMAGASSI S，JACQUELIN E，KHAMLICHI A，et al. Bayesian sparse regularization for multiple force identification and location in time domain[J]. Inverse Problems in Science and Engineering，2019，27(9)：1221-1262.

[8] LI K，LIU J，WEN J，et al. Time domain identification method for random dynamic loads and its application on reconstruction of road excitations[J]. International Journal of Applied Mechanics，2020，12(8)：2050087.

[9] 张景，张方，姜金辉. 采用分离变量法的载荷位置识别技术研究 [J]. 振动工程学报，2021，34(3)：584-591.
ZHANG Jing，ZHANG Fang，JIANG Jinhui. Identification of dynamic load location based on variable separation method[J]. Journal of Vibration Engineering，2021，34(3)：584-591.

[10] 邱雨晴，王磊，王晓宇，等. 基于改进函数拟合法的冲击载荷识别研究 [J]. 机械工程学报，2022，58(3)：157-166.
QIU Yuqing，WANG Lei，WANG Xiaoyu，et al. Research on impact force reconstruction based on improved function fitting method[J]. Journal of Mechanical Engineering，2022，58(3)：157-166.

[11] SUN Y T，LUO L F，CHEN K G，et al. A time-domain method for load identification using moving weighted least square technique[J]. Computers and Structures，2020，234：106254.

[12] WANG L J，PENG Y L，XIE Y X，et al. A new iteration regularization method for dynamic load identification of stochastic structures[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，156：107586.

[13] LIU R X，HOU Z C，WU P B，et al. Dynamic load identification for a power battery pack based on a combined regularization algorithm[J]. Journal of Sound and Vibration，2022，529：116928.

[14] ZHOU X Y，GAO Z H，ZHANG Y H. Stochastic force identification for uncertain structures based on matrix equilibration and improved Tikhonov regularization method[J]. Journal of Sound and Vibration，2024，591：118630.

[15] 井雯，姜金辉，许锋，等. 基于改进正则化的多点平稳随机载荷识别方法 [J]. 振动、测试与诊断，2025，45(2)：219-224.
JING Wen，JIANG Jinhui，XU Feng，et al. Multi-point stationary random load identification method based on improved regularization[J]. Journal of Vibration，Measurement& Diagnosis，2025，45(2)：219-224.

[16] YANG H J，JIANG J H，CHEN G P，et al. Dynamic load identification based on deep convolution neural network[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，185：109757.

[17] CUI W X，JIANG J H，SUN H Y，et al. Data-driven load identification method of structures with uncertain parameters[J]. Acta Mechanica Sinica，2023，40(2)：523138.

[18] WANG J，SONG S W，LIU C，et al. Dynamic load identification of thin-walled cabin based on CNN-LSTM-SA neural network[J]. Materials，2025，18(6)：1255.

[19] POURZEYNALI S，ZHU X Q，GHARI ZADEH A，et al. Comprehensive study of moving load identification on bridge structures using the explicit form of Newmark-β method: numerical and experimental studies[J]. Remote Sensing，2021，13(12)：2291.

[20] 李晓旺，黄科，魏广威，等. 矩阵摄动和 Newmark-β 逐步积分相结合的不确定性结构载荷识别 [J]. 计算力学学报，2022，39(5)：677-683.
LI Xiaowang，HUANG Ke，WEI Guangwei，et al. A method combining matrix perturbation and Newmark-β stepwise integration for load identification of uncertain structure[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics，2022，39(5)：677-683.

[21] CHENG Y Y，LI Z H，ZHANG L，et al. Multi-type dynamic load identification algorithm in continuous system: a numerical and experimental study based on SSM-Newmark-β[J]. Applied Mathematical Modelling，2023，123：810-834.

[22] JIANG J H，DING M，LI J. A novel time-domain dynamic load identification numerical algorithm for continuous systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，160：107881.

[23] 缪炳荣，周凤，陈翔宇，等. 利用核函数和不同正则化方法的结构载荷识别混合技术研究 [J]. 振动工程学报，2018，31(4)：553-560.
MIAO Bingrong，ZHOU Feng，CHEN Xiangyu，et al. Research of the structure load identification hybrid technology using kernel function and different regularization method[J]. Journal of Vibration Engineering，2018，31(4)：553-560.

[24] 李晓旺，赵海涛，陈吉安. 基于测点优选和改进 L 曲线法的动载荷识别 [J]. 上海交通大学学报，2020，54(6)：569-576.
LI Xiaowang，ZHAO Haitao，CHEN Ji'an. Force identification based on measuring point selection and improved L-curve method[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University，2020，54(6)：569-576.

第一作者：李鸿秋(1974—)，女，博士，副教授。
E-mail：lihongqiu@jit.edu.cn

通信作者：姜金辉(1981—)，男，博士，教授。
E-mail：jiangjinhui@nuaa.edu.cn

磁悬浮柔性转子无试重不平衡量分布优化方法

张仁坤，徐园平，姚润晖，周 扬，崔 刚，周 瑾

（南京航空航天大学机电学院，江苏 南京 210016）

摘要：转子动平衡是磁悬浮旋转机械的关键制造工艺之一。然而现有的动平衡方法需要多次试车以获得影响系数，效率较低，且未考虑不平衡量的随机分布特性与系统各阶模态稳定性差异，在平衡高阶模态时会影响低阶模态振动，难以满足全速域运行下的振动水平要求。针对该问题，提出一种磁悬浮柔性转子无试重不平衡量分布优化方法。建立磁悬浮轴承-柔性转子系统模型，并用模态试验和闭环激励辨识获取未知参数，基于 API617 标准验证模型准确性；基于单次升速试运行的振动数据，通过最小二乘法辨识转子不平衡量分布；以闭环极点的实部项表征各阶模态稳定性，设计各模态区间的平衡权重系数，以修配质量最小、振动位移最小为目标，采用 NSGA-Ⅱ遗传算法优化修配方案。试验结果表明，所提出的方法可使转子振动位移最大减小 65%，且各阶模态均有良好的平衡效果，满足全速域运行振动水平要求，验证了该方法的有效性。

关键词：磁悬浮轴承；转子动力学；系统参数辨识；不平衡量分布优化

中图分类号：TH133.3 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508094

Optimization of unbalance distribution in magnetic levitation flexible rotor system without trial weights

ZHANG Renkun, XU Yuanping, YAO Runhui, ZHOU Yang, CUI Gang, ZHOU Jin

（College of Mechanical & Electrical Engineering，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China）

Abstract: Rotor dynamic balancing is one of the key processes in manufacturing magnetic levitation rotating machinery. However，existing balancing methods require multiple trial runs to obtain influence coefficients，thus resulting in low efficiency. Moreover，they fail to account for the random distribution characteristics of unbalance and the stability differences among different modal orders，leading to interference between low- and high-mode vibrations during balancing，which makes it difficult to meet vibration level requirements across the entire speed range. To address these issues，an optimization method for unbalance distribution in magnetic levitation flexible rotors without trial weights is proposed. Firstly，a magnetic bearing-flexible rotor system model is established，and unknown parameters are identified through modal testing and closed-loop excitation. The model's accuracy is verified based on the API617 standard. Next，the rotor unbalance distribution is identified using least squares fitting based on vibration data from a single run-up test. Finally，the real part of the closed-loop poles is used to characterize the stability of each modal order，and modal-specific balancing weight coefficients are designed. With the objectives of minimizing correction mass and vibration displacement，the NSGA-Ⅱ genetic algorithm is employed to optimize the balancing solution. Experimental results demonstrate that the proposed method reduces the maximum rotor vibration displacement by up to 65%，achieving effective balancing across all modal orders while meeting full-speed-range vibration requirements，thereby validating its effectiveness.

Keywords: active magnetic bearings; rotor dynamics; system parameter identification; optimization of unbalance distribution

磁悬浮轴承具有高速、无摩擦、长寿命、免润滑等优点，可以使涡轮分子泵[1]、空气压缩机[2]、低温余热发电机[3]等旋转机械进一步提高转速，以获取更高的运行效率。然而，随着设计转速的不断提升，转子逐渐由刚性过渡到柔性[4]，残余不平衡质量会诱发转子挠曲变形，导致严重的不平衡振动，危害设备正常运行[5]，因此，有必要对磁悬浮旋转机械的转子进行动平衡。

无试重动平衡避免了反复启停、添加试重的过程，可大幅提高磁悬浮旋转机械动平衡工艺的实施效率，降低试运行成本[6]，是转子动平衡技术的研究热点。现有的无试重动平衡方法可归纳为基于经验公式[7-8]、智能算法[9-11]、动力学模型[12-15]三大类。

经验公式法可快速粗估不平衡量，但具体参数

收稿日期：2025-08-15；**修订日期：**2025-09-22

基金项目：国家重点研发计划资助项目 (2024YFB3410003)；国家自然科学基金资助项目 (52475060)；江苏省研究生科研与实践创新计划资助项目 (KYCX24_0547)

的选择依赖技术人员的经验，无法反映转子动力学行为，平衡精度有限。基于智能算法的无试重动平衡方法可建立不平衡量与振动响应的非线性映射拟合，平衡精度较好，但当磁悬浮轴承的支承参数根据实际系统负载需要而动态调节时，缺乏足够的外推能力。

基于动力学模型的无试重动平衡方法能够直接反映转子振动特性，平衡精度高，当系统负载变化时具有良好的外推能力，是目前无试重动平衡的主流方法[16]。其基本思路为：根据一次试运行数据，结合动力学模型，辨识转子不平衡量参数，再从校正平面上选取合适的修配量。FANG 等[17]基于刚性转子模型，通过分析零位移控制模式下磁悬浮轴承的电流，实现了不平衡质量的辨识。ZHENG 等[18]分析磁悬浮转子运行状态的电流与位移响应，提出了适用于具有强陀螺效应与非对称结构转子的无试重不平衡量辨识方法。但上述研究仅将不平衡量等效为两个集中质量，未考虑其沿转子轴向的随机分布特性，当转子呈现柔性特性时，辨识得到的等效不平衡量不再适用。章云等[19]分析传递函数与影响系数之间的关系，利用扩展影响系数法识别了柔性转子不平衡量分布。GARPELLI 等[20]构建了物理模型引导的人工神经网络，补偿了转子动力学模型的精度，有效提高了不平衡量分布辨识的准确性。但上述研究在选择修配方案时未考虑磁悬浮轴承动态支承参数特性导致的系统各阶模态稳定性差异[21]，平衡高阶模态的过程中常常对低阶模态产生影响。

综上所述，现有的无试重动平衡方法仍存在不平衡量辨识时未考虑其沿转子轴向的随机分布特性、修配时未考虑磁悬浮系统各阶模态的稳定性差异等局限，使柔性转子动平衡时难以保证全速域运行下振动水平的要求。

针对上述问题，本文提出了一种适用于磁悬浮柔性转子的无试重不平衡量分布优化方法。将试运行数据与转子系统模型相结合，在有限元节点上将转子的不平衡量分布特征离散化，辨识了残余不平衡量分布。分析各阶模态稳定性，根据特征极点实部建立各阶模态平衡权重系数，以振动最小、修配质量最小为目标，利用 NSGA-Ⅱ遗传算法获取最优修配方案，并在磁悬浮轴承柔性转子试验台上实施了修配方案，验证了所提方法的有效性。

1 试验平台介绍

本文的研究对象为磁悬浮轴承-柔性转子系统，包括机械系统与电控系统，如图 1 所示。机械系统由转子、电机、相位传感器、径向磁悬浮轴承、轴向磁悬浮轴承组成；电控系统由传感器调理电路、功率放大器、控制器、变频器组成。当系统运行时，转子由 2 个径向磁悬浮轴承与 1 个轴向磁悬浮轴承支承，变频器驱动电机旋转，径向与轴向的电涡流传感器检测转子位移，相位传感器检测转子机械转角；传感器信号由调理电路转化为电压信号，输入控制器；dSPACE MicroLabBox-DS1202 作为控制器，实时计算控制信号，输送至功率放大器中；功率放大器根据控制信号产生对应的电流，调节磁悬浮轴承输出电磁力大小，实现转子的稳定悬浮。该磁悬浮轴承-柔性转子系统具有 1 个试重盘、3 个校正平面、2 个振动测点；试重盘用于模拟工作叶轮的不平衡质量，校正平面用于调整转子的不平衡量分布，振动测点用于测量径向磁悬浮轴承处振动位移量。表 1 为磁悬浮轴承-柔性转子系统的结构参数。

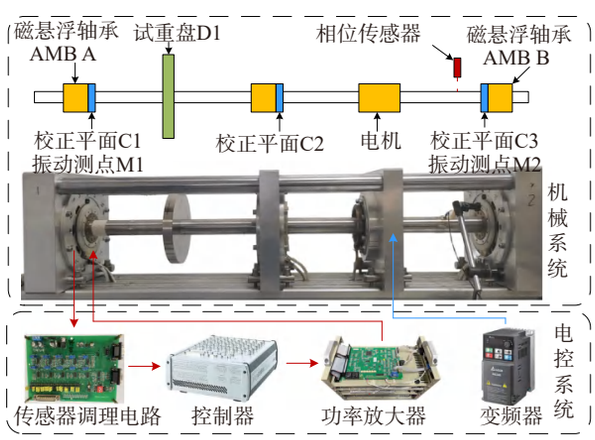


图 1 磁悬浮轴承-柔性转子系统

Fig. 1 Magnetic bearing-flexible rotor system

表 1 磁悬浮轴承-柔性转子系统结构参数

Tab. 1 Structure parameters of magnetic bearing-flexible rotor system

参数	值
转子总质量/kg	14.6
转子总长度/mm	1036
磁悬浮轴承跨距/mm	920
设计转速/(r·min^{-1})	12000
保护轴承间隙/mm	0.125
单个磁极线圈匝数/匝	75
磁极面积/m^2	3.45×10^{-4}
磁极夹角/(°)	22.5
偏置电流/A	1.5
磁悬浮轴承气隙/mm	0.25

2 磁悬浮轴承-柔性转子系统建模

磁悬浮柔性转子不平衡量分布优化需要精确的模型，以获取转子的影响系数矩阵。磁悬浮轴承-柔性转子系统分为机械系统、电控系统两个子模型；机械系统子模型包括柔性转子动力学模型、磁悬浮

轴承电磁力模型、不平衡力模型三部分；电控系统子模型包括传感器模型、控制器模型、功率放大器模型三部分。

2.1　机械系统子模型

通过有限元法对试验台的转子进行建模，将转子划分为 45 个梁单元，关键节点划分如图 2 所示。转子的动力学方程为[22]：

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}\ddot{\boldsymbol{q}}+(\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}+\omega\boldsymbol{G}_{\mathrm{r}}\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{AMB}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{u}} \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}$ 为转子质量矩阵；$\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}$ 为转子阻尼矩阵；$\boldsymbol{G}_{\mathrm{r}}$ 为转子陀螺矩阵；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}$ 为转子刚度矩阵；ω 为转频；$\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{q}_1\ \boldsymbol{q}_2\ \cdots\ \boldsymbol{q}_i\ \cdots\ \boldsymbol{q}_{46}]^{\mathrm{T}}$ 为转子广义坐标向量，$\boldsymbol{q}_i=[x_i\ y_i\ \varphi_{xi}\ \varphi_{yi}]^{\mathrm{T}}$ 为第 i 个节点下转子位移向量，x_i、y_i 分别为第 i 个节点下转子在 x、y 方向的位移，φ_{xi}、φ_{yi} 分别为第 i 个节点下转子绕 x 轴、y 轴的转角；$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AMB}}$ 为磁悬浮轴承电磁力向量；$\boldsymbol{F}_{\mathrm{u}}$ 为不平衡力向量；$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}$ 为电磁力作用节点的变换矩阵；$\boldsymbol{T}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}$ 为不平衡力作用节点的变换矩阵。

对磁悬浮轴承的电磁力进行建模，本文的磁悬浮轴承选用差动电流驱动模式，因此在转子悬浮位置附近，电磁力可线性化近似处理为[23-24]：

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AMB}}=\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{i}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{k}_{\mathrm{x}}\boldsymbol{x} \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{q}$ 为磁悬浮轴承节点的位移向量；$\boldsymbol{i}_{\mathrm{c}}$ 为磁悬浮轴承各通道的控制电流向量；$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}$ 为电流刚度向量；$\boldsymbol{k}_{\mathrm{x}}$ 为位移刚度向量。

对转子的不平衡力进行建模，假设转子的残余不平衡量随机分布于任意节点上，则不平衡力可表示为：

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{u}}=\begin{bmatrix} U_{\mathrm{r}1}\omega^2\cos(\omega t+\theta_1)\\ U_{\mathrm{r}1}\omega^2\sin(\omega t+\theta_1)\\ \vdots\\ U_{\mathrm{r}i}\omega^2\cos(\omega t+\theta_i)\\ U_{\mathrm{r}i}\omega^2\sin(\omega t+\theta_i)\end{bmatrix} \tag{3}$$

式中，$U_{\mathrm{r}i}$ 为第 i 个节点上不平衡量的质量半径之积；θ_i 为第 i 个节点上不平衡量的相位角；t 为时间。

联立式 (1)~(3)，建立机械系统子模型的状态空间方程，取状态变量 $\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{q}\quad\dot{\boldsymbol{q}}]^{\mathrm{T}}$：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{i}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{u}}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{z}\end{cases} \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}^{-1}(\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}-\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{\mathrm{x}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}) & -\boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}^{-1}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}+\omega\boldsymbol{G}_{\mathrm{r}})\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{B}_{\mathrm{i}}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}^{-1}\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}^{-1}\boldsymbol{T}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{C}_{\mathrm{s}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{\mathrm{s}} & 0\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}$ 为传感器检测节点的变换矩阵。

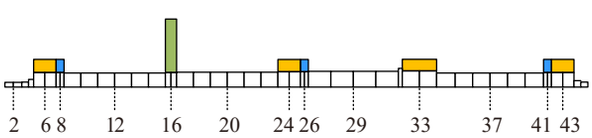


图 2　转子有限元节点划分

Fig. 2　Finite element nodes of rotor

2.2　电控系统子模型

对电涡流位移传感器进行建模，将其等效为比例环节，传递函数 $G_{\mathrm{s}}(s)$ 为：

$$G_{\mathrm{s}}(s)=\frac{U_{\mathrm{s}}(s)}{Q_{\mathrm{s}}(s)}=k_{\mathrm{s}} \tag{5}$$

式中，k_{s} 为径向位移传感器增益；$U_{\mathrm{s}}(s)$ 传感器输出电压信号 u_{s} 的拉普拉斯变换；$Q_{\mathrm{s}}(s)$ 为传感器节点位移向量 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{q}$ 的拉普拉斯变换。

对控制器进行建模，本文选用 PID 算法作为主控制器，串联若干相位补偿器以提升转子弯曲模态频率处的支承阻尼[21]，传递函数 $G_{\mathrm{c}}(s)$ 为：

$$\begin{aligned}&G_{\mathrm{c}}(s)=\frac{U_{\mathrm{c}}(s)}{E(s)}=G_{\mathrm{PID}}(s)\cdot\prod G_{\mathrm{PL}i}(s),\\ &G_{\mathrm{PID}}(s)=k_{\mathrm{P}}+\frac{k_{\mathrm{I}}}{s}+\frac{k_{\mathrm{D}}s}{\tau s+1},\\ &G_{\mathrm{PL}i}(s)=\frac{(\omega_{\mathrm{m}i}-\omega_{\mathrm{r}i})^2s^2+2\xi_i(\omega_{\mathrm{m}i}-\omega_{\mathrm{r}i})s+1}{(\omega_{\mathrm{m}i}+\omega_{\mathrm{r}i})^2s^2+2\xi_i(\omega_{\mathrm{m}i}+\omega_{\mathrm{r}i})s+1}\end{aligned} \tag{6}$$

式中，$G_{\mathrm{PID}}(s)$、$G_{\mathrm{PL}i}(s)$ 分别为 PID 控制器、第 i 个相位补偿器的传递函数；$U_{\mathrm{c}}(s)$、$E(s)$ 分别为控制电压 u_{c}、输入误差 e 的拉普拉斯变换；k_{P}、k_{I}、k_{D}、τ 分别为 PID 控制器的比例增益、积分增益、微分增益、不完全微分系数；$\omega_{\mathrm{m}i}$、$\omega_{\mathrm{r}i}$、ξ_i 分别为第 i 个相位补偿器的中心频率、补偿范围、相位变化率。

功率放大器模型可由二阶系统传递函数来近似[25]，传递函数 $G_{\mathrm{a}}(s)$ 为：

$$G_{\mathrm{a}}(s)=\frac{i_{\mathrm{c}}(s)}{U_{\mathrm{c}}(s)}=\frac{a_1s+a_2}{a_3s^2+a_4s+a_5} \tag{7}$$

通过试验拟合可得到具体的参数值。

联立式 (5)~(7)，建立电控系统子模型的传递函数 $G_{\mathrm{e}}(s)$：

$$G_{\mathrm{e}}(s)=\frac{I_{\mathrm{c}}(s)}{Q_{\mathrm{s}}(s)}=G_{\mathrm{s}}(s)G_{\mathrm{c}}(s)G_{\mathrm{a}}(s) \tag{8}$$

2.3　闭环系统模型

根据式 (4) 和 (8)，建立机械系统子模型与电控系统子模型的闭环连接通道，形成磁悬浮轴承-柔性转子闭环系统模型，总体框图如图 3 所示。

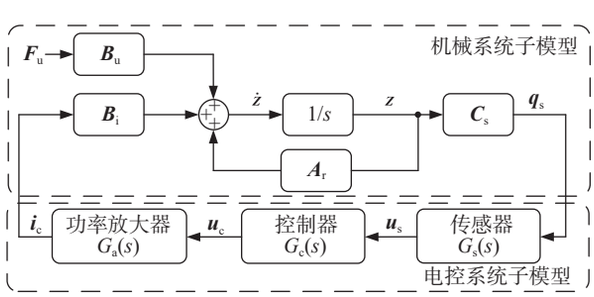


图 3　磁悬浮轴承-柔性转子系统模型框图

Fig. 3　Magnetic bearing-flexible rotor system model block diagram

3 模型参数辨识

完成磁悬浮轴承-柔性转子系统建模后，需要对模型中的不确定参数进行辨识，使其更吻合实际系统特性。本文采用分步辨识策略调整模型参数，首先，基于频率响应试验结果对转子有限元模型中的不确定参数进行辨识；其次，提出闭环激励辨识方法，获取磁悬浮轴承的电流刚度与位移刚度向量；最后，依据 API617 标准[26] 中的扫频测试方法验证模型的准确性。

3.1 转子有限元模型参数辨识

本文中转子的热套组件的过盈配合使得芯轴局部抗弯刚度发生变化，导致模态频率发生变化。此外，本文选用比例阻尼形式 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}=\alpha\boldsymbol{M}_{\mathrm{r}}+\beta\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}$ 表示转子阻尼矩阵，系数 α、β 难以直接获取。因此，设置的待辨识参数为图 4 中热套组件区域材料弹性模量属性 e_1~e_5 与比例阻尼系数 α、β。

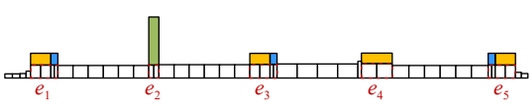


图 4 待辨识的弹性模量参数

Fig. 4 Elastic modulus to be identified

令转子保持自由-自由状态，将加速度传感器布置于节点 8 和 41，使用力锤激励图 2 中所列举的 13 个关键节点，测试频率响应函数，并提取前三阶模态振型向量。综合考虑模型与试验间频响函数、模态振型的一致性，建立目标函数，如下式所示：

$$\begin{cases}\min\left(\sum\limits_{j=1}^{2}\sum\limits_{i=1}^{13}\left(\dfrac{\left\|(\boldsymbol{H}_{ij})_{\mathrm{model}}-(\boldsymbol{H}_{ij})_{\mathrm{meas}}\right\|_2}{\left\|(\boldsymbol{H}_{ij})_{\mathrm{meas}}\right\|_2}\right)\right)\\ \max\left(\sum\limits_{n=1}^{3}\left(\dfrac{\left\|(\boldsymbol{\varphi}_n)_{\mathrm{model}}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{\varphi}_n)_{\mathrm{meas}}\right\|_2}{\|(\boldsymbol{\varphi}_n)_{\mathrm{model}}\|_2\cdot\|(\boldsymbol{\varphi}_n)_{\mathrm{meas}}\|_2}\right)\right)\end{cases}\tag{9}$$

式中，i 表示力锤激励节点编号；j 表示加速度响应节点编号；n 表示模态阶次；$\|\cdot\|_2$ 表示求二范数；$(\boldsymbol{H}_{ij})_{\mathrm{meas}}$ 表示试验测得的频响向量；$(\boldsymbol{H}_{ij})_{\mathrm{model}}$ 表示模型仿真的频响向量；$(\boldsymbol{\varphi}_n)_{\mathrm{meas}}$ 表示试验测得的振型向量；$(\boldsymbol{\varphi}_n)_{\mathrm{model}}$ 表示模型仿真的振型向量。

根据式 (9) 的目标函数，选用单纯形法调整待辨识的参数，得到优化结果。将优化后的参数代入模型中，获得仿真与试验的频响函数、振型函数对比如图 5 和 6 所示。

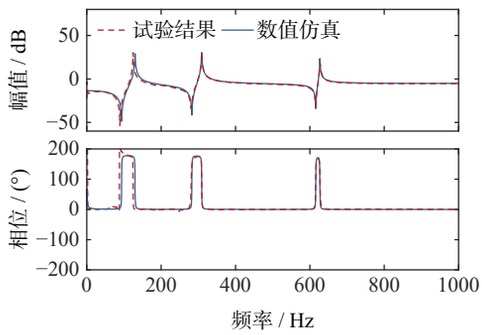


图 5 频响函数对比

Fig. 5 Frequency response function comparison

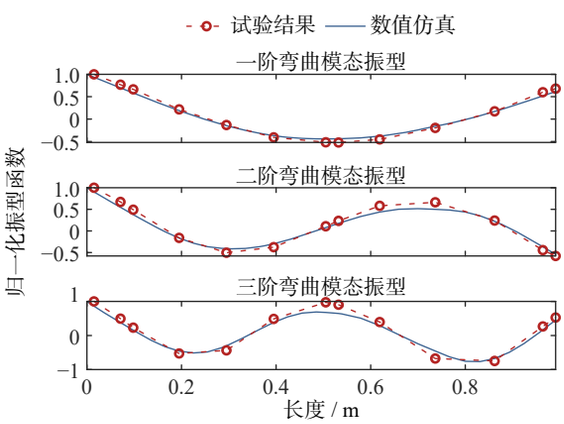


图 6 模态振型对比

Fig. 6 Modal shape comparison

3.2 磁悬浮轴承电磁力参数辨识

针对磁悬浮轴承的电磁力，现已有等效磁路理论[27] 可直接计算电流刚度与位移刚度向量。然而，实际系统中存在加工误差，且磁悬浮轴承的漏磁损耗难以评估，使理论值存在较大误差，因此需要对电磁力参数进行辨识。

本文提出了一种适用于柔性转子的闭环激励辨识方法，其基本思路是在转子静态悬浮状态下，利用磁悬浮轴承施加正弦扰动力，同时采集位移向量 $\boldsymbol{x}$ 与控制电流向量 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{c}}$，并构建辨识方程，求解电流刚度向量 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}$ 与位移刚度向量 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{x}}$。闭环激励辨识的实施方法如图 7 所示。

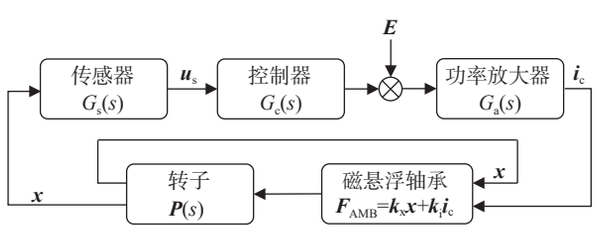


图 7 闭环激励辨识方法

Fig. 7 Closed-loop excitation identification method

图 7 中，$\boldsymbol{E}$ 表示在磁悬浮轴承四个通道中施加的多相正弦激励信号，其表达式为：

$$\boldsymbol{E}(\omega_k)=\begin{bmatrix}A_k\sin(\omega_k t+\dfrac{\pi}{2})\\ A_k\sin(\omega_k t+\pi)\\ A_k\sin(\omega_k t+\dfrac{3\pi}{2})\\ A_k\sin(\omega_k t+2\pi)\end{bmatrix}\tag{10}$$

式中, ω_k 为第 k 个正弦激励的频率; A_k 为第 k 个正弦激励的幅值。

采集磁悬浮轴承-柔性转子系统 4 个通道的位移 $\boldsymbol{x}$ 与控制电流 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{c}}$, 通过快速傅里叶变换分别转化为复矢量 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{i}}_{\mathrm{c}}$, 则可构建辨识方程为:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}(\mathrm{j}\omega_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}(\mathrm{j}\omega_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}(\mathrm{j}\omega_1) & \boldsymbol{X}(\mathrm{j}\omega_1) \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{I}(\mathrm{j}\omega_k) & \boldsymbol{X}(\mathrm{j}\omega_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} \\ \boldsymbol{k}_{\mathrm{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(\mathrm{j}\omega_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}(\mathrm{j}\omega_k) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{j}\omega_k) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{\mathrm{AA}} & 0 & \tilde{P}_{\mathrm{AB}} & 0 \\ \tilde{P}_{\mathrm{AA}} & 0 & \tilde{P}_{\mathrm{AB}} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{\mathrm{BA}} & 0 & \tilde{P}_{\mathrm{BB}} \\ 0 & \tilde{P}_{\mathrm{BA}} & 0 & \tilde{P}_{\mathrm{BB}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}(\mathrm{j}\omega_k) = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} \tilde{i}_{\mathrm{c1}} & \tilde{i}_{\mathrm{c2}} & \tilde{i}_{\mathrm{c3}} & \tilde{i}_{\mathrm{c4}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}(\mathrm{j}\omega_k) = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 & \tilde{x}_4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}(\mathrm{j}\omega_k) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 & \tilde{x}_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} k_{\mathrm{i1}} & k_{\mathrm{i2}} & k_{\mathrm{i3}} & k_{\mathrm{i4}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} k_{\mathrm{x1}} & k_{\mathrm{x2}} & k_{\mathrm{x3}} & k_{\mathrm{x4}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

式中, $\boldsymbol{P}(\mathrm{j}\omega_k)$表示转子自由-自由状态下在 ω_k 频率处的被控对象复矩阵; $\boldsymbol{I}(\mathrm{j}\omega_k)$表示扫频激励频率为 ω_k 时, 线圈电流信号经快速傅里叶变换后在 ω_k 频率处复矢量矩阵; $\boldsymbol{X}(\mathrm{j}\omega_k)$和 $\boldsymbol{x}(\mathrm{j}\omega_k)$分别表示扫频激励频率为 ω_k 时, 转子振动位移信号经快速傅里叶变换后在 ω_k 频率处的复矢量矩阵与复矢量向量; $\tilde{P}_{\mathrm{AB}}$表示转子自由-自由状态下磁悬浮轴承 A-B 端力-位移传递函数在 ω_k 频率处的复矢量, 可由 3.1 节辨识后的模型直接获得。

将式 (11)、(12) 中确定的辨识方程简化为:

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} \\ \boldsymbol{k}_{\mathrm{x}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \tag{13}$$

由于式 (13) 构成了超定方程组, 选用最小二乘估计方法计算近似解, 则可得:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} \\ \boldsymbol{k}_{\mathrm{x}} \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B} \tag{14}$$

对第 1 节所述的试验台进行辨识, 得到磁悬浮轴承的电磁力参数, 如表 2 所示。

表 2　电磁力参数辨识结果

Tab. 2　Identification results of electromagnetic force parameters

参数名	变量名	辨识值
电流刚度/ ($\mathrm{N\cdot A^{-1}}$)	k_{i1}	131.6
	k_{i2}	124.3
	k_{i3}	143.1
	k_{i4}	149.8
位移刚度/ ($\mathrm{N\cdot m^{-1}}$)	k_{x1}	-1.13×10^{6}
	k_{x2}	-1.02×10^{6}
	k_{x3}	-1.40×10^{6}
	k_{x4}	-1.41×10^{6}

3.3　模型验证

磁悬浮轴承-转子系统其余的参数可通过测量或标定直接获取, 详细的参数说明如表 3 所示。

表 3　系统参数测量值

Tab. 3　The measurement of system parameters

参数类别	变量名	值
位移传感器	位移传感器增益k_s/($\mathrm{V\cdot m^{-1}}$)	20000
控制器	比例增益k_{P}	1.8
	积分增益k_{I}	1
	微分增益k_{D}	0.0014
	相位补偿器中心频率$\omega_{\mathrm{m}i}$/Hz	348、630
	相位补偿器中心频率$\omega_{\mathrm{tr}i}$/Hz	10、30
	相位补偿器相位变化率ξ_i	0.05、0.07
功率放大器	传递函数拟合值a_1	2.0
	传递函数拟合值a_2	1.0×10^{3}
	传递函数拟合值a_3	2.8×10^{-3}
	传递函数拟合值a_4	7.1
	传递函数拟合值a_5	3.3×10^{3}

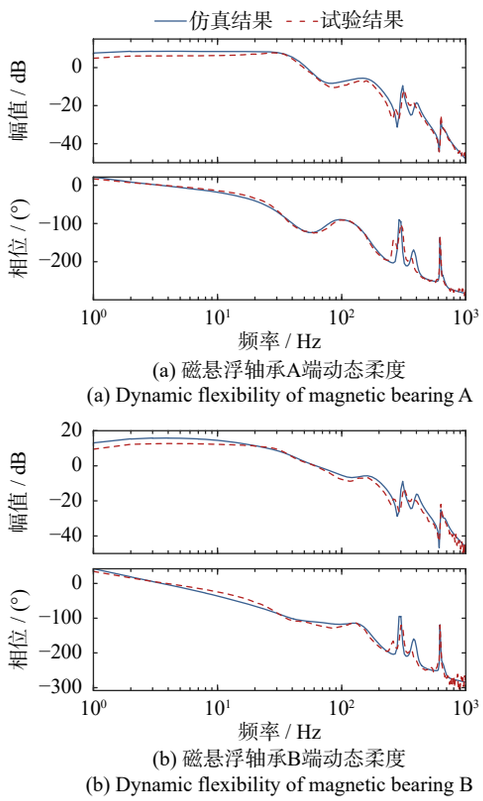
为验证模型的准确性, 引入 API617 标准中的动态柔度传递函数以验证。具体实施方法与图 7 所示框图相同, 在系统四个通道中分别施加扫频激励信号 u_{e}, 采集该通道传感器信号 u_{s}, 计算动态柔度传递函数 $R(s)$ 如下式所示:

$$R(s) = \frac{U_{\mathrm{s}}(s)}{U_{\mathrm{e}}(s)} = \frac{G_{\mathrm{a}}(s)P(s)G_{\mathrm{s}}(s)}{1+G_{\mathrm{c}}(s)G_{\mathrm{a}}(s)P(s)G_{\mathrm{s}}(s)} \tag{15}$$

依据 API617 标准, 要求实际系统的最大运行转速 1.25 倍区间内, 测试得到的模态频率与理论计算频率偏差小于 5%, 测试得到的幅值峰值在理论计算幅值峰值的 0.5~2 倍。针对本文的磁悬浮轴承-柔性转子系统, 取频率区间 0~250 Hz, 扫频测试结果如图 8 所示。结果表明系统存在一个刚体模态与一阶弯曲模态, 仿真与试验模态频率误差分别为 2.9% 和 1.2%, 幅值峰值之比分别为 1.04 和 1.17, 满足 API617 标准要求, 证明了模型的准确性。

4　无试重不平衡量分布优化

在柔性转子动平衡过程中, 考虑到转子强度要求与可修配区域受限, 需要寻找修配质量最小、平衡效果最好的修配方案, 实现系统全速域下均能满足振动要求。因此, 本文以磁悬浮轴承-柔性转子系统模型为基础, 提出了一种无试重不平衡量分布优化方法, 其基本思路为: 首先, 将转子沿轴向方法划分为数个区域, 根据试验数据辨识残余不平衡量的分布; 其次, 分析各阶模态的稳定性, 并确定各阶模态区间的平衡权重; 最后, 以振动最小、修配质量最



(a) 磁悬浮轴承A端动态柔度
(a) Dynamic flexibility of magnetic bearing A

(b) 磁悬浮轴承B端动态柔度
(b) Dynamic flexibility of magnetic bearing B

图 8 动态柔度传递函数对比

Fig. 8 The comparison of dynamic flexibility transfer function

小为优化目标，选用 NSGA-Ⅱ遗传算法进行多目标优化，从 Pareto 解集中选择最优解。具体流程图如图 9 所示。该方法的应用并不仅限于磁悬浮轴承支承的转子，对于普通机械轴承转子系统也可通过更改轴承模型以实施柔性转子动平衡修配。

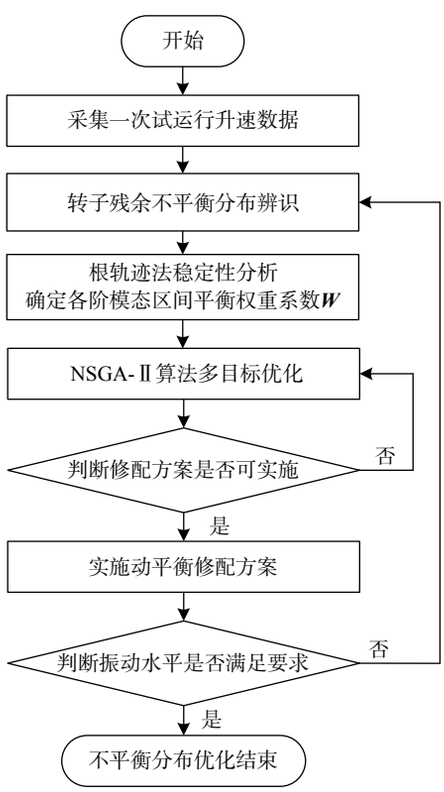


图 9 无试重不平衡量分布优化方法流程图

Fig. 9 Flowchart of the optimization method of unbalance distribution without trial mass

4.1 转子残余不平衡量分布辨识

由于转子残余不平衡量沿转子轴向方向随机分布，需要先对其进行辨识，以确定后续的不平衡量分布优化方案。

将转子沿轴向方向划分为 9 个区域，如图 10 所示。将每一个区域的中心节点作为集中不平衡量作用点。进行转子试运行升速试验，每隔 300 r/min 采集一次振动数据，提取当前转速的振动矢量 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{ini}}$，形成升速响应曲线。为了保证设备运行的安全性，根据实际运行振动位移的大小，将试运行升速范围设置为 0~9600 r/min。在仿真模型中每一个区域的中心节点处分别添加虚拟标称试重，计算两个振动测点的位移响应，获得影响系数矩阵 $\boldsymbol{C}$。

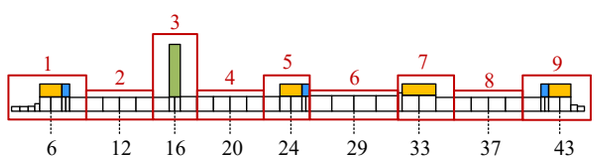


图 10 残余不平衡量分布区域

Fig. 10 The distribution area of residual unbalance

根据最小二乘法原理，辨识得到残余不平衡量分布向量 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{res}}$ 如下所示，其值如表 4 所示。

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{res}}=\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{ini}} \tag{16}$$

式中，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{mn}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}_{mn}$ 代表第 n 个区域不平衡量对第 m 个振动测点位移的影响系数向量。

表 4 不平衡量分布辨识结果

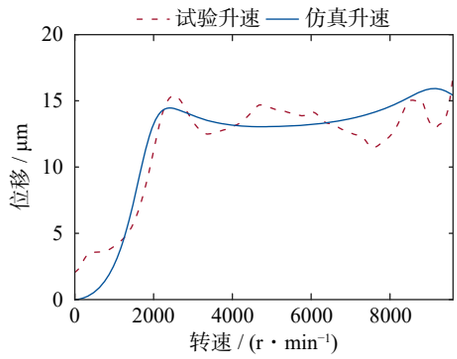
Tab. 4 The results of unbalance distribution identification

不平衡量分布区域	不平衡量/(g·mm)	相位/(°)
节点6#	25.8	173
节点12#	4.3	−118
节点16#	56.4	−153
节点20#	12.2	−132
节点24#	18.7	−166
节点29#	5.4	125
节点33#	11.1	124
节点37#	6.2	118
节点43#	17.9	115

将辨识得到的残余不平衡量分布向量 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{res}}$ 代入模型中，并与试验升速曲线比较，如图 11 所示。

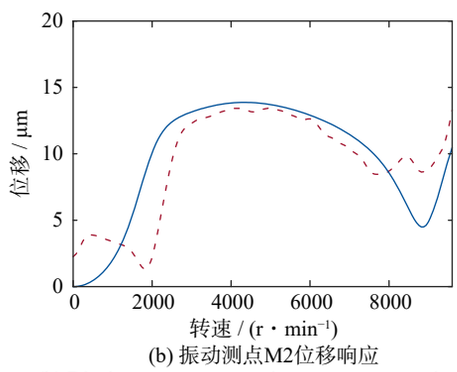
4.2 各阶模态平衡权重分析

由于实际转子动平衡的校正平面数量有限，难



(a) 振动测点M1位移响应

(a) Displacement response in measurement point M1



(b) 振动测点M2位移响应

(b) Displacement response in measurement point M2

图 11　升速曲线仿真、试验对比

Fig. 11　The speed-up curve comparison between simulation and experiment

以直接在不平衡量所在的平面直接修配，仅能根据等效不平衡量进行调整。然而，柔性转子的等效不平衡量具有随转速变化的特性[28]，高阶模态的动平衡修配可能会影响低阶模态的振动。普通机械轴承的支承参数通常视作恒定值，各阶模态处具有相似的阻尼比，而磁悬浮轴承的支承参数具有随转速变化的特性，各阶模态的阻尼比不同，部分模态频率附近更容易产生较大振动。因此，在磁悬浮柔性转子动平衡修配方案的选择中应关注各阶模态的稳定性，设计各阶模态平衡权重系数，保证全速域下的平衡效果。

本文选用根轨迹法分析系统动力学特性，基于上文所建立的模型，以旋转频率为变化量，求解系统特征极点，并绘制根轨迹图如图 12 所示。特征极点的虚部反映模态频率，实部反映该模态在有限冲击响应下的振幅衰减速率。分析根轨迹图可知，在工作转速范围内包含平动刚体模态、锥动刚体模态、一阶弯曲模态。其中，锥动刚体模态距离虚轴最远，具有最大的振幅衰减速率，一阶弯曲模态次之，平动刚体模态最小。

提取特征极点的虚部，绘制坎贝尔图如图 13 所示。分析可得该系统存在 2100 r/min 的平动刚体临界转速、5400 r/min 的锥动刚体临界转速、8800 r/min 的一阶反涡动临界转速、10500 r/min 的一阶正涡动

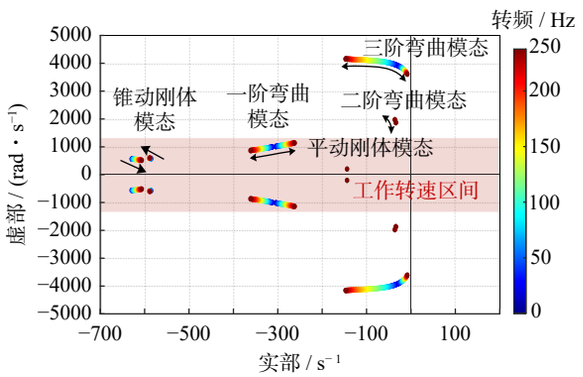


图 12　系统根轨迹图

Fig. 12　The root locus of system

临界转速。因此将整个运行转速划分为三个区间，具体为：平动刚体模态区间 0~3500 r/min；锥动刚体模态区间 3500~7500 r/min；一阶弯曲模态区间 7500 ~ 12000 r/min。后续的平衡权重系数将按照三个模态区间分别设计。

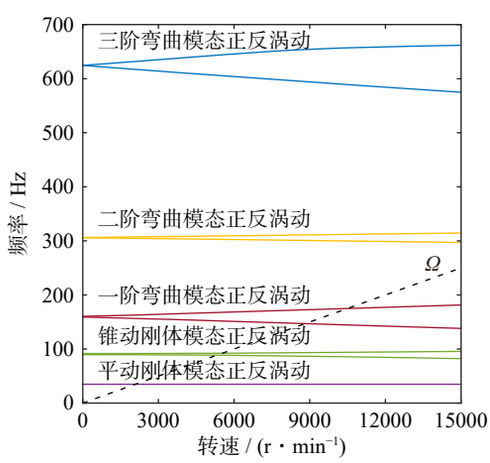


图 13　转子坎贝尔图

Fig. 13　The Campbell diagram of rotor

考虑到各阶模态区间的振幅衰减速率，可建立权重函数如下：

$$W_n = \frac{1}{|\sigma_n|} \tag{17}$$

式中，W_n 为第 n 个模态区间的权重系数；$|\sigma_n|$ 为第 n 阶模态特征根在全转速范围内与虚轴最小的距离。

由式 (17) 可得，本文的平动刚体模态区间、锥动刚体模态区间、一阶弯曲模态区间平衡权重系数之比为 20∶5∶12。

4.3　NSGA-Ⅱ遗传算法多目标优化

为了防止转子与磁悬浮轴承中配备的保护轴承碰摩，需要使轴承处振动位移尽量小。此外，为了减小动平衡维修后产生的转子强度损失，需要使修配的质量尽量小。因此，本文以振动最小、修配总质量最小为目标，对转子的不平衡量分布进行了优化。

本文基于影响系数法转子动平衡原理，建立了

不平衡量分布优化模型。由于本文所涉及的试验平台只具有三个校正平面 C1、C2、C3，因此在模型中对应节点 8、26、41 处添加虚拟标称试重，计算振动测点 M1、M2（节点 8、41）处的位移响应矢量，获得各平衡转速下的影响系数矩阵 $\boldsymbol{T}$。不平衡量分布优化模型可建立为：

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{U}_{\mathrm{cor}}+\boldsymbol{V}_0=\boldsymbol{V}_{\mathrm{res}} \tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{cor}}$ 为校正平面修配向量；$\boldsymbol{V}_0$ 为初始不平衡振动矢量；$\boldsymbol{V}_{\mathrm{res}}$ 为修配后的残余不平衡振动矢量。

综合考虑转子全速域下的振动响应与动平衡修配代价，分别以振动矢量加权二范数和修配总质量为优化指标，设置多目标优化函数如下：

$$\begin{cases}\min\left(\sum W_n\left\|\boldsymbol{V}_n^{\mathrm{res}}\right\|_2\right)\\ \min\left(\sum\left(\dfrac{U_i^{\mathrm{cor}}}{R_i^{\mathrm{cor}}}\right)\right)\end{cases} \tag{19}$$

式中，W_n 为 4.1 小节中规定的各平衡转速权重系数；$\boldsymbol{V}_n^{\mathrm{res}}$ 为第 n 个平衡转速下修配后的残余不平衡振动矢量；U_i^{cor} 为第 i 个校正平面的修配质量半径积；R_i^{cor} 为第 i 个校正平面的最大半径。

在模型中每隔 600 r/min 计算一次振动响应数据，生成初始不平衡振动矢量 $\boldsymbol{V}_0$，并根据各个转速所在的区间进行平衡权重分配。选用 NSGA-Ⅱ遗传算法优化校正平面修配向量 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{cor}}$，设置初始种群数为 800，最大进化代数为 600 代，Pareto 前沿个体系数为 0.2，适应度函数值偏差为 1×10^{-10}，优化后获得 Pareto 解集。将 Pareto 解集中的各个元素按式 (19) 规定的两个目标函数从大到小排序为 P_q，并定义增长率函数 η_q 如下：

$$\eta_q=\left|\frac{f_2(P_{q+1})-f_2(P_q)}{f_1(P_{q+1})-f_1(P_q)}\right| \tag{20}$$

式中，$f_1(P_q)$ 为 Pareto 解集中元素 P_q 的振动矢量加权二范数；$f_2(P_q)$ 为 Pareto 解集中元素 P_q 的修配总质量。

设定最优解选择阈值函数 λ，表达式如下：

$$\lambda=\frac{\eta_q-\min(\eta_q)}{\max(\eta_q)-\min(\eta_q)} \tag{21}$$

阈值函数的取值范围为 0~1，该值越大则代表增加更大的修配质量已经无法取得更好的平衡效果。本文中选择阈值函数为 0.9。

4.4 无试重不平衡量分布优化试验

在本文第 1 节中描述的磁悬浮轴承-柔性转子试验平台上开展无试重不平衡量分布优化试验。根据本体提出的方法进行无试重不平衡量分布优化试验，获得的 Pareto 解集如图 14 所示。综合考虑转子全速域下的振动响应要求与动平衡修配代价，规定最优解选择阈值函数 λ=0.9，获得修配方案如表 5 所示。

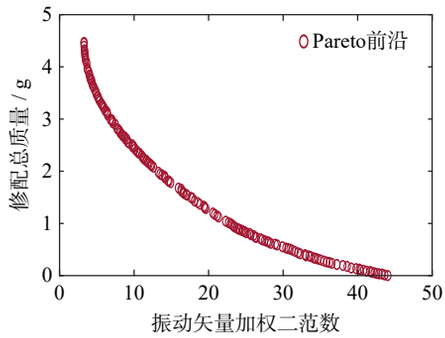


图 14 不平衡量分布优化 Pareto 解集

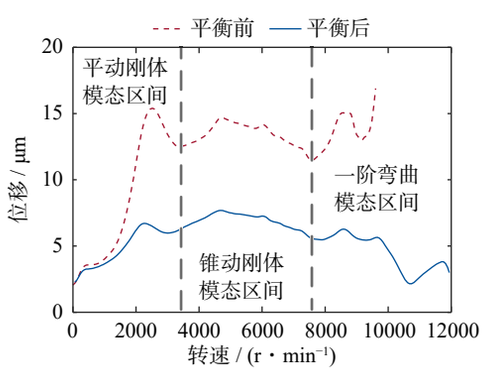
Fig. 14 The Pareto frontiers of unbalance distribution optimization

表 5 不平衡量分布优化方案

Tab. 5 The optimization scheme of unbalance distribution

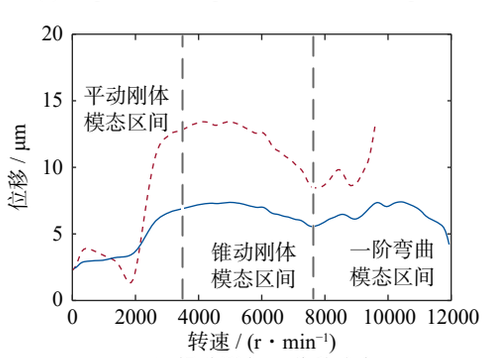
校正平面	修配量/(g·mm)	相位/(°)	质量/g
校正平面C1	39.4	52	1.58
校正平面C2	46.4	50	1.86
校正平面C3	17.9	−65	0.72

在校正平面 C1、C2、C3 上实施该修配方案后，再次进行转子试运行升速试验，采集振动测点 M1 和 M2 的位移-转速响应曲线如图 15 所示。为了保证设备运行的安全性，根据实际运行振动位移的大小，将试运行升速范围设置为 0~9600 r/min。试验结果表明，经过无试重不平衡量分布优化后的磁悬浮



(a) 振动测点M1位移响应

(a) Displacement response in measurement point M1



(b) 振动测点M2位移响应

(b) Displacement response in measurement point M2

图 15 平衡前后振动位移幅值对比

Fig. 15 Comparison of the amplitudes of the displacements before and after balancing

转子系统全速域下位移振动响应明显降低，成功跨越了一阶正涡动临界转速，到达额定转速。其中，振动测点 M1 的位移幅值最大减小了 65%，振动测点 M2 的位移幅值最大减小了 46%，验证了本文所提出的磁悬浮转子无试重不平衡量分布优化方法的有效性。

5　结　论

本研究工作的目的在于为磁悬浮轴承-柔性转子系统提供一种快速有效的无试重不平衡量分布优化方法。将试运行数据与转子系统模型相结合，在有限元节点上将转子的不平衡量分布特征离散化，辨识了转子残余不平衡量分布，依据转子系统稳定性分析结果，提出了各阶模态平衡权重系数设计方法，并以振动最小、修配质量最小为目标，得到了最优修配方案。试验结果表明，经过动平衡修配后，转子振动位移最大减小 65%，转子可在工作转速范围内稳定运行，验证了所提方法的有效性。该方法的主要优势如下：

（1）动平衡修配过程的试车次数最小化。当建模与参数辨识工作完成后，需实施的修配量只需要一次升速/降速试验即可获得。

（2）系统全速域运行下的振动位移最小化。对多个转速区间进行加权优化，减小高阶模态的动平衡修配对低阶模态振动的影响。

（3）动平衡修配质量最小化。综合考虑平衡效果和修配总质量，减小了去重动平衡修配导致的转子强度损失。

然而，该方法的实际效果依赖于转子系统模型的准确度，未来可进一步研究建模不确定性对动平衡效果的影响，并探究减小模型精度依赖性的方法。

综上，本文提出的无试重不平衡量分布优化方法可为磁悬浮旋转机械的转子动平衡提供参数选择指导，也可通过调整轴承模型以适应普通机械轴承支承的旋转机械动平衡流程，有助于推动动平衡工艺自动化的发展。

参考文献：

[1] YAO R H，XU Y P，ZHANG R K，et al. Unbalance compensation based on speed fault-tolerance and fusion strategy for magnetically suspended PMSM[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2025，224：111991.

[2] HAN X，LIU G，CHEN B D，et al. Surge disturbance suppression of AMB-rotor systems in magnetically suspension centrifugal compressors[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology，2022，30(4)：1550-1560.

[3] 纪历. 低温余热磁悬浮发电机转子轴系振动机理研究 [J]. 电机与控制学报，2019，23(11)：67-75.
JI Li. Vibration mechanism analysis of magnetic levitation rotor system for low temperature waste heat power generation[J]. Electric Machines and Control，2019，23(11)：67-75.

[4] ZHANG Y，ZHOU J，ZHANG Y B，et al. Modelling and vibration response of a magnetically suspended flexible rotor considering base motion[J]. Applied Mathematical Modelling，2023，118：518-540.

[5] 张春光. 高速柔性转子离线动平衡方法研究 [D]. 沈阳：沈阳工业大学，2021.
ZHANG Chunguang. Research on off-line dynamic balance method of high-speed flexible rotor[D]. Shenyang：Shenyang University of Technology，2021.

[6] 贾胜锡，郑龙席，邓旺群，等. 柔性转子无试重模态动平衡测试系统 [J]. 振动、测试与诊断，2018，38(6)：1108-1113.
JIA Shengxi，ZHENG Longxi，DENG Wangqun，et al. Development of modal balancing system without trail weights for high speed flexible rotors[J]. Journal of Vibration，Measurement & Diagnosis，2018，38(6)：1108-1113.

[7] XIE D M，YANG Y，LIU Z H，et al. A balance method without trial mass based on lag phase[C]//ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. 2014.

[8] 温广瑞，刘石，张西宁，等. 基于多传感信息的转子无试重现场动平衡方法研究 [C]//2011 年全国机械动力学学术大会暨中国振动工程学会机械动力学学会成立 30 周年庆祝会议论文集. 2011：329-338.

[9] 张茹鑫，温广瑞，张志芬，等. 集成 GA-PSO 方法的转子系统多点不平衡量识别 [J]. 振动、测试与诊断，2019，39(4)：801-809.
ZHANG Ruxin，WEN Guangrui，ZHANG Zhifen，et al. Multi-unbalances identification of rotor system integrated with GA-PSO method[J]. Journal of Vibration，Measurement & Diagnosis，2019，39(4)：801-809.

[10] ZHONG S，LI L Q，CHEN H Z，et al. A novel balancing method for rotor using unsupervised deep learning[J]. Shock and Vibration，2021，2021(1)：1800164.

[11] GOHARI M，EYDI A M. Modelling of shaft unbalance：modelling a multi discs rotor using K-Nearest Neighbor and Decision Tree Algorithms[J]. Measurement，2020，151：107253.

[12] DALMAZZO SANCHES F，AP CAVALLINI A，STEFFEN V. Theoretical and experimental applications of a rotor balancing technique without using trial weights based on augmented Kalman filter[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2024，208：111066.

[13] JIANG L L，SHI C Z，LI X J，et al. Dynamic balance optimization method for aero-engine rotor without trial weight[J].

Advances in Mechanical Engineering, 2025, 17(6): 16878132251343928.

[14] ZHANG F Y, LI X J, HAN Q K, et al. Research on dynamic balance optimization method of flexible rotor based on GWO[J]. Measurement Science and Technology, 2024, 35(10): 106108.

[15] MORAIS T S, DER HAGOPIAN J, STEFFEN V, et al. Optimization of unbalance distribution in rotating machinery with localized non linearity[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 72: 60-70.

[16] 章云，王晓宇，梅雪松. 高速转子无试重动平衡方法研究现状分析 [J]. 振动与冲击，2022，41(21)：216-227.
ZHANG Yun, WANG Xiaoyu, MEI Xuesong. Studying status review for high-speed rotor dynamic balancing method without trial weights[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(21): 216-227.

[17] FANG J C, WANG Y G, HAN B C, et al. Field balancing of magnetically levitated rotors without trial weights[J]. Sensors, 2013, 13(12): 16000-16022.

[18] ZHENG S Q, WANG C. Rotor balancing for magnetically levitated TMPs integrated with vibration self-sensing of magnetic bearings[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2021, 26(6): 3031-3039.

[19] 章云，胡振邦，梅雪松. 高速转子分布式不平衡量无试重识别方法 [J]. 振动与冲击，2017，36(4)：28-31.
ZHANG Yun, HU Zhenbang, MEI Xuesong. An identification method of distributed imbalance without trial weights for high speed rotors[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(4): 28-31.

[20] GARPELLI L N, ALVES D S, CAVALCA K L, et al. Physics-guided neural networks applied in rotor unbalance problems[J]. Structural Health Monitoring, 2023, 22(6): 4117-4130.

[21] 徐园平. 柔性转子磁悬浮轴承支承特性辨识 [D]. 南京：南京航空航天大学，2018.
XU Yuanping. Identification of supporting characteristics of flexible rotor AMBs system[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2018.

[22] ZHANG Y, XU Y P, ZHOU J, et al. Vibration control of AMB-rotor system under base motions based on disturbance observer[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2025, PP(99): 1-10.

[23] JIN C W, CAO Y Q, ZHOU H, et al. Research on composite hierarchical anti-disturbance strategy for magnetic bearing rotor using H_∞ and observer[J]. Journal of Vibration and Control, 2024, 30(23-24): 5603-5613.

[24] JIN C W, HONG Z D, CUI G, et al. Adaptive Smith predictive active disturbance rejection control of magnetic suspended rotor system considering time delay[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2025, 72(9): 9645-9655.

[25] 王军. 磁悬浮轴承功率放大器建模及其软开关技术研究 [D]. 南京：南京航空航天大学，2010.
WANG Jun. Research on modeling and soft switching technology of switching power amplifier for magnetic bearing[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010.

[26] American Petroleum Institute. Axial and centrifugal compressors and expander-compressors: API STANDARD 617[S]. Washington, D. C.: API Publishing Services, 2022.

[27] 高锦辉. 五自由度主动式磁悬浮轴承设计及优化 [D]. 杭州：浙江大学，2024.
GAO Jinhui. Design and optimization of 5-DOF active magnetic bearings[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2024.

[28] Mechanical vibration-Rotor balancing-Part 12: procedures and tolerances for rotors with flexible behaviour: ISO 21940-12: 2016(E)[S]. Switzerland: ISO Copyright Office, 2016.

第一作者：张仁坤(2001—)，男，博士研究生。
E-mail: mlvczrk@nuaa.edu.cn

通信作者：徐园平(1989—)，男，博士，副教授。
E-mail: ypxu@nuaa.edu.cn

具有粒子群-禁忌搜索算法的高速磁浮悬浮系统加速度反馈控制

徐俊起[1]，易芷涵[1,2]，陈 琛[1]，韩沛辰[1,2]

（1. 同济大学国家磁浮交通工程技术研究中心，上海 201804；2. 同济大学交通学院，上海 201804）

摘要：为了提高磁浮列车在高速运行时的稳定性与平稳性，研究了悬浮系统在扰动工况下的主动控制问题。基于单电磁铁悬浮最小单元，以电流为输入建立控制模型，结合仿真说明了 PID 控制在随机扰动下的局限性；设计了直接加速度反馈控制并进行初步试验与结果分析，对比分析了其对于扰动抑制的作用；针对试验中出现的参数不匹配问题设计了粒子群-禁忌搜索算法对控制参数在多目标下自动寻优，构造 Simulink 控制模型并在多种扰动工况下进行仿真，在单点悬浮试验台进行了验证；针对理论系统与实际系统可能存在的偏差，通过设计组合滤波器实现了特定频段的加速度反馈，使控制系统在全频段中兼具 PID 控制与 PDA 控制的特性。仿真结果表明：算法使悬浮系统具有稳定性的同时，减小了加速度波动，能够提高长期运行安全性，具有一定的工程应用可行性。

关键词：磁浮列车；加速度反馈；粒子群优化；禁忌搜索

中图分类号：TH212；U237 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508045

Acceleration feedback control of high-speed maglev suspension system with PSO-TS algorithm

XU Junqi[1], YI Zhihan[1,2], CHEN Chen[1], HAN Peichen[1,2]

（1.National Maglev Transportation Engineering R&D Center，Tongji University，Shanghai 201804，China；
2.College of Transportation，Tongji University，Shanghai 201804，China）

Abstract: To enhance the stability and ride comfort of maglev trains during high-speed operation，this study investigates active control strategies for suspension systems under disturbance conditions. A current-input control model is established based on a single electromagnet suspension unit，and simulations reveal the limitations of PID control under random disturbances. Direct acceleration feedback control is designed，with theoretical analysis comparing its disturbance suppression capabilities. Experimental validation and results analysis are conducted. To address parameter mismatch observed in experiments，a particle swarm optimization-tabu search (PSO-TS) algorithm is designed for multi-objective automatic optimization of control parameters. A Simulink control model is constructed for simulations under various disturbance scenarios. To bridge potential deviations between theoretical and practical systems，a combined filter is implemented to achieve acceleration feedback in specific frequency bands. This enables the control system to integrate the advantages of both PID and PDA control across the full frequency spectrum. Simulation results demonstrate that the proposed method improves the stability of the suspension system under disturbances，reduces acceleration fluctuations, thereby enhancing long-term operational safety，and exhibits potential for engineering implementation.

Keywords: maglev train; acceleration feedback; particle swarm optimization; tabu search

高速磁浮列车通过电磁悬浮与直线电机驱动实现无接触运行，兼具高速、强爬坡和低维护优势，可填补高铁与航空运输间的速度空白[1]。伴随着 2021 年 600 km/h 高速磁浮交通系统的下线，中国高速磁浮交通的研究步入了新的阶段。作为车辆核心子系统，悬浮系统的控制性能直接关乎列车安全，尤其在高速运行条件下，气动与轨道等因素的激扰对其稳定性提出更高要求，亟需优化磁力控制策略以支撑工程化应用。

磁悬浮控制系统本质上是一个非线性、开环不稳定的复杂系统，其控制策略的研究经历了从传统方法到智能算法的演进过程。目前工程中应用最为

收稿日期：2025-08-14；**修订日期：**2025-09-30

基金项目：国家自然科学基金重点项目 (52232013)；国家重点研发计划资助项目 (2023YFB4302500-02)

成熟的仍是 PID 控制器，其因结构简单、调节方便而被广泛采用[2]。然而，PID 控制在面对磁悬浮系统的高度非线性和参数不确定性时表现出明显不足，特别是在速度提高后，基于平衡点线性化设计的 PID 控制器难以保证全局稳定性。为解决这一问题，非线性控制方法，如反馈线性化、滑模控制 (SMC) 等被引入磁悬浮系统，其中滑模控制因其对参数变化和外部扰动的不敏感性而受到关注[3-5]。然而，滑模控制固有的抖振问题会影响控制精度并加剧执行器磨损。线性自抗扰控制 (LADRC) 是另一种有前景的方法，它通过扩张状态观测器估计并补偿系统总扰动，但在磁悬浮球试验中仍存在超调量大和抗干扰能力不足的问题[6]。为了弥补传统控制算法不具备自适应能力的缺陷，不少学者开始研究智能控制策略，如模糊控制、神经网络、遗传算法等方法，实现控制器的自适应调节。董达善等[7]构造了模糊-PID 自整定控制器，但其控制规则的设计依赖专家经验。CHEN 等[8]采用 Hopfield 神经网络对悬浮系统非线性项进行参数辨识，并结合径向基函数设计控制律，提高了控制精度。宋一锋等[9]采用粒子群算法对悬浮设备关键参数进行辨识，其辨识结果较最小二乘法更贴近真实间隙序列。苗欣等[10]采用粒子群优化算法（PSO）对悬浮控制参数进行了离线优化，优化后的系统在带宽和阻尼等参数方面表现良好。然而，这种方法没有考虑实际工程中悬浮系统常见的干扰因素对悬浮过程的影响。

高速运行条件下，磁浮列车受到的气动扰动、轨道不平顺等外部干扰显著增强。加速度信号作为系统合外力的直接反映对于控制系统的设计有重要意义。现有的悬浮控制算法研究多基于位置与速度反馈，虽然将加速度直接引入反馈的文献也有不少，但大多应用于振动抑制[11-12]；在抗扰能力方面，张锟等[13]考虑加速度计输出信号的分析，设计了一种统一的反馈控制器使得悬浮控制系统在不同轨道段上输入-输出特性保持一致，从而消除了列车进/出竖曲线时的冲击。李奇南等[14]分析了加速度反馈对钢板刚度的改善作用。但这些研究都缺乏对加速度反馈项作用的详细分析与试验验证，虽然数年前就已有加速度反馈相关的研究，但至今未成功将其应用到国内自研的中低速磁浮交通系统中。

针对上述问题，本文分析了加速度反馈项的具体作用，通过单点悬浮试验现象对以往加速度反馈试验失败的可能原因进行分析，并提出了相应的解决方法。引入粒子群-禁忌搜索算法进行多目标下的控制参数自动寻优，最终得到能够兼顾抗外力扰动与间隙扰动、兼具稳定性与平稳性的优化算法。并为加速度反馈回路设计组合滤波器，得到的控制器具有良好的稳定性与抗干扰能力。

1 高速磁浮悬浮系统数学模型

1.1 建模分析

磁浮列车悬浮系统是多磁铁结构，每个模块的运动有纵向、侧移、升降及偏航、俯仰、滚动 6 个自由度。本文讨论解耦后的单电磁铁悬浮控制问题。如图 1 为单电磁铁-导轨悬浮系统结构图，其中$z(t)$为电磁铁绝对位置，$h(t)$为轨道距离参考面的位置，可看作轨道不平顺，$c(t)$为电磁铁与轨道间的气隙，$u(t)$为电磁铁两端电压，f_{d}为外力扰动的垂向分力。

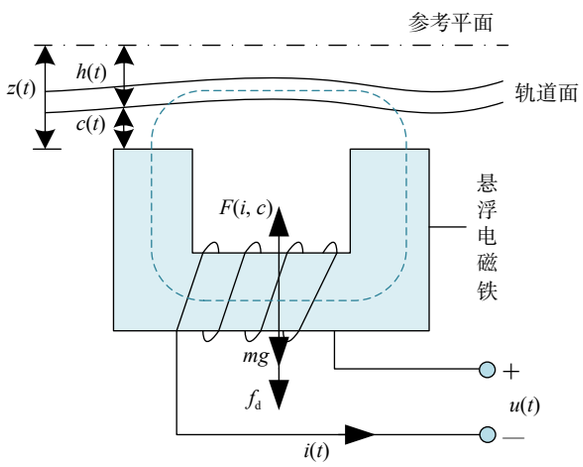


图 1 悬浮系统结构图

Fig. 1 Structure diagram of the levitation system

假设铁磁材料的磁导率无穷大使磁势均匀降落在气隙上，并忽略绕组漏磁通，可以得到电磁铁动力学方程组：

$$\begin{cases} F(i,c)=\dfrac{\mu_0 NA^2}{4}\left(\dfrac{i(t)}{c(t)}\right)^2 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2}=mg-F(i,c)+f_{\mathrm{d}} \\ z(t)=h(t)+c(t) \end{cases} \tag{1}$$

式中，m 为电磁铁质量；$i(t)$ 为控制电流；A 为单电磁铁磁极面积；N 为线圈匝数；μ_0 为真空磁导率；$F(i,c)$为垂向悬浮力；$\ddot{z}(t)$为电磁铁真实加速度。

由式 (1) 可知控制电流与电磁力具有二阶耦合关系，电磁悬浮系统具有较强的非线性。高速磁浮悬浮系统参数如表 1 所示。将式 (1) 在平衡点(i_0,c_0)附近线性化后经拉普拉斯变换可以得到以电流为输入时系统的传递函数：

$$G(s)=\frac{-k_{\mathrm{i}}}{ms^2-k_{\mathrm{c}}} \tag{2}$$

其中，$k_{\mathrm{c}}=\dfrac{\mu_0 N^2 A i_0^2}{2c_0^3}$，$k_{\mathrm{i}}=\dfrac{\mu_0 N^2 A i_0}{2c_0^2}$。

根据劳斯-霍尔维茨稳定性定理，系统稳定必要条件为：$a_n>0, a_{n-1}>0, \cdots, a_0>0$，根据上述的系统传递函数，$a_0=-k_{\mathrm{c}}<0$，由此可知，单点悬浮系统开环不稳定，必须对系统施加主动的反馈控制。

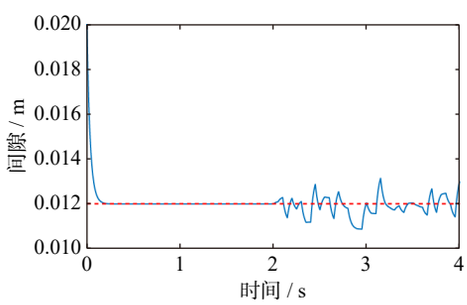
表 1　悬浮系统模型参数

Tab. 1　Parameters of suspension system model

参数	数值
m/kg	300
N	270
A/m^2	0.115
μ_0	$4\pi\times10^{-7}$
g/(m·s^{-2})	9.81
c_0/m	0.012
i_0/A	31

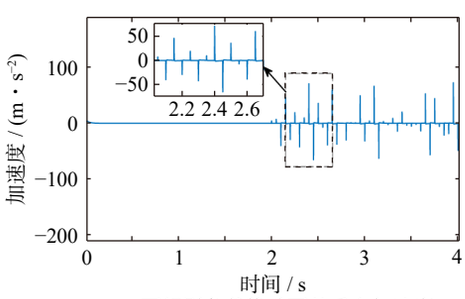
1.2　PID 控制局限性

近年来快速发展的中低速磁浮多采用 PID 控制，使用极点配置法确定控制参数 $K_P=11000, K_D=300, K_I=300$。在该参数下悬浮系统能够在 0.2 s 左右稳定悬浮在 12 mm。车辆运行时容易受到各种随机扰动的影响，例如车内乘客移动或货物偏载、轨道不平顺，高速运行条件下还更易受到气动载荷影响。如图 2 所示，对系统施加随机负载扰动，间隙的波动在 1.7 mm 以内，该 PID 控制器具有一定的抗干扰能力。但是加速度与电流的波动比较大，长此以往可能导致交变应力加剧而造成机械部件疲劳损伤。尤其是高速运行条件下，控制器响应速度可能跟不上高频扰动，导致波动累积（如相位滞后），引发系统失稳。



(a) 不规则负载扰动下的悬浮间隙

(a) Suspension gap under irregular load disturbances



(b) 不规则负载扰动下的垂向加速度

(b) Vertical acceleration under irregular load disturbances

图 2　PID 控制的仿真结果

Fig. 2　Simulation results based on PID control

2　加速度反馈控制

2.1　算法设计

加速度信号是电磁铁受到合外力的直接反映，它具有相比速度、间隙信号更超前的相位，当电磁铁受到扰动时，所受合外力瞬时发生变化，直接加速度反馈可以使控制器迅速产生一个电流补偿量从而抑制干扰对电磁铁的影响。接下来进行理论说明，分别建立采用 PD 控制律和引入了加速度反馈的 PDA 控制系统模型，两种方法下的系统特征方程分别为：

无加速度反馈：

$$p_1(s)=s^2+\frac{k_iK_D}{m}s+\frac{K_Pk_i-k_c}{m}=0 \tag{3}$$

有加速度反馈：

$$p_2(s)=s^2+\frac{k_ik_d}{m+k_ik_a}s+\frac{k_pk_i-k_c}{m+k_ik_a}=0 \tag{4}$$

可以得到两种控制系统的固有频率和阻尼比分别为：

无加速度反馈：

$$\omega_{n1}=\sqrt{\frac{-k_c+k_iK_P}{m}},\xi_1=\frac{k_iK_D}{2\sqrt{m(k_iK_P-k_c)}} \tag{5}$$

有加速度反馈：

$$\omega_{n2}=\sqrt{\frac{-k_c+k_ik_p}{m+k_ik_a}},\xi_2=\frac{k_ik_d}{2\sqrt{(m+k_ik_a)\left(k_ik_p-k_c\right)}} \tag{6}$$

式中，K_P、K_D、k_p、k_c、k_a分别为反馈量相应的控制参数。

使得系统动态性能指标满足：

（1）输出超调量 $M_p\leqslant5\%$；

（2）调节时间 $t_s\leqslant0.25$ s。

可以解得 $\xi\geqslant0.69,\omega_n\geqslant23.2$。再结合劳斯稳定判据即可得到反馈参数的范围。为了比较分析加速度反馈对外界扰动的作用，控制变量使两种控制系统具有相同的时域性能指标，即 $\omega_{n1}=\omega_{n2}=\omega_n,\xi_1=\xi_2=\xi$，并取：$\xi$=0.707，$\omega_n$=45。

对有、无加速度反馈控制的系统分别建立干扰力 f_d输入-间隙偏差 Δc输出的闭环传递函数：

无加速度反馈：

$$G_{d1}(s)=\frac{\Delta c}{f_d}=\frac{1}{ms^2+k_iK_Ds+(k_iK_P-k_c)} \tag{7}$$

有加速度反馈：

$$G_{d2}(s)=\frac{\Delta c}{f_d}=\frac{1}{(m+k_ak_i)s^2+k_ik_ds+\left(k_ik_p-k_c\right)} \tag{8}$$

基于上述 2 个传递函数从以下 3 个方面说明加速度反馈的作用：

（1）悬浮刚度

悬浮刚度定义了列车每单位载荷的改变引起的气隙的变化，即 $k_s=\Delta c/f_d=1/G_d(s)$，对于静刚度而言，即 $s=j\omega=0$时，原系统 $k_{s1}=k_iK_P-k_c=m\omega_n^2$，含加速度反馈的系统 $k_{s2}=k_ik_p-k_c=(m+k_ak_i)\omega_n^2$，在 ω_n相同时，含加速度反馈的系统静刚度更大，也就是说在恒定扰动力下气隙变化量更小；静刚度增大的同时，动刚度也得到改善，尤其是高频时，影响刚度的主要

是惯性项。由此可见加速度反馈使系统对载重变化、轨道不平顺等外部扰动的抵抗能力提升。

(2) 频率特性

根据干扰力输入-间隙输出传递函数可分析系统频率响应特性。传递函数幅值$|G_d(j\omega)|$表征干扰力f_d到间隙输出Δc的增益。两种系统频率响应幅值特性如下式所示:

$$|G_{d1}(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{m^2\omega^4+(k_iK_D)^2\omega^2+(k_iK_P-k_c)^2}} \tag{9}$$

$$|G_{d2}(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(m+k_ak_i)^2\omega^4+(k_ik_d)^2\omega^2+\left(k_ik_p-k_c\right)^2}} \tag{10}$$

加入加速度反馈的关键变化在于质量项m被等效放大为$m+k_ak_i$,直接修改系统惯性特性,等效增加虚拟质量k_ak_i。在前文选取的参数下作出两系统的闭环频率响应特性曲线如图 3 所示,可以看出两种系统对于干扰力均有抑制效果,并且在相位一致的前提下,包含加速度反馈的 PDA 控制系统在全频段斜率不变、幅值衰减,表现出更强的干扰抑制作用。

(3) 瞬时响应

瞬时响应分析聚焦于扰动信号的初始阶段。假设有冲击扰动f_d为脉冲函数$\delta(t)$, $f_d(s)=L(\delta(t))=1$。

$$\Delta c(s)=f_d(s)G_d(s) \tag{11}$$

无加速度反馈时$\Delta\ddot{c}(0)=\lim\limits_{s\to\infty}s^2\Delta c(s)=1/m$;有加速度反馈时$\Delta\ddot{c}(0)=\lim\limits_{s\to\infty}s^2\Delta c(s)=1/m+k_ak_i<1/m$。有加速度反馈时,等效于给受扰系统施加一个反向的

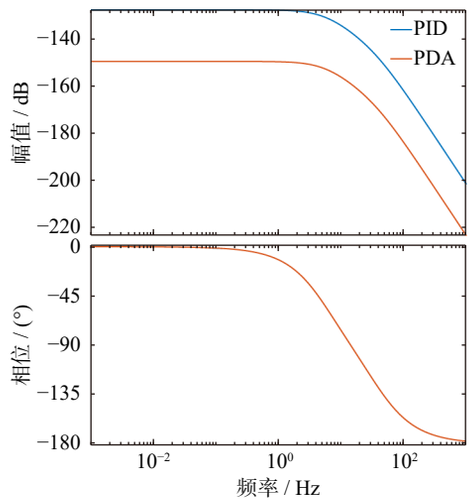


图 3 干扰作用下系统频率响应对比

Fig. 3 Comparison of system frequency response under disturbance

补偿力,使其面对冲击的瞬时加速度更小,对冲击的敏感度降低,不容易出现过度的振动或位移。初始加速度被抑制,能够保护机械结构免受过载。

综上所述,合理设计加速度反馈增益k_a,不仅能够提高抗扰能力,降低冲击响应,还能通过优化阻尼比缩短调节时间,使系统更快回到稳定状态。

2.2 试验分析

为验证加速度反馈的作用,在如图 4 所示的单点试验台进行试验。使用 PID 稳定悬浮后加入加速度反馈,发现电磁铁尚且能够悬浮,但是即使加速度

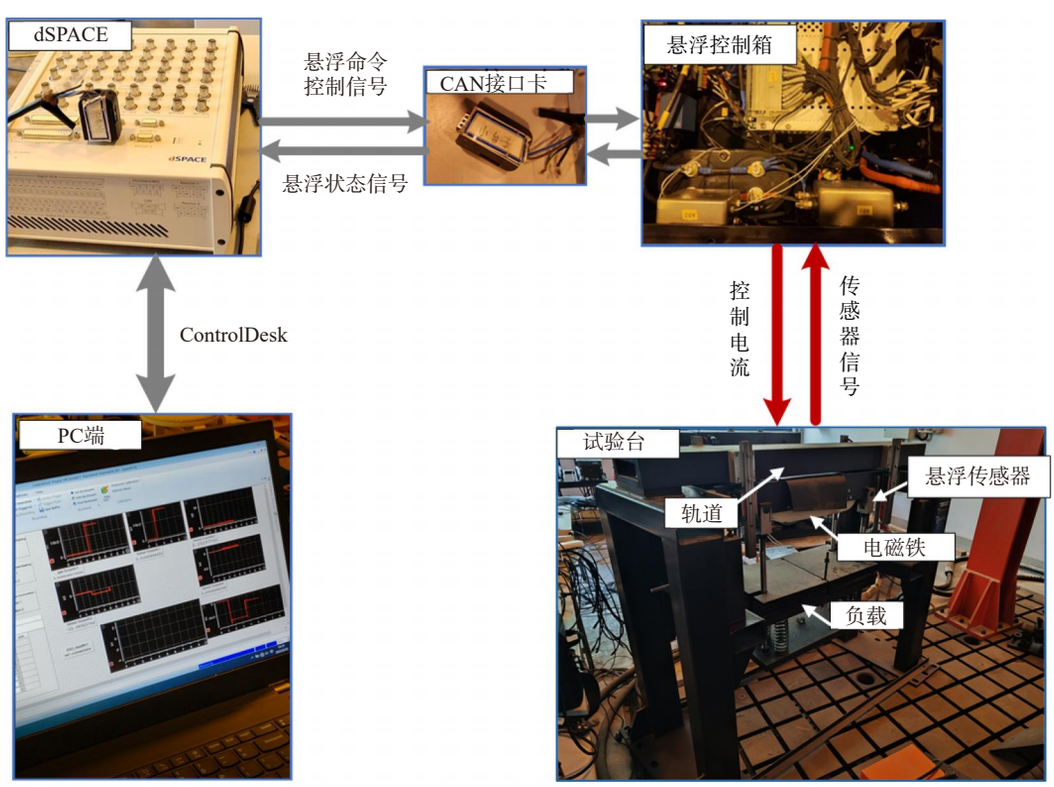


图 4 单点悬浮试验台试验

Fig. 4 Experiment in single-point suspension test bench

反馈增益设置得比较小仍然难以达到稳定，如图 5 所示，加入加速度反馈后系统对加速度小尖峰（传感器噪声等）更加敏感，尤其是加速度反馈增益稍微增大就容易使系统振荡而导致失稳。只有把k_a进一步减小才能提高稳定性，但是这样无法发挥扰动抑制作用，失去了加速度反馈的意义。

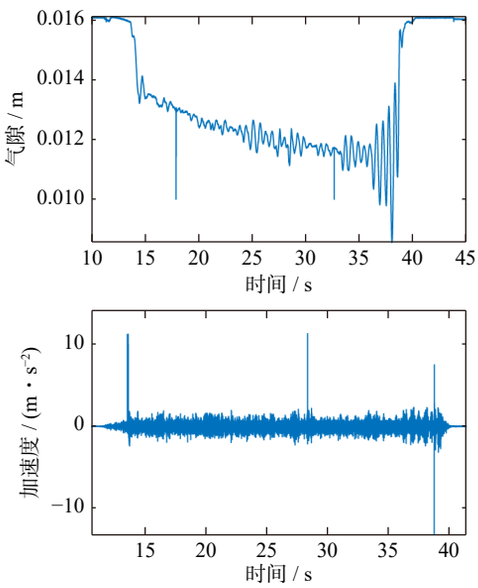


图 5　直接加速度反馈试验结果

Fig. 5　Direct acceleration feedback experimental results

通过分析总结出造成这一试验现象的两个可能原因：

（1）参数不匹配

在原本能够使系统稳定悬浮的 PID 控制系统中直接加入加速度反馈可能破坏原有系统的稳定裕度，通过图 6 频率特性图可以看到加入加速度反馈仅对高频干扰更有效，对低频干扰无额外效果，反而引入相位滞后，加速度反馈增益稍高就容易造成系统不稳定。控制回路的各反馈参数是相互耦合影响

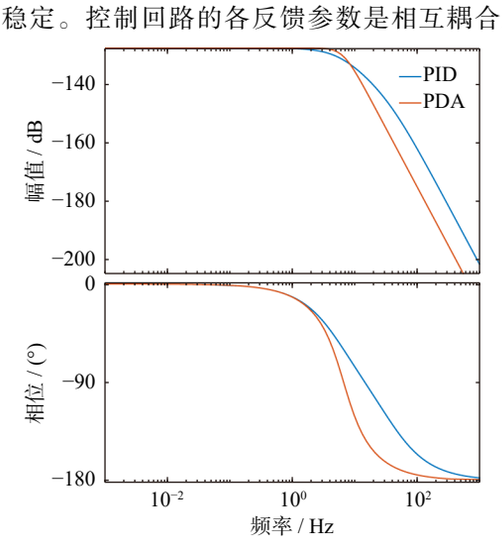


图 6　未经参数匹配的控制系统频率特性

Fig. 6　Frequency characteristics of a control system without parameter matching

的，加速度反馈增益k_a与速度反馈增益k_d、位移反馈增益k_p共同影响阻尼比ξ，若比例失调会导致极点右移，破坏稳定性。

（2）实际系统与仿真系统存在偏差

理论分析表明加入加速度反馈后系统高频增益更大，理论上应能更及时地抑制高频扰动。但是高频敏感是一把双刃剑，在实际系统中传感器噪声、机械谐振、电磁干扰等无用高频信号会被一同放大，使电磁线圈输出高频振荡力，激励机械系统的谐振模态引发不稳定。如图 7 所示，对试验加速度信号频谱分析发现，加入加速度反馈后放大了低频段振动，尤其是 50 Hz 左右与 110 Hz 左右频率处的幅值。再者，电流环带宽有限，采用直接加速度反馈控制若引入过高频率成分，执行器将无法及时响应，反而导致相位滞后或系统振荡。

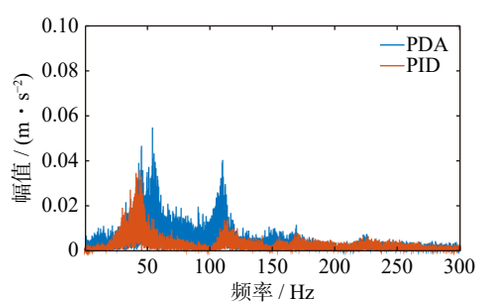


图 7　试验结果频谱分析

Fig. 7　Spectral analysis of experimental results

3　改进粒子群-禁忌搜索算法

3.1　PSO

针对前文试验现象反映的问题，为了使系统加入加速度反馈后能够稳定悬浮并发挥出加速度反馈的扰动抑制效果，首先需要进行控制系统参数匹配。考虑到手动调参的不便性，使用粒子群优化（particle swarm optimization, PSO）算法对 3 个控制参数在所需条件下整体进行自动寻优。

粒子群优化算法是一种模拟鸟群觅食的生物优化算法，通过自身经验与群体合作来寻求最优解。该算法在每次迭代过程中第k个粒子速度和位置更新方式为：

$$V(i+1)=w(i)V(i)+c_1(i)r_1(P_1(i)-X(i))+c_2(i)r_2(P_2(i)-X(i)) \quad (12)$$

$$X(i+1)=X(i)+V(i+1) \quad (13)$$

式中，i为迭代次数；$V(i)$为第k个粒子在第i次迭代中的速度；$X(i)$为第k个粒子在第i次迭代中的位置；$w(i)$为惯性权重；$c_1(i)$为个体学习因子；$c_2(i)$为种群学习因子；r_1、r_2为 0~1 内的随机数；$P_1(i)$为第k个粒

子截止到第i次迭代的个体历史最优解；$P_2(i)$为粒子群的种族全局最优解。

惯性权重$w(i)$控制着粒子当前速度对下一时刻速度的影响程度，此处模仿自然优化过程中“先粗后细”准则：前期使粒子保持较高的惯性速度，后期降低粒子的惯性。

$$w(i)=0.9-0.5\frac{i}{T} \tag{14}$$

学习因子体现出了粒子对自身及其种族的反思学习能力，此处使个体学习因子$c_1(i)$先大后小，种群学习因子$c_2(i)$先小后大，使前期扩大搜索范围，后期向全局最优靠拢。

$$c_1(i)=2.5-2\frac{i}{T},c_2(i)=0.5+2\frac{i}{T} \tag{15}$$

式中，T为最大迭代次数。粒子群的迭代更新依据为适应度函数，也就是悬浮控制系统优化的目标函数。为了兼顾干扰下电磁铁悬浮间隙与垂向加速度波动的抑制，本文构建多目标加权综合评价函数：

$$J=0.4ITAE+0.3Overshoot+0.2RMS_{\mathrm{acc}}+0.1a_{\max} \tag{16}$$

其中，各变量的含义如下：

$$ITAE=\int_0^t t|e|\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

$$Overshoot=\max(|e-e_{\mathrm{end}}|) \tag{18}$$

$$RMS_{\mathrm{acc}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{n}} \tag{19}$$

$$a_{\max}=\max(|a_i|) \tag{20}$$

式中，t为系统运行时间；e为悬浮间隙与平衡点间隙的偏差；e_{end}为系统运行最终时的间隙偏差；a_i为第i个采样点处的电磁铁垂向加速度；n为总采样点数；$a_{\max}$为所有加速度值中的最大值。

积分时间绝对误差$ITAE$反映系统对长期稳态精度的核心需求，通过时间加权机制有效抑制长期偏差；使用超调量$Overshoot$约束动态调节过程，避免因过大的瞬态响应导致车轨接触影响安全；加速度均方根RMS_{acc}约束系统振动能量，以提高系统平稳性、降低设备疲劳损伤风险；$a_{\max}$用于抑制受到冲击时的瞬时最大加速度，提高安全可靠性。各部分按重要程度加权得到该目标函数，旨在实现悬浮系统保证稳态精度与动态稳定性的同时，优化系统可靠性与平稳性，以提高系统抗扰能力。

3.2 粒子群-禁忌搜索算法

粒子群算法中当某个粒子获得理想位置时，其余粒子会迅速向该粒子聚集，无法在解空间内重新搜索。虽然收敛快但是很有可能收敛到局部最优[15-16]。为提高种群搜索的多样性，避免“早熟”，引入禁忌搜索（tabu search, TS）的思想。禁忌搜索的核心是通过引入禁忌表使粒子主动跳出局部最优的舒适圈。TS算法包含禁忌对象、禁忌长度、邻域解、候选集、特赦准则等概念。TS算法伪代码如表2所示。

表2 禁忌搜索算法伪代码

Tab. 2 Tabu search algorithm pseudocode

禁忌搜索(TS)算法

输入：

初始解x_{init}, 目标函数$f(x)$,
参数范围$[lb,ub]$, 最大迭代次数$i_{\max}$,
禁忌步长t, 邻域大小N

输出：

全局最优解x_{best}, 最优适应度f_{best}

```
//初始化
当前解x←x_init
全局最优解x_best←x, 最优适应度f_best←f(x)
禁忌表T置空
//禁忌搜索主循环
for迭代次数i=1→i_max do
  //生成邻域解
  for 粒子变量元素idx=1:3 do
    for k = 1:N do
      x(idx) = x(idx)+delta //添加随机扰动
      x(idx) = max(min(x(idx), ub(idx)), lb(idx))
      计算适应度f(x)
      进入候选集x_cand←x
    end for
  end for
  //更新当前解
  选择候选集中的最优解f_cand
  if f_cand<f_best //满足特赦准则
    更新全局最优x_best←x_cand, f_best←f_cand
    成为当前解x←x_cand
  else
    在非禁忌表中选择最优解并成为当前解
  end
  //更新禁忌表
  将当前解的变量存入禁忌表中
  禁忌表其余变量步长衰减t←t−1
  移除t=0的变量
end for
return x_best, f_best
```

从以上内容可以看出，禁忌搜索算法生成新解的方式并非在当前解邻域内随机产生，而是从非禁忌候选解中选取最优解。并且在搜索过程中允许接受一定程度的劣解，这一特性使其与始终保持进化趋势的粒子群优化算法不同，TS算法这种既包含“进化”又允许“退化”的独特搜索机制，增强了算法逃离局部最优的能力，从而提高了获得高质量解的几率。将PSO与TS算法结合，先通过PSO在多目标

适应度函数下寻找到较好解, 在其后期收敛后引入禁忌搜索, 使其能够跳出局部最优在全局搜索更优解。

将混合算法用于悬浮控制系统参数匹配的主要步骤如图 8 所示。

a. 种群初始化, 随机生成粒子各变量 (k_p,k_d,k_a), 得到初始全局最优粒子;

b. PSO 算法阶段。根据式 (12)~(15) 更新粒子速度与位置, 并根据式 (16)~(20) 计算粒子适应度, 得到个体最优与全局最优;

c. 当 PSO 算法达到设定最小误差判断为收敛, 进入纯 TS 阶段, 将 PSO 搜索到的全局最优解作为 TS 的初始解, 根据表 2 步骤进行精细搜索;

d. 达到迭代次数后结束, 输出全局最优解。

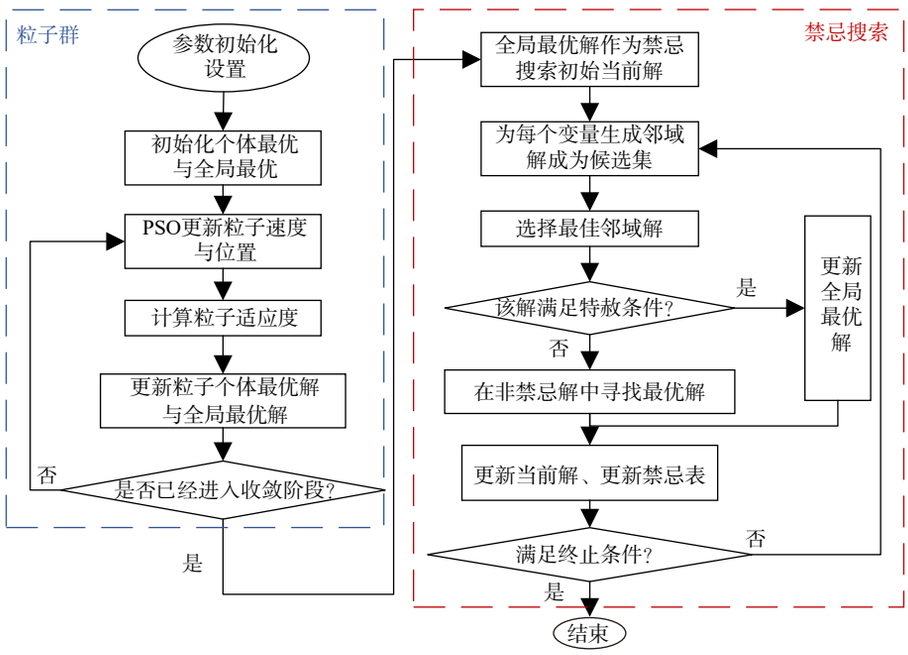


图 8　PSO-TS 算法流程图

Fig. 8　Flowchart of PSO-TS algorithm

3.3　多工况仿真分析

根据控制结构可知, 加速度反馈对于外力扰动的抑制效果非常显著, 面对间隙扰动时, 由于受到扰动的瞬间不仅加速度瞬时变化, 检测到的间隙也瞬时变化, 加速度反馈的效果并不直接。为了兼顾外力扰动与间隙扰动的响应, 此处迭代基于施加 6.7 Hz 间隙扰动条件进行, 6.7 Hz 是 600 km/h 下与轨道梁长度相关的特征频率。

设粒子数为 30, 迭代次数为 40。经过前期大致试验确定参数搜索范围,k_p的取值范围为 [3000, 40000], k_d的取值范围为 [400,2000], k_a的取值范围为 [1,7]。在禁忌搜索中设置禁忌步长为 3, 每个变量生成领域解数量为 10。在反馈环节的作用下, 单电磁铁悬浮系统从 20 mm 起浮至 12 mm。粒子群优化通过适应度函数来对悬浮过程进行评价, 完成对控制参数的寻优。适应度函数越小值越小, 越能达到优化目标。图 9 为适应度函数的迭代曲线。

从最优适应度进化曲线可知, 传统的 PSO 算法在快速迭代约 12 次以后最优适应度就不再有明显变化, 在迭代 22 次时就已收敛至 0.909。使用禁忌搜索改进的 PSO 原本在迭代到 23 次时已收敛至 0.9116, 后触发禁忌搜索, 扩大搜寻范围精细搜索, 直到迭代到 37 次时收敛到 0.9072, 找到更好的全局最优解。此时得到$k_p = 23800, k_d = 500, k_a = 5.2$。

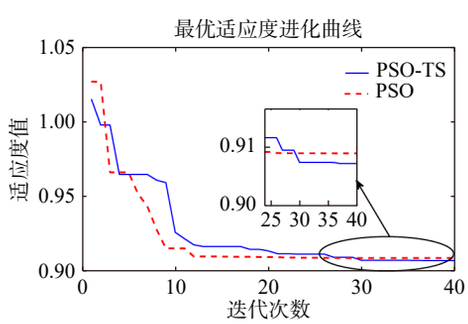


图 9　最优适应度进化过程对比

Fig. 9　Comparison of optimal fitness evolution processes

将寻优得到的全局最优参数加入单点悬浮控制系统中进行对比, 验证新参数下加速度反馈控制的优越性。利用 MATLAB 软件搭建悬浮系统仿真模型, 所有仿真试验均通过 Simulink 平台完成。首先进行静浮试验, 新参数下悬浮系统能够稳定悬浮, 响应过程略有超调, 但超调量小于 2.5%, 满足设计要求。系统稳定后在 2 s 处施加干扰, 与 PID 控制对比

观察扰动抑制效果。

(1)施加 5 kN 阶跃干扰力模拟乘客上下车

在此工况下间隙波动减小 0.3 mm, 新算法相比于 PID 降低了 60%, 施加干扰的瞬间新算法的加速度波动减小 88%, 如图 10 所示。

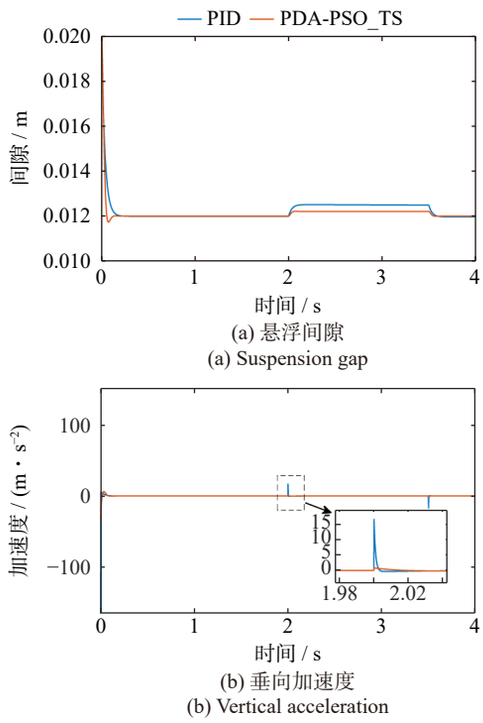


图 10 阶跃干扰下的悬浮控制结果

Fig. 10 Suspension control results under step disturbances

(2)施加随机干扰力模拟高速运行下的风载

在此工况下 PID 控制间隙波动, PID 波动范围为−0.8~0.79 mm, 新算法间隙波动为−0.32~0.44 mm, 波动量减小 52.2%, 加速度波动也大幅减小, 如图 11 所示。

(3)施加 6.7 Hz、幅值 2 mm 间隙扰动, 模拟高速磁浮 600 km/h 运行时与轨道梁长度相关的轨道不平顺。

在此工况下间隙波动减小 0.2 mm, 新算法相比于 PID 降低了 16.5%, 施加干扰的瞬间加速度波动减小 86.4%, 如图 12 所示。

(4)施加 54 Hz、幅值 1 mm 间隙扰动, 模拟高速磁浮 600 km/h 运行时与功能件周期相关的轨道不平顺。

在此高频干扰工况下两种控制系统都具有不错的高频抑制效果, 绝对位置波动都小于±0.1 mm, 具有加速度反馈的系统更加平稳, 位置波动相比 PID 减小 88.9%, 持续的加速度波动幅值减小了 58.4%, 如图 13 所示。

(5)施加 1 Hz、幅值 2 mm 间隙方波扰动, 模拟过台阶。

此工况可以得知, 如图 14 所示, 具有直接加速

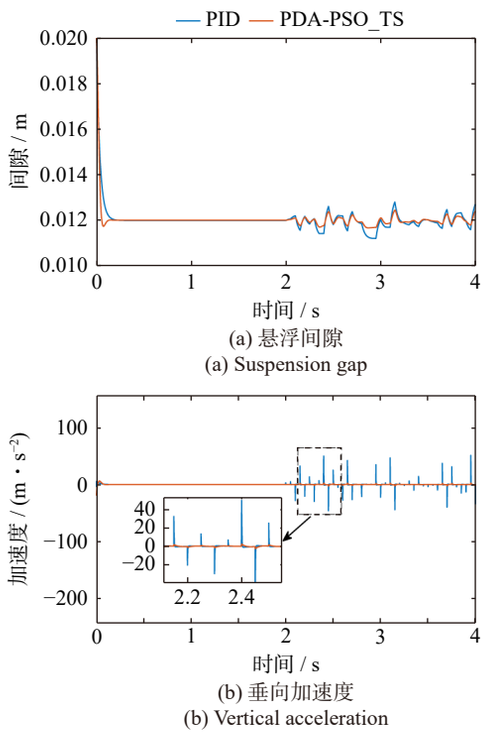


图 11 随机扰动下的悬浮控制结果

Fig. 11 Suspension control results under random disturbances

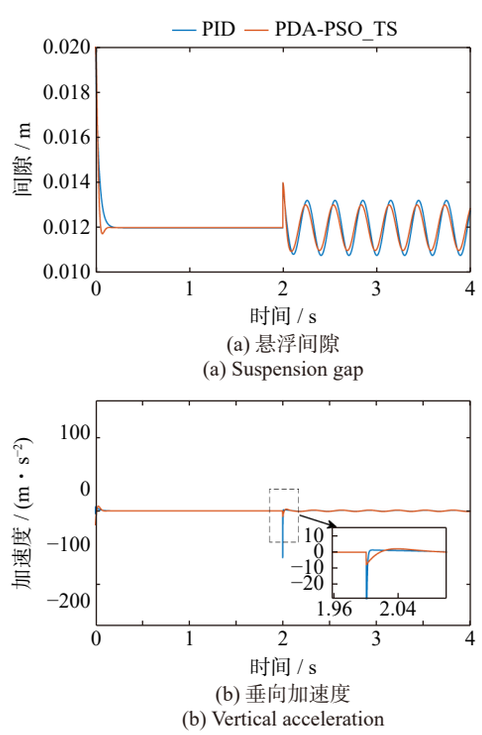


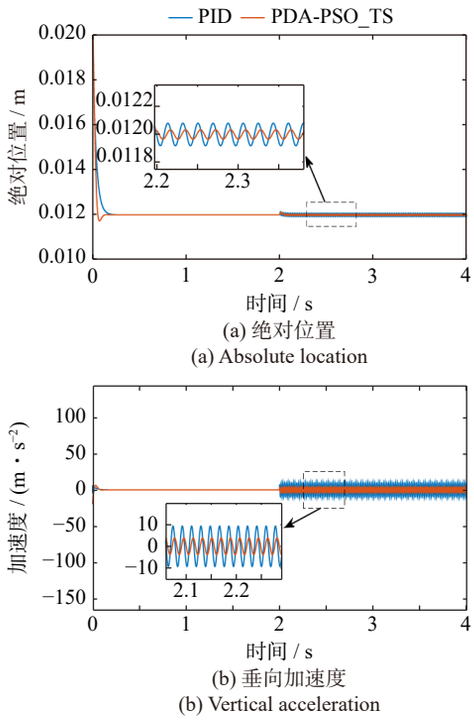
图 12 低频间隙干扰下的悬浮控制结果

Fig. 12 Suspension control results under low-frequency gap disturbances

度反馈的系统在遇到冲击时能更快恢复至平衡点, 相比于 PID 控制快 0.1 s。

对该参数下控制系统进行闭环频域响应分析, 观察全频段闭环系统间隙响应特性, 如图 15 所示。

根据控制系统闭环频率响应可以发现, 经过参数优化的直接加速度反馈系统相较于 PID 控制系统

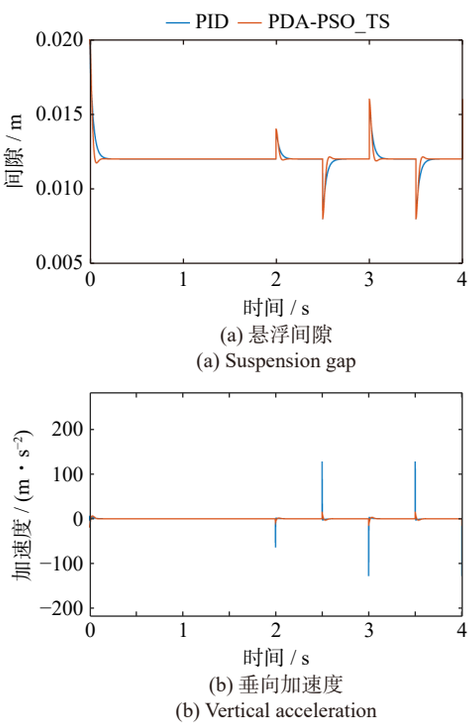


(a) 绝对位置
(a) Absolute location

(b) 垂向加速度
(b) Vertical acceleration

图 13　高频间隙干扰下的悬浮控制结果

Fig. 13　Suspension control results under high-frequency gap disturbances



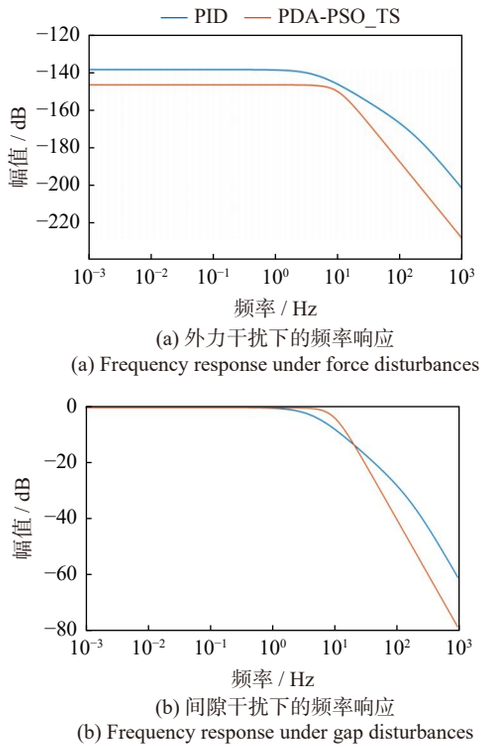
(a) 悬浮间隙
(a) Suspension gap

(b) 垂向加速度
(b) Vertical acceleration

图 14　方波间隙干扰下的悬浮控制结果

Fig. 14　Suspension control results under square wave gap disturbances

对于全频段的外力干扰均具有更好的抑制效果；对于间隙干扰 PDA 控制系统在高频段具有更好的抑制能力，而在低频段体现出更好的跟踪性，符合磁浮列车对于轨道不平顺“低频跟踪、高频抑制”的需求。



(a) 外力干扰下的频率响应
(a) Frequency response under force disturbances

(b) 间隙干扰下的频率响应
(b) Frequency response under gap disturbances

图 15　控制系统闭环频率响应对比

Fig. 15　Comparison of closed-loop frequency response of control system

3.4　试验验证

在单点悬浮试验台上对优化后的算法进行初步验证，经参数匹配后的具有直接加速度反馈的控制系统能够使电磁铁稳定悬浮。由于试验条件受限，为了验证该系统的抗扰能力，在电磁铁稳定悬浮后分别对 PID 控制和优化后 PDA 控制下的系统施加频率为 3、5、7 Hz，幅值为 2 A 的电流干扰模拟车辆运行过程中可能受到的扰动，悬浮控制结果如图 16 和 17 所示。

如图 16，PDA 控制相比于 PID 控制在相同扰动下间隙波动有所改善，尤其是在施加 5 Hz 扰动时，PID 控制系统电磁铁有发散趋势，经调整后无法收敛只能被迫降落，而 PDA 控制系统能够稳定悬浮。对间隙数据进行统计分析，可分别计算出不同频率扰动下，两种控制系统的间隙误差均方根、间隙标准差与最大误差绝对值，如表 3 所示，优化后的直接加速度反馈控制系统所有间隙稳定性数据较 PID 控制系统均减小，在扰动工况下更稳定。

在改善间隙波动的基础上，PDA 控制由于将加速度进行直接反馈，系统在不同扰动下的加速度波动也会有所减小，如图 17 所示。对试验数据进行统计分析，计算加速度均方根值、加速度标准差和最大加速度绝对值如表 4 所示，所有指标值相较于 PID 控制系统均减小，说明在扰动工况下平稳性更好。

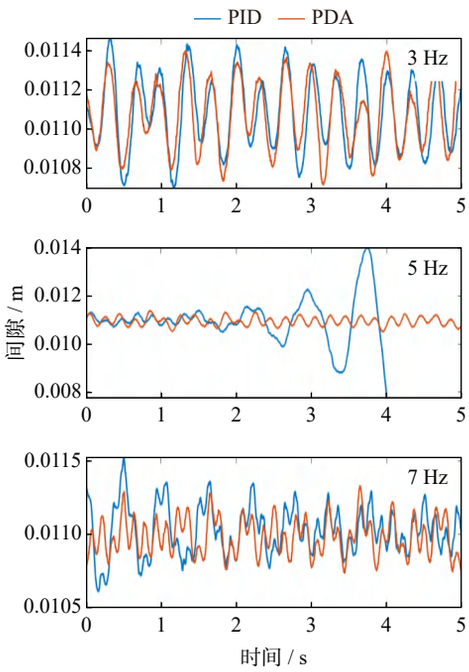


图 16 不同扰动下的悬浮间隙波动对比

Fig. 16 Comparison of suspension gap under different disturbances

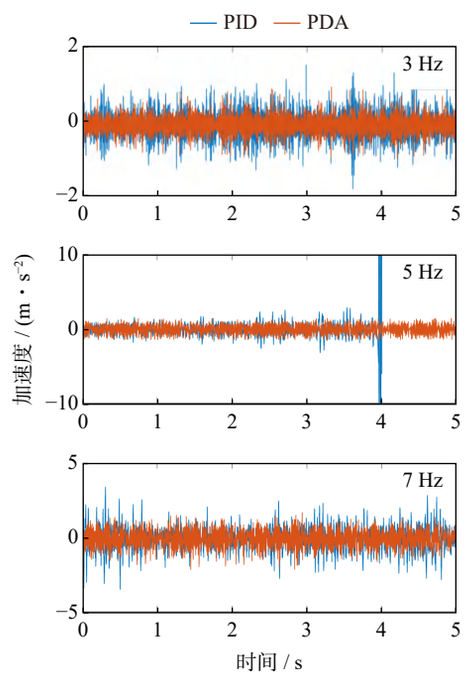


图 17 不同扰动下的垂向加速度对比

Fig. 17 Comparison of vertical acceleration under different disturbances

4 特定频段加速度反馈

4.1 理论分析

前文在进行加速度反馈试验时，发现系统对加速度信号小尖峰很敏感，这种因素在仿真时往往容易忽略。针对理论系统与实际系统存在的偏差，为防止加速度反馈项的引入放大系统噪声、激励机械系统的谐振模态引发额外不稳定，另外考虑到现有的 PID 控制对高频扰动已有较好的抑制效果，设计特定频段的加速度反馈使控制系统的加速度反馈只对某一中低频段的信号起作用，以达到 PID 控制与 PDA 控制优势互补。

表 3 不同扰动下的悬浮间隙试验数据（单位：mm）

Tab. 3 Experimental data of suspension gap under different disturbances(Unit:mm)

指标	扰动频率	PID控制	PDA控制
间隙误差均方根值	f=3 Hz	0.2033	0.1916
	f=5 Hz	0.9418	0.1879
	f=7 Hz	0.1692	0.1253
间隙标准差	f=3 Hz	0.1868	0.1758
	f=5 Hz	0.9417	0.1804
	f=7 Hz	0.1664	0.1246
最大间隙误差绝对值	f=3 Hz	0.4649	0.4307
	f=5 Hz	3.2852	0.4871
	f=7 Hz	0.5283	0.3355

表 4 不同扰动下的垂向加速度试验数据（单位：m/s²）

Tab. 4 Experimental data of vertical acceleration under different disturbances(Unit:m/s²)

指标	扰动频率	PID控制	PDA控制
加速度均方根值	f=3 Hz	0.3436	0.2403
	f=5 Hz	1.2246	0.6049
	f=7 Hz	0.7794	0.5569
加速度标准差	f=3 Hz	0.3326	0.2246
	f=5 Hz	1.2223	0.5992
	f=7 Hz	0.7747	0.5503
最大加速度绝对值	f=3 Hz	1.7898	0.9994
	f=5 Hz	9.9987	1.7898
	f=7 Hz	3.4903	2.1730

先从理论分析的角度证明此做法的可行性。

具有加速度的悬浮控制系统动力学方程为：

$$(m+k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{i}})\Delta\ddot{c}+k_{\mathrm{i}}k_{\mathrm{d}}\Delta\dot{c}+(k_{\mathrm{i}}k_{\mathrm{p}}-k_{\mathrm{c}})\Delta c=f_{\mathrm{d}} \tag{21}$$

加入一阶低通滤波器后动力学方程变为：

$$(m+\frac{k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{i}}}{Ts+1})\Delta\ddot{c}+k_{\mathrm{i}}k_{\mathrm{d}}\Delta\dot{c}+(k_{\mathrm{i}}k_{\mathrm{p}}-k_{\mathrm{c}})\Delta c=f_{\mathrm{d}} \tag{22}$$

等效质量 $m'=(mTs+m+k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{i}})/(Ts+1)$，当 s 趋近于 0 时，等效质量为 $m+k_{\mathrm{a}}k_{\mathrm{i}}$，当 s 趋近于 ∞ 时，等效质量为 m，相当于无加速度反馈。从而使加速度反馈达到仅对低频干扰起作用的效果。

4.2 加速度传感器信号分析

悬浮控制系统由悬浮控制器、传感器（间隙传感器、加速度计等）和悬浮斩波器构成。控制器获得各类传感器信号并通过控制算法产生控制变量驱动斩波器，由斩波器输出电流驱动电磁铁产生电磁力。其中加速度计安装在电磁铁上用于测量其垂向运动加速度，图 18 为上海磁浮车辆某次以 430 km/h

速度实际运行过程中测量到的加速度信号。根据实测数据与文献 [17]，加速度计测量的信号包括直流重力分量、有用信号分量与高频噪声。重力分量如图 18 时域图中红线所示，但其并非理想直流量，而是随着运动状态改变的极低频的分量，影响因素包括弯道、坡道等。对时域加速度信号进行快速的傅里叶变换（FFT）得到信号频谱。由于实际加速传感器的采样频率 10 kHz 远高于信号频率，时频分析时易带来较大的高频干扰，且容易出现数值失真。在数据采集的时候选取采样频率为信号最高频率的 3~5 倍，因此本文对实际加速度数据进行降采样，有效采样频率设置为 200 Hz。图 19 为时频分析得到的电磁铁垂向加速度信号的频谱，其中有用信号分量为悬浮控制主要依赖的加速度信号，通常为 50 Hz 以下的低频信号，该频段内的信号包含控制系统带宽、轨道不平顺、突发扰动、轨道弹性振动等。高频噪声通常由传感器噪声、电磁干扰等引起。

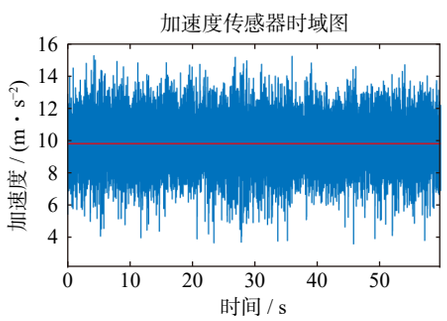


图 18　上海线实测悬浮电磁铁加速度信号

Fig. 18　Acceleration signal of the suspended electromagnet on the Shanghai line

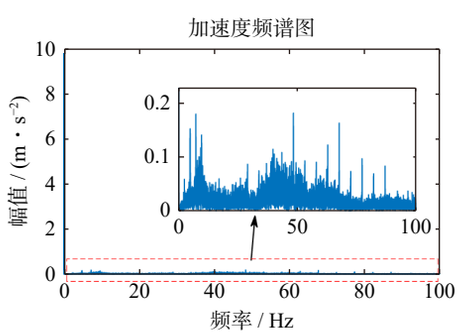


图 19　电磁铁垂向加速度信号的频谱

Fig. 19　Spectrum of vertical acceleration of electromagnet

4.3　加速度传感器信号处理

为提取所需低频段的加速度信号，需要设计带通滤波器。由于低频阻带相对于高频阻带而言太小，依据高频滤波效果确定滤波器的阶数将无法有效滤除极低频的重力分量，而为达到低频重力分量的滤波效果所需的滤波器阶数又太高，易引起较大的相位滞后。因此本文考虑设计组合滤波器，结构如图 20 所示。采用双低通滤波器的形式，将原始信号先通入 FIL1 滤除高频分量得到信号 a_1，然后通入 FIL2 保留极低频分量 a_2，二者相减即得到期望频段的电磁铁绝对加速度信号 a。

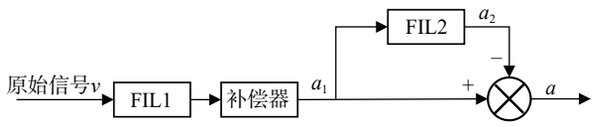


图 20　滤波器结构图

Fig. 20　Filter structure diagram

直接加速度反馈主要用于处理特定频段的干扰信号，其核心目标是提升系统的动态响应速度和抗干扰能力。根据两种控制方法的闭环频率响应，考虑到需要进行加速度反馈的主要是瞬时冲击、变化的负载扰动、轨道弹性振动等幅值大、频率在 50 Hz 以下的信号，另外 PID 控制对于 40 Hz 以上的高频干扰力与间隙波动已经有比较好的抑制效果，故设置滤波器 FIL1 的转折频率为 40 Hz。重力干扰受到进入和离开坡道时电磁铁姿态变化影响，在通过竖圆曲线时重力波动最为剧烈[17]，达到 0.007 Hz，故设置滤波器 2 的转折频率为 0.1 Hz。FIL1 设计为二阶巴特沃斯低通滤波器，FIL2 设计为一阶低通滤波器，所设计组合滤波器幅频曲线如图 21 所示，保留 0.1~40 Hz 频段加速度信号，其余频段信号以一定斜率衰减。

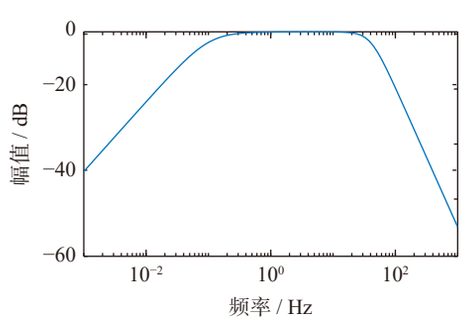


图 21　组合滤波器幅频曲线

Fig. 21　Amplitude and frequency curves of combined filter

由于低通滤波器的加入会引入相位滞后，二阶系统在截止频率处的相位滞后约为 90°，为了避免滤波器加入后控制系统相位裕度不足造成系统振荡，为 FIL1 设计 30°的相位补偿。经计算后相位补偿器的传递函数如下式所示：

$$G_c(s)=\frac{3s+435}{s+435} \tag{23}$$

信号经过所设计组合滤波器的滤波效果如图 22 所示。传感器信号经滤波器处理后去除了直流重力分量，衰减了极低频分量与大于 40 Hz 的分量，从而保留了所需的用于加速度反馈的频段信号。

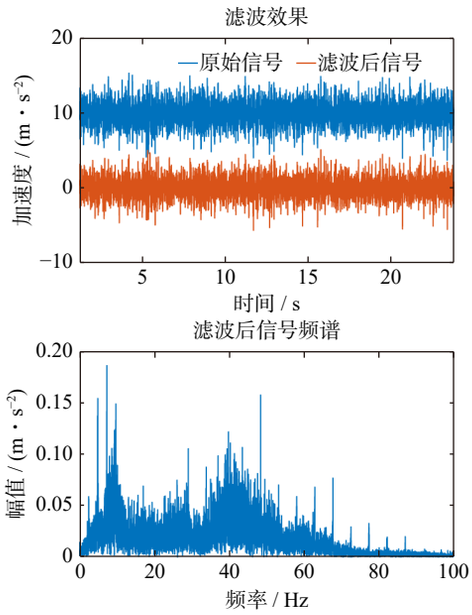


图 22 滤波效果时频图

Fig. 22 Time domain and frequency domain diagram of the filtered signal

4.4 特定频段加速度反馈

将组合滤波器加入前文设计的经 PSO-TS 算法优化后的直接加速度反馈控制系统，控制系统开环伯德图如图 23 所示，系统相位裕度为 66.9°，闭环系统稳定。

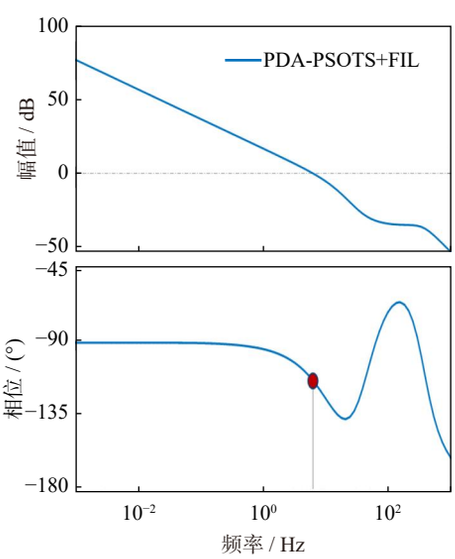


图 23 控制系统开环频率特性

Fig. 23 Control system open-loop frequency characteristics

干扰力输入时系统闭环频率响应如图 24 所示，可以看出，加入滤波器后的 PDA 系统在 40 Hz 内呈现出加速度反馈控制的特性，具有更好的扰动抑制效果。40 Hz 以后保持 PID 控制效果。此外控制系统加入组合滤波器后高频相位滞后现象有所改善。控制系统在全频段内同时具有 PID 控制与 PDA 控制的特性，实现了特定频段加速度反馈。

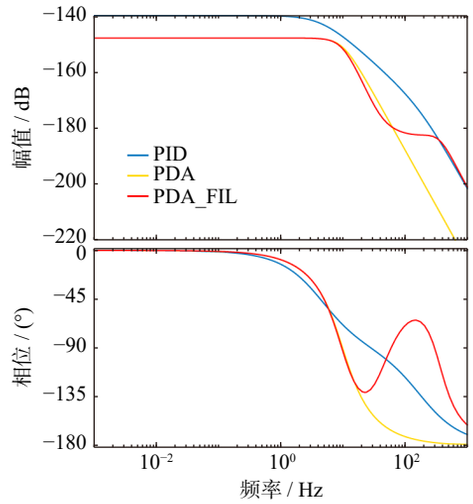


图 24 控制系统闭环频率特性

Fig. 24 Control system closed-loop frequency characteristics

5 结 论

本研究针对高速磁浮运行过程中可能出现的瞬时冲击、轨道不平顺等变化扰动设计了直接加速度反馈控制系统，并就以往试验失败的原因进行分析后：

(1)针对参数不匹配问题设计了粒子群-禁忌搜索算法进行多目标下参数自动寻优，优化了系统受到变化扰动时的加速度与间隙波动。相比于 PID 控制，不同扰动工况下间隙波动抑制 16.5% 以上，加速度波动抑制 58% 以上，能兼顾系统稳定性与平稳性。通过单点悬浮试验台验证了算法的有效性。

(2)针对实际因素设计了组合滤波器，实现信号特定频段加速度反馈控制，减小了实际中由于放大高频振动而带来的额外不稳定现象的可能。

经过以上两步设计能够将 PID 与 PDA 控制优势互补，实现在已有较好性能的 PID 控制的基础上，提高 0.1~40 Hz 频段信号抗干扰能力。算法使悬浮系统具有稳定性的同时，减小了加速度波动，能够提高长期运行安全性，具有一定的工程可实现性。

参考文献：

[1] 吴祥明. 磁浮列车 [M]. 上海：上海科学技术出版社，2003.
WU Xiangming. Maglev Train[M]. Shanghai：Shanghai Science and Technology Press，2003.

[2] LI F X，SUN Y G，XU J Q，et al. Control methods for levitation system of EMS-type maglev vehicles：an overview[J]. Energies，2023，16(7)：2995.

[3] 王成杰，张静，许平洋，等. 基于滑模变结构控制的磁浮列车悬浮控制研究 [J]. 电气自动化，2019，41(2)：86-90.

WANG Chengjie，ZHANG Jing，XU Pingyang，et al. Research on suspension control of maglev trains based on sliding mode variable structure control[J]. Electrical Automation，2019，41(2)：86-90.

[4] 孙友刚，张丹丹，吉文，等. 基于模糊补偿的磁浮列车悬浮系统非奇异终端滑模控制 [J]. 西南交通大学学报，2025，60(4)：803-811.
SUN Yougang，ZHANG Dandan，JI Wen，et al. Fuzzy compensation-based non-singular terminal sliding mode control of maglev vehicle levitation system[J]. Journal of Southwest Jiaotong University，2025，60(4)：803-811.

[5] 孙友刚，徐俊起，贺祯宇，等. 基于误差交叉耦合的多电磁铁悬浮系统滑模协同控制 [J]. 西南交通大学学报，2022，57(3)：558-565.
SUN Yougang，XU Junqi，HE Zhenyu，et al. Sliding mode cooperative control of multi-electromagnet suspension system based on error cross coupling[J]. Journal of Southwest Jiaotong University，2022，57(3)：558-565.

[6] LI W C，FAN K G，WU Z W. Magnetic levitation system control research based on improved linear active disturbance rejection[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control，2024，46 (15)：2959-2970.

[7] 董达善，陈琛，孙友刚，等. 非线性磁悬浮系统动力学建模与控制研究 [J]. 机械设计与制造，2019(11)：16-19.
DONG Dashan，CHEN Chen，SUN Yougang，et al. Research on dynamics modeling and control of the nonlinear maglev system[J]. Machinery Design & Manufacture，2019(11)：16-19.

[8] CHEN C，XU J Q，LIN G B，et al. Model identification and nonlinear adaptive control of suspension system of high-speed maglev train[J]. Vehicle System Dynamics，2022，60(3)：884-905.

[9] 宋一锋，佟来生，倪菲，等. 基于数据驱动的磁浮列车悬浮系统参数辨识 [J]. 铁道科学与工程学报，2022，19(4)：857-863.
SONG Yifeng，TONG Laisheng，NI Fei，et al. Data-driven parameter identification for levitation system of maglev train[J]. Journal of Railway Science and Engineering，2022，19(4)：857-863.

[10] 苗欣，李言民，江守亮，等. 基于粒子群算法的磁悬浮列车控制参数优化 [J]. 计算机仿真，2021，38(11)：117-122.
MIAO Xin，LI Yanmin，JIANG Shouliang，et al. Optimization of magnetic levitation control parameters based on particle swarm optimization method[J]. Computer Simulation，2021，38(11)：117-122.

[11] 于晶，冯勇，郑剑飞. 基于高阶滑模和加速度反馈的机械谐振抑制方法 [J]. 控制理论与应用，2009，26(10)：1133-1136.
YU Jing，FENG Yong，ZHENG Jianfei. Suppression of mechanical resonance based on higher-order sliding mode and acceleration feedback[J]. Control Theory & Applications，2009，26(10)：1133-1136.

[12] 陈琛，徐俊起，林国斌，等. 具有径向基网络加速度反馈的磁浮列车悬浮系统滑模控制 [J]. 同济大学学报(自然科学版)，2021，49(12)：1642-1651.
CHEN Chen，XU Junqi，LIN Guobin，et al. Sliding mode control of maglev train suspension system with neural network acceleration feedback[J]. Journal of Tongji University(Natural Science)，2021，49(12)：1642-1651.

[13] 张锟，崔鹏，李杰. 磁悬浮系统的加速度计反馈控制算法 [J]. 控制理论与应用，2009，26(9)：988-992.
ZHANG Kun，CUI Peng，LI Jie. Accelerometer feedback control algorithm for maglev system[J]. Control Theory & Applications，2009，26(9)：988-992.

[14] 李奇南，陈敏，徐德鸿. 钢板磁悬浮系统加速度反馈控制 [J]. 中国电机工程学报，2010，30(36)：123-128.
LI Qinan，CHEN Min，XU Dehong. Acceleration feedback control for steel plate magnetic suspension system[J]. Proceedings of the CSEE，2010，30(36)：123-128.

[15] 范龙燕，姚善化. 改进二进制粒子群算法多目标配电网重构 [J/OL]. 重庆工商大学学报 (自然科学版)，1-9[2025-08-14]. https://link.cnki.net/urlid/50.1155.N.20250226.1634.004.
FAN Longyan，YAO Shanhua. Multi-objective distribution network reconstruction with improved binary particle swarm algorithm[J/OL]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)，1-9[2025-08-14]. https://link.cnki.net/urlid/50.1155.N.20250226.1634.004.

[16] 李佳，刘天琪，李兴源，等. 改进粒子群-禁忌搜索算法在多目标无功优化中的应用 [J]. 电力自动化设备，2014，34(8)：71-77.
LI Jia，LIU Tianqi，LI Xingyuan，et al. Application of improved particle swarm-tabu search algorithm in multi-objective reactive power optimization[J]. Electric Power Automation Equipment，2014，34(8)：71-77.

[17] 李晓龙，张志洲，佘龙华，等. 高速磁悬浮列车悬浮控制中加速度信号数字滤波算法研究 [J]. 机车电传动，2009(1)：39-42.
LI Xiaolong，ZHANG Zhizhou，SHE Longhua，et al. Digital filter algorithm for accelerometer data in suspension control system of high speed maglev train[J]. Electric Drive for Locomotives，2009(1)：39-42.

第一作者：徐俊起(1977—)，男，博士，研究员。
E-mail：xujunqi@tongji.edu.cn

通信作者：陈　琛(1993—)，男，博士，助理教授。
E-mail：c_chen_brightness@tongji.edu.cn

磁气混合隔振电磁结构分析与输出特性研究

江友亮[1,2]，宋春生[1,2,3]，江 洋[1,2]

（1. 武汉理工大学机电工程学院，湖北 武汉 430070；2. 湖北省磁悬浮工程技术研究中心，湖北 武汉 430070；
3. 数字制造湖北省重点实验室，湖北 武汉 430070）

摘要：由于舰船动力设备的高集成与大承载，磁气混合隔振是舰船动力设备隔振的主要手段之一。其中，电磁单元的结构与输出特性是其研究的重点与核心。本文设计了一体式磁气混合隔振器，系统性分析其电磁结构参数与输出特性。从瞬态磁场与稳态磁场两方面分析电磁电流对稳定磁场的影响状态，讨论电磁结构参数的变化规律与设计准则。从被动模式与主动模式两状态分析，被动模式电磁阻尼力的输出模型，探讨主动模式电磁控制电流特性。对一体式磁气混合隔振器的静态电磁力、动态响应及阻尼调节性能开展试验验证，结果表明其电磁结构规律与设计准则可靠，且在恒定电流下具备可调阻尼性能。

关键词：磁气混合；电磁结构优化；动态输出；阻尼性能
中图分类号：TB535^{+}.1 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202507035

Electromagnetic structure analysis and output characteristics of magnetic-air hybrid vibration isolation

JIANG Youliang[1,2], SONG Chunsheng[1,2,3], JIANG Yang[1,2]

（1.School of Mechanical and Electrical Engineering，Wuhan University of Technology，Wuhan 430070，China；
2.Hubei Maglev Engineering Technology Research Center，Wuhan 430070，China；
3.Hubei Key Laboratory of Digital Manufacturing，Wuhan 430070，China）

Abstract: Due to the high integration and large load capacity of ship power equipment，magnetic-air hybrid vibration isolation is one of the main means of vibration isolation for ship power equipment. Among them，the structure and output characteristics of electromagnetic units are the focus and core of its research. Therefore，based on the designed integrated magnetic-air hybrid vibration isolator，this paper systematically analyzes the electromagnetic structural parameters and output characteristics. The influence of electromagnetic current on the magnetic field was analyzed from the perspective of the transient-state magnetic field，and the variation law and design criteria of electromagnetic structural parameters were discussed from the perspective of the steady-state magnetic field. This paper analyzed the output model of electromagnetic damping force in passive mode and explored the characteristics of electromagnetic control current in active mode. The static electromagnetic force，dynamic response，and adjustable damping performance of the integrated magnetic-air hybrid vibration isolator were experimentally verified. The results demonstrated the reliability of the electromagnetic structure laws and design criteria，as well as the adjustable damping performance.

Keywords: magnetic-air hybrid; electromagnetic structure optimization; dynamic output; damping capacity

舰船动力设备具有高集成、大承载和强扭矩等特点，其自身的运转不仅会激发其机械结构的振动，还会导致动力集成与传动设备的不对中。磁气混合隔振技术[1]既有气囊的大承载特性与气压调节特性，又有磁悬浮的主动控制优势，可有效地降低低频振动及部分随机振动，满足舰船动力设备的减振需求。磁悬浮隔振与准零刚度隔振是解决低频振动的有效方法。磁气混合隔振中，气囊往往起承载与被动隔振作用，磁悬浮主要为主动隔振控制的核心单元。磁悬浮单元的结构与控制是磁气混合隔振技术的重要研究方向之一。

KIM 等[2]采用气囊、电磁和磁流变三者结合的方式，设计了一种混合隔振器，研究了隔振器刚度和振动控制机理，并设计了协同控制策略。BERNAT 等[3]

收稿日期：2025-07-16；**修订日期：**2025-10-14
基金项目：国家重点研发计划资助项目 (2024YFB3410005)

采用介电活性聚合物作动器和气囊隔振器“串联”方式，设计出一种主被动磁气混合隔振装置（介电活性聚合物作动器为洛伦兹力原理结构形式），并对其承载特性、时频域输出特性进行试验研究。李斌等[4]采用磁悬浮元件和气囊隔振器“并联”的方式，实现了可变刚度特性，并设计了基于磁气混合隔振系统的 PID 和 LQR 控制器。ZHOU 等[5]基于 Maxwell 原理设计了一种变刚度电磁隔振器，保证静刚度的同时降低了系统的动态刚度，提高了隔振系统的低频隔振带宽。WANG 等[6]、ZHOU 等[7]基于光刻机振动特性，设计了一种基于气囊和磁悬浮的低频微振变刚度隔振平台，实现了良好的低频和超低频隔振效果。何琳等[8]、马建国等[9]将磁悬浮隔振装置置于气囊内，设计出一种舰船用磁气混合主被动隔振器，马建国等[10]还优化了其中的电磁结构，提高了隔振器的抗冲击性能。SONG 等[11]搭建了分布式磁气混合浮筏隔振系统，并进行了系统辨识。

虽然目前关于磁悬浮结构方面已有大量研究，但在结构优化与电磁输出特性等方面依然有待深入分析与研究。因此，本文对磁气混合隔振器的电磁结构优化与电磁输出特性展开系统性研究。设计并联一体式磁气混合隔振器结构形式，从瞬态磁场和静态磁场角度，探究参数对电磁性能的影响规律。探讨不同状态下电磁单元输出特性，并进行试验验证。

1　磁气混合隔振器结构

本文采用囊式气囊与洛伦兹力电磁力方式，设计外置电磁式并联一体式磁气混合隔振器，其气囊与电磁具有一定的结构独立性，结构原理示意图如图 1 所示。

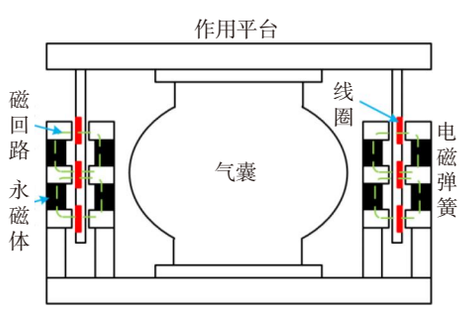


图 1　一体式磁气混合隔振器结构原理

Fig. 1　Structural principle of integrated magnetic-air hybrid vibration isolator

如图 1 结构原理示意图所示，气囊内置于电磁弹簧内，并形成并联。两块永磁体形成上下两组磁通回路，通电线圈在磁场作用下产生电磁力，形成洛伦兹力。依据结构原理，对应的三维结构如图 2 所示，结构主要包括永磁体、内外导磁体、内外中间导磁体、线圈、气囊等组成部件，其类似结构特征已获批发明专利[12]。

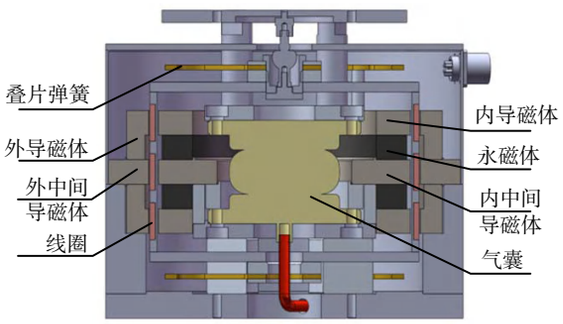


图 2　一体式磁气混合隔振器

Fig. 2　Integrated magnetic-air hybrid vibration isolator

本文后续试制的实物为等效尺寸，并不是依据实际舰船动力设备尺寸，但结构形式一致。依托团队已有的囊式气囊隔振器 (086060H-1) 为初始尺寸，进行磁气混合隔振器结构设计、电磁弹簧结构分析及各种性能研究。

2　电磁单元结构设计与参数分析

2.1　电磁单元设计参数

永磁磁场环路采用上下对称内永磁体结构形式，动线圈采用三组方式 (上下线圈电流方向相同，中间线圈电流方向相反)。电磁单元核心结构参数及永磁场回路如图 3 所示。

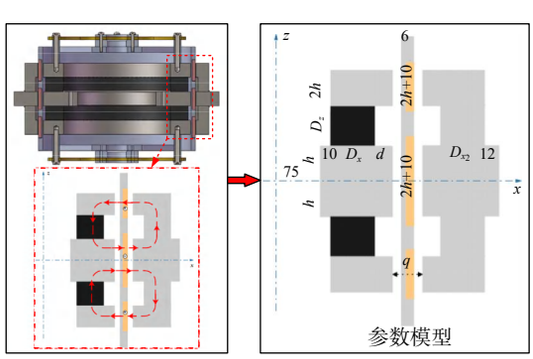


图 3　电磁单元结构参数（单位：mm）

Fig. 3　Electromagnetic unit structural parameters(Unit: mm)

如图 3 所示，内外永磁体径向长度和轴向长度分别为 D_x 和 D_z。上下和中间永磁体保护环尺寸为 d，轴向厚度均为 $2h$。为了结构安装和固定，内外中间导磁体都分别向外凸出 10 和 12 mm。由于气囊选择采购方案，内中间导磁体内径基本确定为 150 mm。内外永磁部件径向气隙为 q，线圈支架位于气隙中间，厚度为 8 mm；线圈厚度为 4 mm，上下线圈长度为 $2h$+10 mm，中间线圈长度为 $2h$+10 mm。

依据 086060H-1 气囊产品手册可知，气囊的高度

(出厂 60 mm) 到压缩极限 (42 mm) 行程为 18 mm, 充气气压范围为 (0.05 MPa, 0.8 MPa)。本文选择 0.7 MPa (气囊最佳工作气压状态)、60 mm 情况下承载与动态力作为电磁力参数设计当量(此时气囊力为 175 N), 以振动幅度为±3 mm 为基准(上下变化约±30 N)。依据以上两者要求, 取气囊变化力的 2 倍 (安全系数), 即可推算出电磁单元电磁力设计准则为 120 N。

依据一体式结构形式, 电磁单元结构核心参数初始值如表 1 所示,其中 N_e 为有效线圈匝数, I 为线圈电流。依托初始值并结合仿真, 优化分析电磁结构。

表 1 结构参数初始值

Tab. 1 Initial values of structural parameters

序号	参 数	数 值	序号	参 数	数 值
1	D_z/mm	15	5	d/mm	5
2	D_x/mm	15	6	q/mm	8
3	D_{x2}/mm	15	7	N_e	80
4	h/mm	10	8	I/A	2

2.2 瞬态磁场分析

分别对中磁极线圈、上下磁极线圈通入 5~100 Hz (时间为 3 s) 扫频正弦电流, 三组线圈匝数都为 120 (有效匝数为 80), 电流方向相反 (中间线圈电流方向指向纸面, 上下线圈电流方向指出纸面), 分析动态交变电流对永磁磁场的影响规律。经过一系列初步仿真, 永磁磁场变化与电流幅值呈正相关。因此, 选取 2 A 电流值, 分析最大电流时的影响规律。

由于线圈处的磁感应强度为直接作用磁场, 本文选取线圈气隙处的磁感应强度作为永磁磁场变化的参考, 瞬态磁场变化如图 4 所示, 仿真数据结果见表 2。

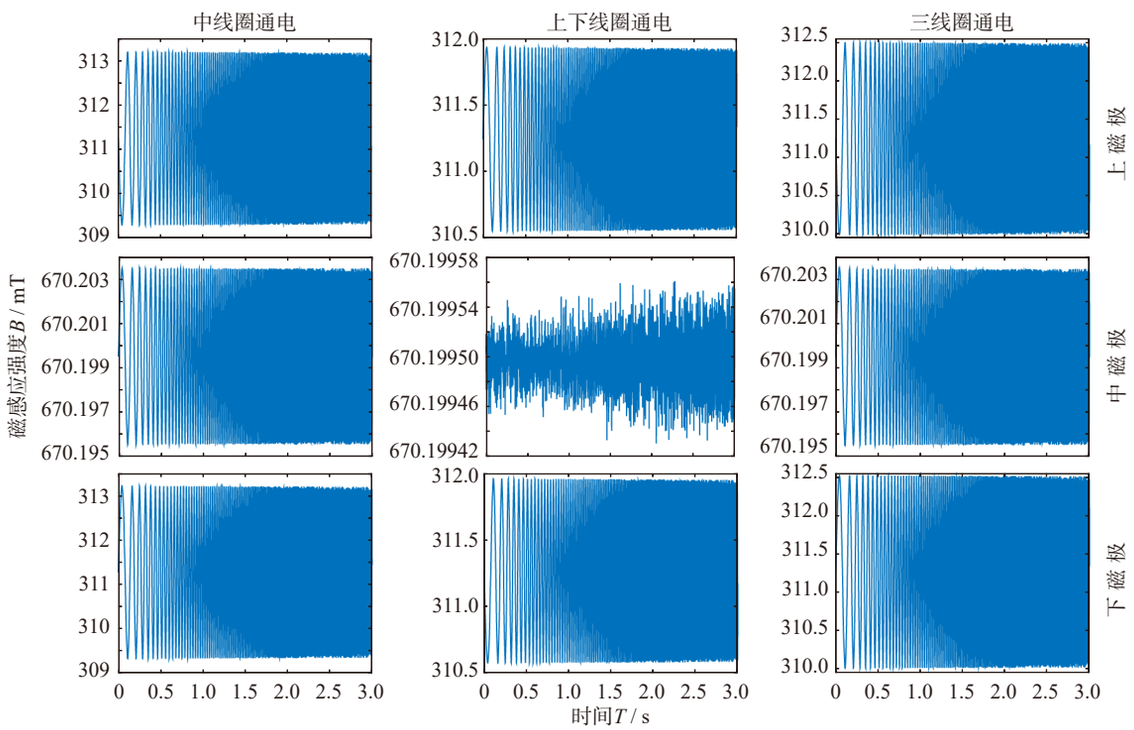


图 4 磁感应强度变化

Fig. 4 The variation curves of magnetic induction intensity

表 2 磁感应强度变化率

Tab. 2 Change rate of magnetic induction intensity

序号	通电情况 (5~100 Hz扫频)	磁感应强度变化率/%		
		中线圈	上线圈	下线圈
1	中间线圈通电	0.0012	1.2480	1.2479
2	上下线圈通电	0.00002	0.4427	0.4429
3	三线圈通电	0.0012	1.2480	1.2479

从磁场变化图 4 和数据表 2 可知, 各气隙处磁感应强度不随交变电流频率变化而变化; 电流对中线圈处磁感应强度的影响在 0.0001%, 其变化差值 ΔB 在 0.001 mT 以内; 电流对上下线圈处磁感应强度的影响在 2% 以内, 其变化差值 ΔB 在 6 mT 以内。

依据 $F=BIL$ 原理, 交变电流产生的电磁力同样具有 2% 的波动。当用于低频微振领域, 需考虑这一波动, 并在电控环节进行补偿。对于具有大惯性特性的船舶动力振动干扰, 2% 的控制波动对设备振动隔振控制的影响不大。

2.3 静态磁场分析

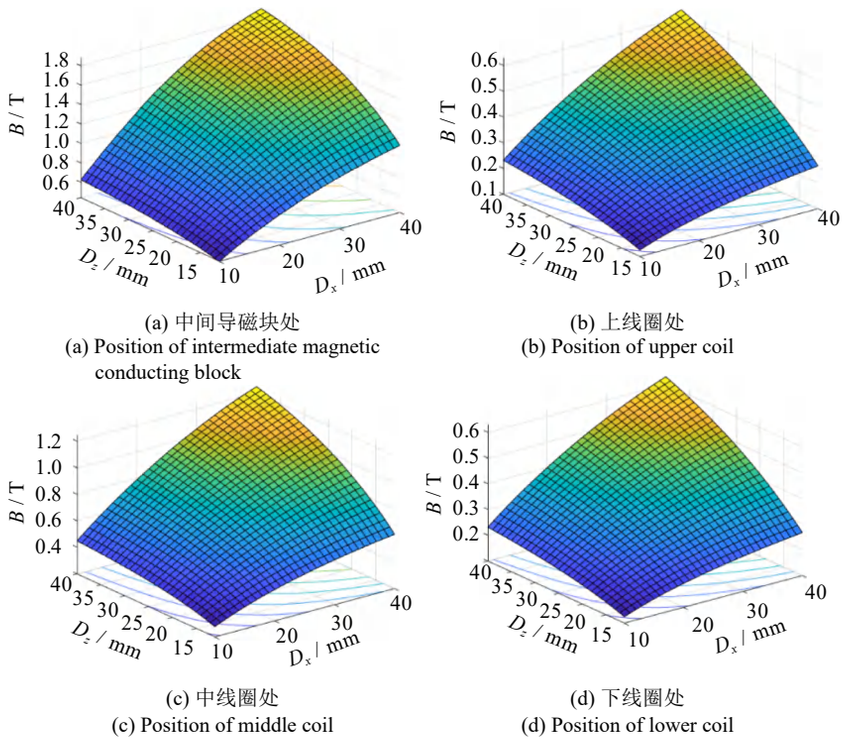
对电磁单元核心结构参数化建模, 仿真分析各结构参数对磁场的影响规律, 研究不同结构参数对结构性能的影响规律。以线圈气隙处磁感应强度最

大以及结构任一处的磁感应强度不饱和为目标，优化电磁单元结构参数，确定电磁弹簧优化设计准则。

经过一系列初步分析，其中永磁体结构和永磁体保护环结构等参数具有非线性规律，气隙、外导磁体等参数为线性规律。下面对非线性规律参数进行分析。

(1)永磁体结构参数分析

永磁体尺寸是影响磁场的关键参数。结合初始值，永磁体径向长度 D_x 和轴向长度 D_z 在 10~40 mm 之间变化，分析线圈气隙处磁场的变化规律。仿真分析过程中，以有效线圈截面处磁感应强度的均值作为线圈气隙处磁感应强度值，以中间导磁块截面处磁感应强度的均值作为结构的磁感应强度 (此处结构磁感应强度最大)。上、中、下磁极线圈处磁感应强度以及中间导磁块磁感应强度变化曲面如图 5 所示。



(a) 中间导磁块处
(a) Position of intermediate magnetic conducting block

(b) 上线圈处
(b) Position of upper coil

(c) 中线圈处
(c) Position of middle coil

(d) 下线圈处
(d) Position of lower coil

图 5　各处磁感应强度变化曲面

Fig. 5　The surface of magnetic induction intensity variation at various locations

从图 5 中各处磁感应强度随 D_z 和 D_x 变化云图可知，随 D_z(或 D_x) 变化，磁感应强度 B 都呈类似对数增长，但 D_z 与 D_x 对 B 的影响大小不同。横向对比上、中、下与导磁块处的线圈磁感应强度，发现其变化规律一致。因此，本文以中间导磁块为分析对象，分析其磁感应强度等高梯度，如图 6 所示。

从图 6 等高梯度图分析可知，磁感应强度随永磁体轴向长度 D_z 的变化梯度低于永磁体径向长度 D_x 的变化梯度，即磁感应强度对沿着永磁体充磁方向的敏感度低于垂直于充磁方向的敏感度。因此，设计永磁体结构时，敏感度斜率拐点即为永磁结构的最优设计点。

本文选取传统材料磁饱和 1.2 T，设计磁感应强度需小于 1.2 T，本文取 1.15 T。依据图 6 中 1.15 T 的等高线，选取 D_z 方向梯度减小拐点作为 D_z 最终的优化值，即 D_z=20 mm；则对应的 D_x=25 mm，此时，B=1.15 T。

(2)永磁体保护环参数分析

永磁体保护环尺寸 d 为导磁体相对永磁体凸出部分，具有保护永磁体的作用。d 在 0~15 mm 之间变化，分析上、中、下线圈气隙处以及中间导磁块的磁感应强度的变化规律，上、中、下线圈气隙处以及中间导磁块处的磁感应强度随 d 的变化如图 7 所示。

从图 7 可知，线圈气隙处磁感应强度随 d 的增大而

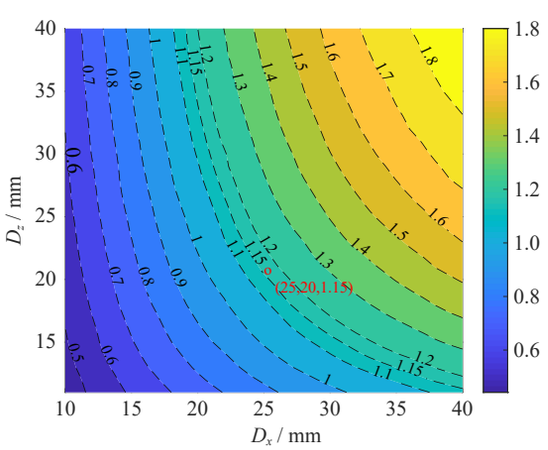


图 6　导磁块磁感应强度 B 等高梯度

Fig. 6　Contour nephogram of magnetic induction intensity(B) at magnetic block

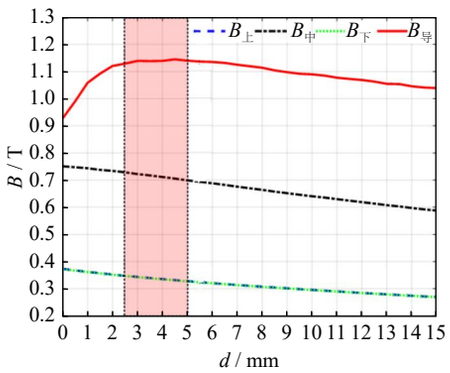


图 7 磁感应强度随 d 的变化曲线

Fig. 7 Variation curves of magnetic induction intensity with d

减小。但分析可知永磁体和导磁体之间的磁感应强度集中效应也随 d 的增大而愈发强烈。因此，理论上 d=0 mm 时，磁场分布最均匀、最合理，但永磁体为脆性材料，因此需要对 d 进行一定的取值用以保护永磁体。

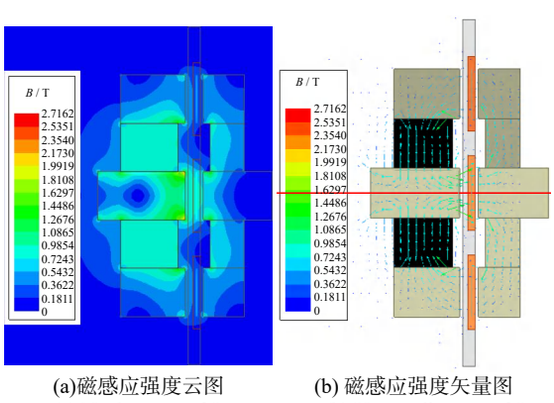
由于磁感应强度是电磁力决定性参量之一，在中间导磁块高 0.9h 处画一条水平线，取其磁感应强度的平均值作为分析指标，仿真分析磁感应强度随 d 的变化规律。仿真结果如图 7 红色曲线所示，$d \in$ [2.5 mm, 5 mm]，磁感应强度处于最值范围，并且基本保持不变，即凸出部分为永磁体径向长度 D_x 的 10%~20%。因此，本文 d 选取为 3 mm。

依据结构仿真优化分析结果，本文最终的结构参数如表 3 所示。根据确定的结构参数，对电磁弹簧进行静态磁场仿真，查看其磁感应强度云图分布、磁场回路和各处磁感应强度值的情况，仿真结果如图 8 所示。

表 3 优化后结构参数

Tab. 3 Optimized structural parameters

序号	参 数	数 值	序号	参 数	数 值
1	D_z/mm	20	5	d/mm	3
2	D_x/mm	25	6	q/mm	8
3	D_{x2}/mm	15	7	N_c	80
4	h/mm	10	8	I/A	2



(a)磁感应强度云图 (b) 磁感应强度矢量图
(a) Nephogram of B (b) Vector diagram of B

图 8 结构优化后磁感应强度仿真结果

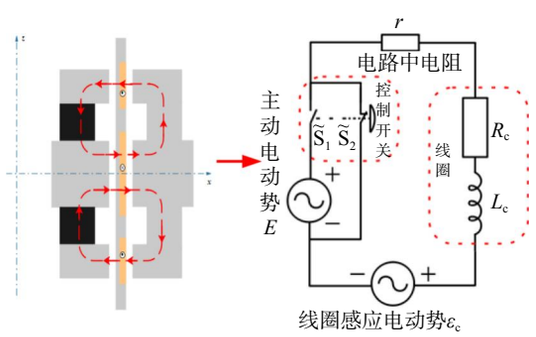
Fig. 8 Simulation results of B after structural optimization

从磁感应强度分布情况和云图可知，上下线圈处磁感应强度约为中间线圈磁感应强度为一半，优化后结构磁场分布合理，磁场回路满足设计要求。上、下线圈处磁感应强度分别为 0.3437 T 和 0.3430 T，中间导磁体处磁感应强度为 1.1392 T；上、下线圈电磁力为 36.4 N，中间线圈的电磁力为 76.6 N，电磁弹簧总电磁力为 149.4 N，满足预设设计要求。

3 电磁特性分析

磁生电和电生磁相辅相成，反电动势不仅影响着线圈中的控制电流，也会产生磁场影响着永磁体在线圈气隙处的磁感应强度。然而，依据第 2 节中的瞬态磁场仿真结论，反电动势产生的磁场对永磁体的磁场影响不大，但反电动势对线圈中的控制电流的影响不可忽略不计。接下来分析研究线圈中的反电动势。

串联线圈会导致电感增大，不利于电流控制。本文设计的电磁弹簧结构的三组线圈采取独立供电方式，即每一组线圈单独形成等效电路，其等效电流如图 9 所示。



注：R_c 和 L_c 为线圈的电阻与电感，r 为隔振器内部电路中电阻。

图 9 等效电路图

Fig. 9 Equivalent circuit diagram

从图 9 等效电路图分析可知，电磁弹簧可通过控制开关实现被动工作和主动工作模式。当控制开关断开时，开关 S_1 断开，开关 S_2 闭合，线圈电路中不存在有源电气元件，即电磁弹簧处于被动工作模式状态。被动模式下，动力设备的振动传递到电磁弹簧线圈上，线圈在永磁场作用下切割磁感线运动，形成反电动势；反电动势在线圈中产生的电流，在永磁场作用下，产生与设备振动相反的电磁力，即电磁阻尼力。电磁阻尼力起阻碍动力设备振动的作用，为有利影响。当控制开关闭合时，开关 S_1 闭合，开关 S_2 断开，电磁弹簧处于主动控制模式，即通过主动电动势 E 实现主动控制。主动模式下，线圈感应电动势 ε_c 与主动电动势 E 方向相反，起“阻碍”主动控制作用，为不利影响。

3.1　被动模式阻尼力

依据反电动势公式以及被动工作模式电路图，即可推导出反电动势电流：

$$I_{\mathrm{c}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{c}}}{R_{\mathrm{c}}+r+\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{c}}}=\frac{BLv}{R_{\mathrm{c}}+r+\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{c}}} \tag{1}$$

式中，B 为永磁场磁感应强度；L、v为电磁弹簧线圈匝数和速度；ω为电流变化角频率。

根据电磁力公式，即可获得电磁阻尼力：

$$F_{\mathrm{c}}=BI_{\mathrm{c}}L=\frac{B^2L^2v}{R_{\mathrm{c}}+r+\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{c}}}=cv \tag{2}$$

其中，$c=\dfrac{B^2L^2}{R_{\mathrm{c}}+r+\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{c}}}$为等效阻尼。

3.2　主动模式电流特性

根据图 9 中主动工作模式的等效电路图，在交变电压$\dot{E}$作用下，主动控制电路中的电流为$\dot{I}$，则可列出电回路公式：

$$(R_{\mathrm{c}}+r)\dot{I}+\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{c}}\dot{I}=\dot{E}-\dot{\varepsilon}_{\mathrm{c}} \tag{3}$$

根据式 (3)，即可推出主动控制的电流特性：

$$\dot{I}=\frac{\dot{E}-BLv}{R_{\mathrm{c}}+r+\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{c}}}=\frac{\left(\dot{E}-BLv\right)(R_{\mathrm{c}}+r)-\mathrm{j}\left(\dot{E}-BLv\right)\omega L_{\mathrm{c}}}{(R_{\mathrm{c}}+r)^2+\omega^2{L_{\mathrm{c}}}^2} \tag{4}$$

从式 (4) 可知，电流特性与实时采集信号 (速度v和角频率ω) 有关。本文将式 (4) 进行位移和加速度变换。令$v=\mathrm{j}\omega x$，则位移$x=\dfrac{v}{\mathrm{j}\omega}$，加速度$a=\mathrm{j}\omega v$，将其代入式 (4)，即可获得基于位移信号和加速度信号的主动控制电流特性公式，如下式所示：

基于位移：

$$\dot{I}=\frac{(R_{\mathrm{c}}+r)\dot{E}-BL\omega^2L_{\mathrm{c}}x-\mathrm{j}\left[\omega L_{\mathrm{c}}\dot{E}+BL\omega(R_{\mathrm{c}}+r)x\right]}{(R_{\mathrm{c}}+r)^2+\omega^2L_{\mathrm{c}}^2} \tag{5}$$

基于加速度：

$$\dot{I}=\frac{-\left[(R_{\mathrm{c}}+r)\dot{E}+BLL_{\mathrm{c}}a\right]\omega+\mathrm{j}\left[\dot{E}L_{\mathrm{c}}\omega^2-BL(R_{\mathrm{c}}+r)a\right]}{-(R_{\mathrm{c}}+r^2)\omega-\omega^3L_{\mathrm{c}}^2} \tag{6}$$

从式 (5) 和式 (6) 电流特性公式可知，不同的反馈采集量其对应的幅频特性也不同，即不同的反馈参数对应的控制系统的特性不同。本文选取式 (4) 原始公式推导电磁弹簧的控制电流幅频特性。推导后幅频特性表达式如下式所示：

$$\begin{cases}A^2=\dfrac{\left(\dot{E}-BLv\right)^2}{(R_{\mathrm{c}}+r)^2+\omega^2L_{\mathrm{c}}^2}\\ \tan\theta=\dfrac{-\omega L_{\mathrm{c}}}{R_{\mathrm{c}}+r}\end{cases} \tag{7}$$

3.3　电磁输出力特性

依据一体式磁气混合隔振器结构可知，电磁弹簧属于一种主动式惯性执行器，其采用刚度较低的支撑弹簧，利用稳定磁场输出电磁力，并且与气囊力一起作用于动力设备。基于等效理论[13]，气囊可等效为刚度和阻尼 (k_{as0}、k_{as1} 和 c_{as})；电磁单元中的碟片弹簧组件的等效刚度和等效阻尼为 k_{ds} 和 c_{ds}，电磁单元内部洛伦兹力为 f_{i}；电磁单元输出的作用力为 F_{a}，电磁弹簧中动浮子的质量为 m，动力设备和隔振器托盘质量为 M，k_{as1} 与 c_{as} 之间的位移量为 x_{m}。一体式磁气混合隔振器的动力学模型如图 10 所示。

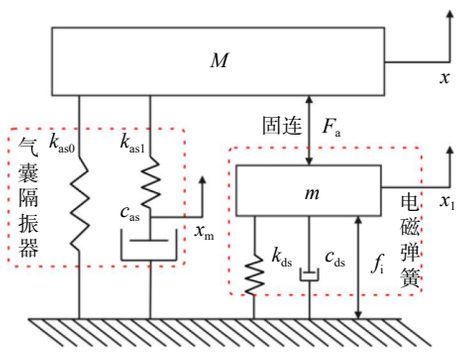


图 10　一体式磁气混合隔振器动力学模型

Fig. 10　Dynamic model of integrated magnetic-air hybrid vibration isolator

假设动力设备的振动位移量为 x，动浮子的振动位移量为 x_1，依据达朗贝尔原理，对动浮子 m 和动力设备 M 列动力学微分方程，如下式所示：

$$\begin{cases}f_{\mathrm{i}}-k_{\mathrm{ds}}x_1-c_{\mathrm{ds}}x_1'-F_{\mathrm{a}}=mx_1''\\ F_{\mathrm{a}}-k_{\mathrm{as0}}x-k_{\mathrm{as1}}(x-x_{\mathrm{m}})=Mx''\\ k_{\mathrm{as1}}(x-x_{\mathrm{m}})=c_{\mathrm{as}}x_{\mathrm{m}}'\end{cases} \tag{8}$$

式中，$'$为变量一阶导，$''$为变量二阶导。

根据一体式磁气混合隔振器结构可知，电磁弹簧的动浮子与隔振平台通过顶杆固连，即动浮子与动力设备固连。因此，动浮子的运动参量与动力设备运动参量相等，即 $x=x_1$、$x'=x_1'$、$x''=x_1''$。令 $x'=\mathrm{j}\omega x$、$x''=-\omega^2x$，将其代入式 (8)，则可推导出电磁弹簧输出力和电磁力的比值关系：

$$\frac{F_{\mathrm{a}}}{f_{\mathrm{i}}}=\frac{-\omega^2M+k_{\mathrm{as0}}+\dfrac{\mathrm{j}\omega k_{\mathrm{as1}}c_{\mathrm{as}}}{\mathrm{j}\omega c_{\mathrm{as}}+k_{\mathrm{as1}}}}{-\omega^2m+k_{\mathrm{ds}}+\mathrm{j}\omega c_{\mathrm{ds}}-\omega^2M+k_{\mathrm{as0}}+\dfrac{\mathrm{j}\omega k_{\mathrm{as1}}c_{\mathrm{as}}}{\mathrm{j}\omega c_{\mathrm{as}}+k_{\mathrm{as1}}}} \tag{9}$$

将式 (4) 引入 $f_{\mathrm{i}}=B\dot{I}L$，并将其代入式 (9)，最后对其进行 s 变换，即可推导出一体式磁气混合隔振器的电磁弹簧输出力与功率放大器输入电压之间的传递函数 (频响函数)：

$$\frac{F_{\mathrm{a}}}{E}=\frac{BL\left[Mc_{\mathrm{as}}s^3+Mk_{\mathrm{as1}}s^2+(k_{\mathrm{as0}}+k_{\mathrm{as1}})c_{\mathrm{as}}s+k_{\mathrm{as0}}k_{\mathrm{as1}}\right]}{a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0} \tag{10}$$

其中，a_4、a_3、a_2、a_1、a_0的表达式如下式所示：

$$\begin{cases} a_4 = (M+m)c_{as}L_c \\ a_3 = (M+m)[k_{as1}L_c + (R_c+r)c_{as}] \\ a_2 = (R_c+r)[(M+m)k_{as1} + c_{as}c_{ds}] + \\ \quad (c_{as}+c_{ds})k_{as1}L_c + (k_{as0}+k_{ds})c_{as}L_c \\ a_1 = (R_c+r)[(c_{as}+c_{ds})k_{as1} + (k_{as0}+k_{ds})c_{as}] + \\ \quad (k_{as0}+k_{ds})k_{as1}L_c + B^2L^2vc_{as} \\ a_0 = B^2L^2vk_{as1} \end{cases} \tag{11}$$

4 试验分析

4.1 电磁输出特性试验

本文设计的一体式磁气混合隔振器实物图如图 11 所示，在分析电磁输出力性能时，不连接气囊，单独分析电磁输出力性能，减少气囊囊体对电磁输出力的影响。



图 11 一体式磁气混合隔振器实物图

Fig. 11 Physical object of integrated magnetic-air hybrid vibration isolator

首先，对一体式磁气混合隔振器的电磁静动态输出力进行试验分析。当进行静态输出试验时，在隔振器结构顶端连接力传感器，另一端连接至固定钢板端。

隔振器线圈通入 0~3 A(间隔为 0.2 A) 的稳流信号，电磁力稳定保持 3 s 后记下力传感器数据；每一电流做三次试验，取三次试验均值作为此电流对应电磁静态输出力。不同电流对应的电磁静态输出力试验结果如图 12 所示，实测数据点具有良好的线性度，最大残差在 5 N 以内(最大误差 3%)。对试验数据进行一阶拟合，电磁输出力的斜率为 79.04 N/A；电流为 2 A 时，试验测量静态电磁力值为 163.1 N、拟合值为 158.1 N。与仿真结果对比可知，实测斜率与仿真斜率都具有良好的线性度，达到设计要求；仿真值 149.4 N 小于实测值，是因为仿真时采用有效安匝数，实际匝数大于有效匝数。

其次，在隔振器结构顶端接入加速度传感器，另一端自由悬空，进行动态输出试验。输入频率为

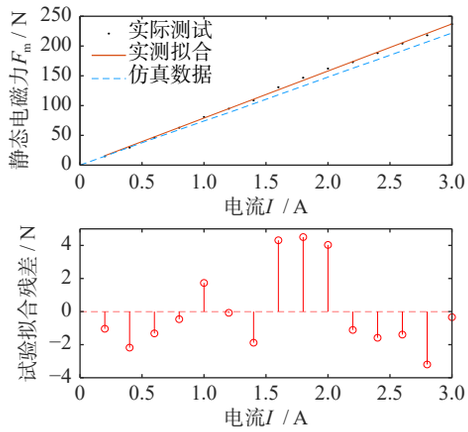
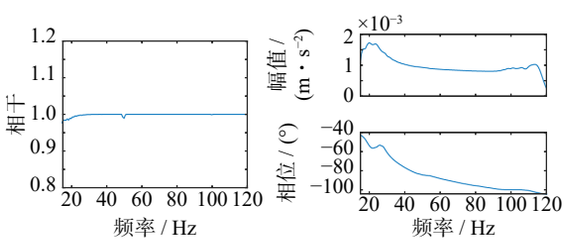


图 12 电磁静态输出力试验结果

Fig. 12 Experimental results of electromagnetic static output force

10~120 Hz 的扫频电流信号，采集加速度传感器动态数据，取三次试验数据均值作为最后的试验测量结果。将信号源输出信号与加速度传感器测量信号作为磁气混合隔振器的输入输出信号，分析磁气混合隔振器电磁动态输出的幅频特性。依据试验数据绘制的幅频响应曲线如图 13 所示，从相干性曲线可知，数据在 15~120 Hz 内相干性在 1 附近，证明检测数据输出与输入具有良好的对应关系；在 50 Hz 附近相干性较差，这是由于电流工频 50 Hz 所致。从幅频响应结果可知，磁气混合隔振器的电磁动态输出顺滑，固有频率为 20 Hz 左右 (固有频率低)，响应相位在−40°~−100° (15~100 Hz)。电磁静态输出特性和动态输出特性的测试试验可为磁气混合隔振器的深入研究和推广应用提供一定的技术支撑。



(a) 加速度/输入的相干性 (a) Coherence of acceleration/input

(b) 加速度/输入响应曲线 (b) Response curve of acceleration/input

图 13 磁气混合隔振器电磁动态输出曲线

Fig. 13 Electromagnetic dynamic output curve of magnetic-air hybrid vibration isolator

4.2 电磁阻尼性能试验

本节对磁气混合隔振器通入不同的恒流电流源，分析磁气混合隔振系统的幅频曲线，验证其可调电磁阻力特性。对隔振器施加 0~200 Hz 的扫频激振信号，磁气混合隔振器分别通入 0~2 A(间隔 0.25 A)，以及−2~0 A(间隔 0.25 A)的电流，分析磁气混合隔振

系统平台的加速度信号的功率谱幅频特性，验证磁气混合隔振系统的调节阻尼性能，试验结果如图 14 和图 15 所示。

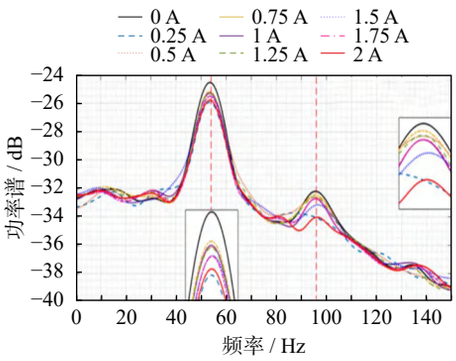


图 14　0~2 A 电流情况下磁气混合隔振器输出功率谱

Fig. 14　Output power spectrum of magnetic-air hybrid vibration isolator under 0~2 A

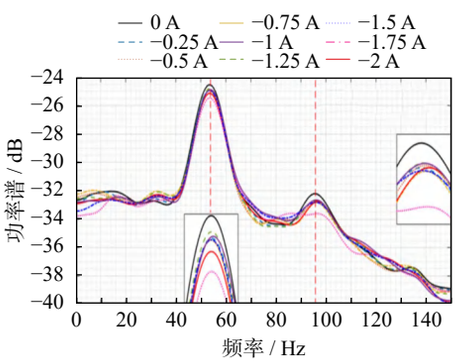


图 15　0~−2 A 电流情况下磁气混合隔振器输出功率谱

Fig. 15　Output power spectrum of magnetic-air hybrid vibration isolator under 0~−2 A

从图 14 试验结果分析可知，不同电流可影响磁气混合隔振系统的固有频率处幅值，具有一定的电磁阻尼调节性能，即改变系统阻尼。其主要对一阶和二阶的幅值有影响。对功率谱一阶幅值进行分析，电流为 0 A 时，幅值最大；电流为 0.25 A 时，幅值最小。0.5 A、0.75 A 和 1 A 电流对应的幅值较为接近，即在此附近电流对共振幅值影响变化较小，但相对于未通电流被动系统依然具有较好的削峰性能；电流在 1.25~2 A 内，随着电流增大，峰值逐渐减小。电流变化对系统二阶影响规律与一阶近似，但在 1.25~2 A 之间，随着电流的增大，峰值先增大后减小；影响峰值的同时，对二阶对应的频率也有微小的影响。整体分析，无论电流为多少，一、二阶幅值如何变化，对比未通电流 (0 A) 情况，其都具有削峰特性。

图 15 为 0~−2 A 电流情况下磁气混合隔振系统功率谱曲线，从图中结果分析，电流为 0 A 时，一、二阶处功率谱幅值最大，其他负电流情况都小于此，即在负电流情况下，系统依然具有共振幅值削减性能。电流为−1.5 A 时，一、二阶幅值最小。在 0~−1 A 电流范围，一、二阶处幅值随着负电流的增大而减小；在−1.5~−2 A 电流范围，一、二阶处幅值随着负电流的增大而增大。结合图 13 综合分析，无论电流为正负，磁气混合隔振系统都具有一定的削峰特性；电流对系统性能的影响并不是线性的，存在强烈的非线性特性；在 [−2 A,2 A] 范围内，磁气混合隔振系统的功率谱大约有 2 dB(减至原功率的 63%) 的减振效果。

综上电磁阻尼特性试验，本文设计的磁气混合隔振系统具有系统参数控制性能，虽然验证效果并不佳 (仅有 2 dB)，但具有一定的工程价值。

5　总　结

本文设计了气囊内置和电磁外置的一体式磁气混合隔振器。从瞬态磁场角度分析了通电线圈对磁场的影响特性，结果表明电流对磁场的影响在 2% 以内；从静态磁场角度着重分析了结构参数对磁场的影响规律，永磁体轴向尺寸与径向尺寸的拐点为设计最佳点，永磁体保护环为永磁体径向尺寸的 10%~20% 为最佳。探究了被动工作模型和主动工作模型下，电磁单元的幅频响应和电磁输出力特性。研制了磁气混合隔振器，测试了磁气混合隔振器电磁静态力、动态响应与阻尼性能，结果表明：优化后的静态力与仿真误差在 3% 左右，隔振器具有恒定电流可调阻尼性能 (2 A-2 dB 调节效果)。

参考文献：

[1]　李彦，何琳，帅长庚，等. 船舶机械磁悬浮气囊混合隔振技术 [J]. 声学学报，2015，40(5)：751-760.
LI Yan，HE Lin，SHUAI Changgeng，et al. Vibration isolation technology for ship machinery using electromagnetic actuator and air spring[J]. Acta Acustica，2015，40(5)：751-760.

[2]　KIM H T，KIM C H，CHOI S B，et al. A novel triple-actuating mechanism of an active air mount for vibration control of precision manufacturing machines：experimental work[J]. Smart Materials and Structures，2014，23(7)：077003.

[3]　BERNAT J，KOŁOTA J. DEAP actuator composed of a soft pneumatic spring bias with pressure signal sensing[J]. Energies，2021，14(4)：1189.

[4]　李斌，董万元，王小兵. 一种气动/电磁联合作动的主动隔振器设计与仿真 [J]. 西北工业大学学报，2013，31(6)：871-877.
LI Bin，DONG Wanyuan，WANG Xiaobing. Design and simulation of an active vibration isolator based on pneumatic-electromagnetic hybrid driving[J]. Journal of Northwestern

Polytechnical University，2013，31(6)：871-877.

[5] ZHOU N，LIU K. A tunable high-static-low-dynamic stiffness vibration isolator[J]. Journal of Sound and Vibration，2010，329(9)：1254-1273.

[6] WANG M，LI X Q，CHEN X D. Active hybrid control algorithm with sky-hook damping and lead-lag phase compensation for multi-DOFs ultra-low frequency active vibration isolation system[J]. Shock and Vibration，2017，2017(1)：1861809.

[7] ZHOU R，ZHOU Y F，CHEN X D，et al. Gravity compensation method via magnetic quasi-zero stiffness combined with a quasi-zero deformation control strategy[J]. Science China Technological Sciences，2022，65(8)：1738-1748.

[8] 何琳，李彦，杨军. 磁悬浮-气囊主被动混合隔振装置理论和实验 [J]. 声学学报，2013，38(2)：241-249.
HE Lin，LI Yan，YANG Jun. Theory and experiment of passive-active hybrid vibration isolation mounts using electromagnetic actuator and air spring[J]. Acta Acustica，2013，38(2)：241-249.

[9] 马建国，帅长庚，李彦. 主动控制用大输出力电磁作动器优化设计 [J]. 应用力学学报，2018，35(1)：106-110.
MA Jianguo，SHUAI Changgeng，LI Yan. Optimization design of electromagnetic actuator with large output force for active control[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics，2018，35(1)：106-110.

[10] 马建国，帅长庚，李彦. 电磁-气囊主被动混合隔振系统抗冲击设计研究 [J]. 船舶力学，2021，25(1)：120-127.
MA Jianguo，SHUAI Changgeng，LI Yan. Anti-shock design for active-passive vibration isolation using electromagnetic actuator and air spring[J]. Journal of Ship Mechanics，2021，25(1)：120-127.

[11] SONG C S，XU B H，FAN X F，et al. Design，analysis，control simulation，and experiment of novel electromagnetic hybrid vibration absorber[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers，Part C：Journal of Mechanical Engineering Science，2022，236(6)：2740-2755.

[12] 宋春生，江友亮，马欣，等. 一种自测速度可调高度磁气混合隔振器：CN202210936508.7[P]. 2024-04-16.

[13] 邬明宇，李雪冰，尹航，等. 空气弹簧动刚度模型关键非线性参数辨识及动态特性研究 [J]. 机械工程学报，2022，58(1)：88-96.
WU Mingyu，LI Xuebing，YIN Hang，et al. Identification of key nonlinear parameters and research on dynamic characteristics of air spring dynamic stiffness model[J]. Journal of Mechanical Engineering，2022，58(1)：88-96.

第一作者：江友亮(1993—)，男，博士，助理研究员。
E-mail：yl_jiang_edu@163.com

通信作者：宋春生(1981—)，男，博士，教授。
E-mail：song_chsh@163.com

耦合曲轴振动的柴油机翻边轴瓦润滑性能分析

施佳皓[1,2]，赵 滨[2]，徐含章[3]，张宇祥[4]，刘 洋[4]，解忠良[5]，卢熙群[2]，郭怀谦[2]

（1. 哈尔滨工业大学苏州研究院，江苏 苏州 215104；2. 哈尔滨工程大学动力与能源工程学院，黑龙江 哈尔滨 150001；
3. 福建省能源材料科学与技术创新实验室（IKKEM），福建 厦门 361005；4. 武汉第二船舶设计研究所，湖北 武汉 430061；
5. 西北工业大学力学与交通运载工程学院，陕西 西安 710072）

摘要：翻边轴瓦是一种集径向与止推功能于一体的特殊滑动轴瓦，在恶劣工况下，其径向与止推部分同时承载，使得润滑性能受径向-止推双结构耦合效应及曲轴振动的综合影响。为更加精准地阐释动载工况下翻边轴瓦的瞬态润滑特性，提升其运行可靠性，本研究基于径向-止推交界面的滑油热、压力、流量连续性条件构建了翻边轴瓦双结构润滑耦合关系，建立了考虑径向-止推耦合润滑效应的翻边轴瓦瞬态热弹流混合润滑模型，在此基础上，以时变油膜刚度作为耦合媒介，形成了曲轴振动与翻边轴瓦润滑的双向耦合分析方法，并分析了曲轴振动对轴瓦润滑特性的影响。结果表明，与传统将曲轴振动与轴瓦润滑分开求解的方法相比，该模型得到的翻边轴瓦在工作周期内的润滑性能曲线形状发生改变，同时周期最大油膜压力有所降低，周期最小油膜厚度有所增加，基于该模型可为曲轴翻边轴瓦高精度润滑计算提供更加完善的理论支撑和方法工具。

关键词：瞬态分析；热弹流润滑；曲轴振动；耦合作用；翻边轴瓦
中图分类号：TH133.31 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508036

Analysis of lubrication performance for journal-thrust coupled bearings in diesel engines with coupled crankshaft vibration

SHI Jiahao[1,2], ZHAO Bin[2], XU Hanzhang[3], ZHANG Yuxiang[4], LIU Yang[4], XIE Zhongliang[5], LU Xiqun[2], GUO Huaiqian[2]

（1.Harbin Institute of Technology Suzhou Research Institute，Suzhou 215104，China；2.College of Power and Energy Engineering，Harbin Engineering University，Harbin 150001，China；3.Innovation Laboratory for Sciences and Technologies of Energy Materials of Fujian Province（IKKEM），Xiamen 361005，China；4.Wuhan Second Ship Design and Research Institute，Wuhan 430061，China；5.School of Mechanics and Transportation Engineering，Northwestern Polytechnical University，Xi'an 710072，China）

Abstract: The journal-thrust coupled bearing is a special type of sliding bearing that integrates journal and thrust parts. Under harsh operating conditions，its journal and thrust parts bear loads simultaneously，causing the lubrication performance to be affected by the combined influence of the journal-thrust dual-structure coupling effect and crankshaft vibration. To more accurately elucidate the transient lubrication characteristics of the journal-thrust coupled bearing under dynamic loading conditions and enhance its operational reliability，this study established a dual-structure lubrication coupling relationship for the journal-thrust coupled bearing based on the continuity conditions of oil temperature，pressure，and flow at the journal-thrust interface. A transient thermal elastohydrodynamic mixed lubrication model was developed，considering the journal-thrust coupled lubrication effect. Based on this，a bidirectional coupling analysis method for crankshaft vibration and the lubrication of journal-thrust coupled bearings was established using time-varying oil film stiffness as the link，and the influence of crankshaft vibration on the bearing lubrication characteristics was analyzed. The results show that，compared to traditional methods that solve crankshaft vibration and bearing lubrication separately，the lubrication performance curve of the journal-thrust coupled bearing over its operating cycle changes in shape when obtained using this model. Additionally，the maximum oil film pressure per cycle decreases，while the minimum oil film thickness per cycle increases. This model provides a more comprehensive theoretical foundation and methodological tool for high-precision lubrication calculations of crankshaft journal-thrust coupled bearings.

Keywords: transient analysis; thermal elastohydrodynamic lubrication; crankshaft vibration; coupled effect; journal thrust coupled bearing

柴油机翻边轴瓦是一种位于曲轴末端的特殊结构轴瓦，在柴油机实际运行过程中，其工作条件较为恶劣，特别是当曲轴受到轴向冲击载荷时，翻边轴瓦不仅需同时承受轴向与径向载荷，还面临高载荷、

收稿日期：2025-08-13；**修订日期：**2025-10-15
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52271312）；黑龙江省自然科学基金优秀青年项目（YQ2024E037）

高温及高频振动等挑战。为此，需建立高精度的翻边轴瓦润滑分析模型，以准确评估其润滑性能、提升装备可靠性。

翻边轴瓦由径向和止推两部分组成，故对径向轴瓦和止推轴瓦润滑特性的研究是构建其润滑模型的基础。目前，传统径向/止推轴瓦的润滑研究已相对成熟，现有模型可系统考虑流（流体动力润滑）、固（粗糙接触和热弹性变形）和热（对流和传导）因素的耦合效应。基于此，学者们通过探究径向-止推部分间的耦合关系，持续推进翻边轴瓦润滑特性的研究。JANG 等[1]对翻边轴瓦的润滑特性进行了初步研究，提出了径向-止推部分共同边界条件在润滑性能分析中的作用。随后，WANG 等[2]针对重型机械中的翻边轴瓦，采用保角映射将止推面环形域转换为径向扩展矩形域，实现三维问题向二维平面的简化，并基于统一计算域，在公共边界上建立流量与压力连续性方程，构建了考虑压力-流量耦合效应的径向-止推轴瓦流体动压（HD）润滑模型，揭示了耦合效应对润滑性能的影响。为了进一步提高模型精度，XIANG 等[3-4]考虑了轴瓦弹性变形，建立了船用艉轴翻边轴瓦的弹流润滑（EHD）模型，并在此基础上，基于微扰动法对翻边轴瓦刚度和阻尼进行了初步探索。研究表明，考虑流量和压力耦合效应会导致径向和止推部件的压力分布、承载能力、刚度和阻尼发生显著变化。此外，文献 [5-6] 也发展了稳态热流体动压（THD）模型，研究表明，共同边界处的温度变化会同步扰动径向与止推部分的油膜温度，热耦合是影响润滑性能的另一关键因素。综合来看，现有翻边轴瓦润滑研究的考虑因素相对单一，未形成考虑较为全面的润滑模型，关于径向-止推交界面热量、压力和流量耦合作用下翻边轴瓦瞬态润滑性能的研究较少。

对于柴油机轴瓦，其润滑性能受曲轴动力学行为影响显著：一方面承受活塞爆发压力传递的时变载荷，另一方面受曲轴振动位移的几何边界扰动。为更精确地模拟轴瓦润滑状态，学者们针对曲轴振动响应开展了深入研究。在振动计算方法方面，包括集总参数法[7]、传递矩阵法[8]、伽辽金法[9]和瑞利-里兹法[10]在内的分析方法已被广泛应用，这些方法能有效预测曲轴多模式振动的耦合效应。而关于振动对润滑的影响研究，从早期简化的物理模型（滑块模型[11-12]和板球模型[13]），逐步扩展至实机曲轴轴瓦系统（径向轴瓦和止推轴瓦[14-15]），深化了振动影响机制的认知。另一方面，轴瓦润滑状态决定的支撑特性作为振动传输关键参数，会显著改变系统固有频率[16]与振动响应[17]，形成润滑-振动的反馈闭环。目前，将轴瓦支撑特性纳入振动分析的研究取得了一定的进展，从前期基于线性或非线性弹簧/阻尼单元[18]，到采用润滑理论计算[19]，随着润滑理论的引入，相关研究获取轴瓦支撑特性的精度越来越高[20]。在此基础上，WEI 等[21]和李正文等[22]将柔性曲轴动力学与轴瓦弹流润滑相结合，以动态油膜力作为耦合参量，探讨了润滑性能与振动行为之间的相互作用机制。综上所述，现有研究多为单向耦合，即仅考虑曲轴振动对润滑间隙位移的影响，或考虑轴瓦润滑导致的曲轴振动性能变化，尚不清楚曲轴振动与轴瓦润滑间的双向耦合机制。

柴油机翻边轴瓦的运行工况较为恶劣，滑油工作温度较高，因此润滑模型中有必要考虑时变多向的瞬态载荷特征与滑油热效应。此外，曲轴振动导致的瞬态位移响应直接影响轴颈径向倾角与轴向窜动量，导致翻边轴瓦径向与止推部分润滑间隙的变化。因此，一方面需要建立适用于柴油机翻边轴瓦、考虑径向-止推耦合润滑效应的热弹流混合润滑模型，另一方面需构建曲轴振动与翻边轴瓦瞬态润滑间的双向耦合关系，最终实现对实机动载工况下翻边轴瓦润滑性能的准确模拟。为此，本研究基于径向-止推交界面滑油热量-压力-流量连续性条件构建了翻边轴瓦耦合润滑关系，通过考虑倾斜轴颈与止推肩的协同运动条件建立了翻边轴瓦瞬态润滑模型，以轴瓦时变刚度为耦合媒介形成了双向耦合的轴系振动-润滑交互作用分析模型。

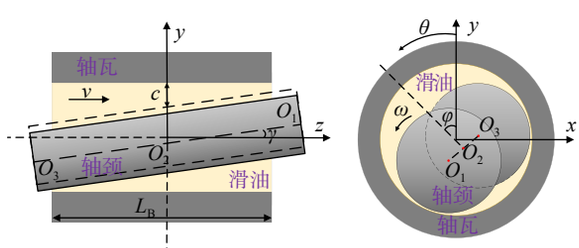
1 理论模型

1.1 翻边轴瓦润滑模型

1.1.1 膜厚方程

翻边轴瓦径向部分的膜厚示意图如图 1 所示，图 1（a）和（b）分别为径向部件的径向视图和轴向视图，图中 O_1、O_2 和 O_3 分别为轴颈前端、中部和后端截面的圆心位置。模型中考虑了轴颈倾角和轴向速度，最终径向部分的油膜厚度 h_{J} 表示为：

$$h_{\mathrm{J}} = c + e\cos(\theta-\varphi) + \tan\gamma\cos(\theta-\varphi)\left(Y - \frac{L_{\mathrm{B}}}{2} + V\Delta t\right) + h_{\mathrm{JE}} + h_{\mathrm{JT}} \tag{1}$$



(a) 径向视图 (a) Radial view　　(b) 轴向视图 (b) Axial view

图 1 径向部分膜厚示意图

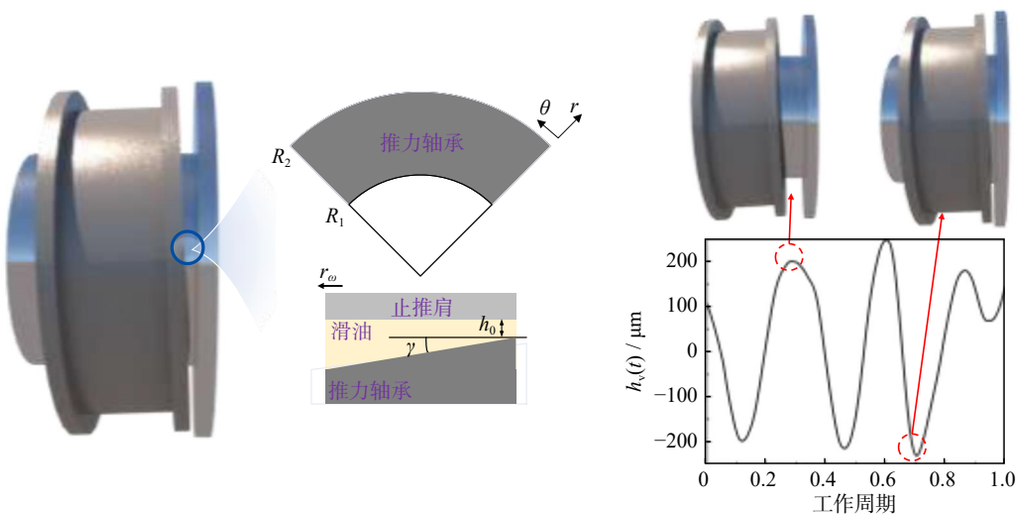
Fig. 1 Schematic diagram of journal part film thickness

式中，c 为径向间隙；e 为偏心距；θ 和 φ 分别为径向部分的周向坐标和偏位角；γ 为轴颈的倾斜角度；Y 为轴向位置；L_B 为轴瓦轴向宽度；V 为轴向速度；h_{JE} 和 h_{JT} 分别为径向部分轴瓦的弹性变形和热变形。

在柴油机的实际工作条件下，曲轴会因轴向力而产生横向振动，导致轴颈发生轴向位移，止推部分油膜厚度产生相应变化。图 2(a)为止推部分油膜厚度示意图，图 2(b)表示曲轴纵振计算得到的止推部分轴向位移的周期性变化。止推部分膜厚度 h_T 表示为：

$$h_T(t)=h_0+r\sin\gamma\cos\theta+h_{TE}+h_{TT}+h_v(t) \tag{2}$$

式中，h_0 为轴向间隙；r 为止推部分径向坐标；h_{TE} 和 h_{TT} 分别为止推部分轴瓦的弹性变形和热变形；$h_v(t)$ 为轴颈的时变位移。



(a) 油膜厚度示意图
(a) Schematic diagram of film thickness

(b) 轴向位移周期变化情况
(b) Periodic variation of axial displacement

图 2　止推部分油膜厚度

Fig. 2　Film thickness of thrust part

1.1.2　雷诺方程

采用 PATIR 等[23]推导的平均雷诺方程来描述混合润滑下各部分的压力油膜厚度关系，径向与止推部分的稳态平均雷诺方程如下：

$$\frac{\partial}{R_0^2\partial\theta}\left(\phi_\theta\frac{\rho h_J^3}{\eta}\frac{\partial P_J}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\phi_z\frac{\rho h_J^3}{\eta}\frac{\partial P_J}{\partial z}\right)=\frac{6\rho U_J}{R_0}\left(\phi_c\frac{\partial h_J}{\partial\theta}+\sigma\frac{\partial\phi_s}{\partial\theta}\right)+12\rho\frac{\partial h_J}{\partial t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\phi_\theta\frac{\rho h_T^3}{\eta}\frac{\partial P_T}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\phi_r\frac{r\rho h_T^3}{\eta}\frac{\partial P_T}{\partial r}\right)=6\omega r\rho\left(\phi_c\frac{\partial h_T}{\partial\theta}+\sigma\frac{\partial\phi_s}{\partial\theta}\right)+12\rho\frac{\partial h_T}{\partial t} \tag{4}$$

式中，P_J 为径向部分油膜压力；R_0 为径向部分轴瓦内径；ϕ_θ、ϕ_z、ϕ_c 和 ϕ_s 分别为周向压力流量因子、轴向压力流量因子、接触因子和剪切流量因子；ρ 为滑油密度；η 为滑油黏度；ω 为轴颈旋转角速度；σ 为综合表面粗糙度；P_T 为止推部分油膜压力；ϕ_r 为径向压力流量因子。

1.1.3　能量方程

为了精确计算润滑工作特性，本研究采用瞬态能量方程[24-25]来描述滑油的热效应：

$$\rho C_p\left(\frac{v_J}{r}\frac{\partial T_J}{\partial\theta}+w_J\frac{\partial T_J}{\partial z}+\frac{\partial T_J}{\partial t}\right)=\alpha T\left(w_J\frac{\partial P_J}{\partial z}+v_J\frac{\partial P_J}{r\partial\theta}\right)+k_l\frac{\partial^2 T_J}{\partial r^2}+\mu\left[\left(\frac{\partial u_J}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_J}{\partial z}\right)^2\right] \tag{5}$$

$$\rho C_p\left(U_r\frac{\partial T_T}{\partial r}+\frac{U_\theta}{r}\frac{\partial T_T}{\partial\theta}+\frac{\partial T_T}{\partial t}\right)=\alpha T\left(U_r\frac{\partial P_T}{\partial r}+U_\theta\frac{\partial P_T}{r\partial\theta}\right)+k_l\frac{\partial^2 T_T}{\partial z^2}+\mu\left[\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right)^2\right] \tag{6}$$

该方程可分为 4 个部分，从左到右依次为热对流项、压力功项、热传导项和内部热源项。方程中，T_J 为径向部分油膜的温度；C_P 为恒压下的比热容；v_J 为润滑剂在径向部分的圆周流速；w_J 为润滑剂的轴向流速；α 为润滑剂的热膨胀系数；k_l 为润滑剂的导热率；u_J 为润滑剂在径向部分的径向流速。同时，T_T 为止推部分油膜的温度；U_r 为止推部分润滑剂的径向流速；U_θ 为止推部分润滑油的周向流速。

1.1.4　连续性边界

由于翻边轴瓦的独特结构，止推轴瓦部分的滑油径向流动与径向轴瓦部分的滑油轴向流动相互连通，因此需要建立两部分流动之间的连续性条件。在径向-止推交界面处，油膜压力是连续的，即满足：

$$(P_J)_{j,m}=(P_T)_{j,m} \tag{7}$$

式中，下标 j 和 m 分别表示径向部分与止推部分交

界区域的周向坐标和轴向(对应于径向部分)/径向(对应于止推部分)坐标。在公共边界处,需要保证径向部分与止推部分的流量相同,而周向流动连续显然满足,因此只需要确保止推部分的径向流和径向部分的轴向流之间的连续性,如下式所示:

$$\left(\frac{h_{\mathrm{J}}^3}{12\eta}\frac{\partial P_{\mathrm{J}}}{\partial z}\right)_{j,m}=\left(\frac{h_{\mathrm{T}}^3}{12\eta}\frac{\partial P_{\mathrm{T}}}{\partial r}\right)_{j,m} \tag{8}$$

类似的,各部分的热流量必须相等,要求止推部分的径向热通量和径向部分在界面处的轴向热通量之间保持连续,最终表达式如下:

$$\left(w_{\mathrm{J}}\frac{\partial T_{\mathrm{J}}}{\partial z}\right)_{j,m}=\left(U_{\mathrm{r}}\frac{\partial T_{\mathrm{T}}}{\partial r}\right)_{j,m} \tag{9}$$

1.2 曲轴振动模型

1.2.1 梁的纵弯扭振动的传递矩阵

本研究建立了基于传递矩阵法的振动模型,将曲轴系统划分为与曲柄销和主轴颈部分,每段轴都建模为梁单元。将每段的质量以集中质量块代替,并根据重心不变原则将质量块分配到轴上。轴瓦被简化为弹簧,以模拟弹性支撑。模型示意图(图 3)标记了节点($\boldsymbol{S}$)、传递关系($\boldsymbol{G}$)、轴瓦刚度($\boldsymbol{K}$)和集中质量($\boldsymbol{M}$)。采用 Timoshenko 梁理论(考虑转动惯量和剪切变形)推导梁振动的传递矩阵。

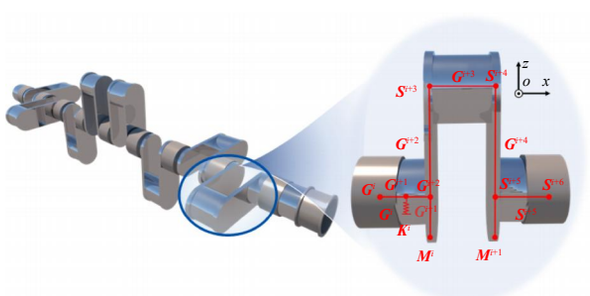


图 3 曲轴模型的简化示意图

Fig. 3 Schematic diagram of crankshaft model

纵振、扭振、x-z 平面内弯振和 x-y 平面内弯振单元传递矩阵用 $\boldsymbol{T}_x$、$\boldsymbol{T}_{\mathrm{tor}}$、$\boldsymbol{T}_{xz}$、$\boldsymbol{T}_{xy}$ 表示,传递关系如下:

$$[\boldsymbol{u}_l\ \boldsymbol{N}_l]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_x[\boldsymbol{u}_0\ \boldsymbol{N}_0]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

$$[\boldsymbol{\theta}_l\ \boldsymbol{T}_l]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{tor}}[\boldsymbol{\theta}_0\ \boldsymbol{T}_0]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$$[\boldsymbol{z}_l\ \boldsymbol{\varphi}_l\ \boldsymbol{M}_{yl}\ \boldsymbol{Q}_{zl}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_{xz}[\boldsymbol{z}_0\ \boldsymbol{\varphi}_0\ \boldsymbol{M}_{y0}\ \boldsymbol{Q}_{z0}]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$[\boldsymbol{z}_l\ \boldsymbol{\varphi}_l\ \boldsymbol{M}_{zl}\ \boldsymbol{Q}_{yl}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_{xy}[\boldsymbol{z}_0\ \boldsymbol{\varphi}_0\ \boldsymbol{M}_{z0}\ \boldsymbol{Q}_{y0}]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

式中,$\boldsymbol{u}_l$ 和 $\boldsymbol{u}_0$ 分别为轴段两端的轴向位移;$\boldsymbol{N}_l$ 和 $\boldsymbol{N}_0$ 分别为轴段两端的轴向力;$\boldsymbol{\theta}_l$ 和 $\boldsymbol{\theta}_0$ 分别为轴段两端的扭转角;$\boldsymbol{T}_l$ 和 $\boldsymbol{T}_0$ 分别为轴段两端的扭矩;$\boldsymbol{\varphi}_l$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 分别为轴段两端的弯曲转角;$\boldsymbol{M}_l$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 分别为轴段两端的弯曲方向的弯矩;$\boldsymbol{Q}_l$ 和 $\boldsymbol{Q}_0$ 分别为轴段两端弯曲方向的剪切应力。

综上所述,梁多向振动涉及的状态变量 $\boldsymbol{S}$ 如下:

$$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\theta}\ \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{\varphi}\ \boldsymbol{M}_z\ \boldsymbol{Q}_y\ \boldsymbol{z}\ \boldsymbol{\phi}\ \boldsymbol{M}_y\ \boldsymbol{Q}_z]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

相邻关键点之间的纵弯扭振动传递关系如下:

$$\boldsymbol{S}_{i+1}=\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{S}_i=\mathrm{diag}\left((\boldsymbol{T}_x)_i,\ (\boldsymbol{T}_{\mathrm{tor}})_i,\ (\boldsymbol{T}_{xz})_i,\ (\boldsymbol{T}_{xy})_i\right)\boldsymbol{S}_i \tag{15}$$

除了梁单元外,还对曲轴系统中的其他部件进行了等效建模,包括飞轮、轴向阻尼器和轴瓦支撑。这些部件可分为两类,包括等效弹性支撑(如轴向阻尼器和轴瓦支撑)和等效集中质量(如飞轮)。其中,弹性支撑的传递矩阵用 $\boldsymbol{T}_k$ 表示,集中质量的传递矩阵用 $\boldsymbol{T}_m$ 表示。

此外,在实际柴油机曲轴系统中,各档曲拐之间存在相位差,即各档曲拐的空间坐标系存在差异,为了统一计算,需要将局部坐标系转化为全局坐标系。各状态变量局部坐标绕 x 轴旋转 α 角度的转化矩阵用 $\boldsymbol{H}_x$ 表示,绕 y 轴旋转 β 角度的转化矩阵用 $\boldsymbol{H}_y$ 表示。

1.2.2 基于传递矩阵法的曲轴振动求解

通过对每个部件的传递矩阵进行顺序乘法,表征从前端到后端的动态传递关系,建立曲轴系统的动态模型。以自由端为起点,首先,使用前面描述的坐标变换方法将每个曲柄行程的传递矩阵转换为全局坐标系。然后将这些变换后的矩阵依次相乘,同时结合飞轮的集总质量,最终得到曲轴系统的动态模型方程如下:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{output}}&=\boldsymbol{G}_{\mathrm{system}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{free}}=\\&\boldsymbol{T}_m\boldsymbol{H}_x^8\boldsymbol{G}_{\mathrm{crank}}^8\boldsymbol{H}_x^7\boldsymbol{G}_{\mathrm{crank}}^7\cdots\boldsymbol{H}_x^1\boldsymbol{G}_{\mathrm{crank}}^1\boldsymbol{S}_{\mathrm{free}}\end{aligned} \tag{16}$$

式中,$\boldsymbol{G}_{\mathrm{system}}$ 为在两端应用边界条件后导出的齐次线性方程的系数矩阵;$\boldsymbol{S}_{\mathrm{free}}$ 为自由端节点矩阵;$\boldsymbol{G}^i_{\mathrm{crank}}$ 为曲拐传递矩阵,上标 i 从 1 到 8 对应 8 个曲拐。

通过求解系统动力学方程的系数行列式,可以得到系统的固有频率。将得到的固有频率代入系数矩阵 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{system}}$ 中,求解矩阵的特征值得到每个曲轴截面的振型函数。对各轴段的振型函数进行正则化处理,分别在纵弯方向进行积分,考虑集中质量和弹簧系统的影响,最终通过累加得到广义质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和广义刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$。

在上述研究基础上,进一步开展曲轴强迫振动下的响应计算,轴系的强迫振动的运动方程如下:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F} \tag{17}$$

1.3 曲轴振动与轴瓦润滑耦合机制

曲轴振动与轴瓦润滑的耦合包括两个方面:基于传递矩阵法的曲轴振动模型、考虑热-压-流耦合效应的径向-止推轴瓦热弹流混合润滑模型。通过对曲轴系统强迫振动求解,得到轴系纵向和弯曲方

向振动位移响应 Δx 和 Δz，其直接影响轴颈时变轴向速度和时变倾角：

$$\begin{cases} V=\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \tan\gamma=\dfrac{\Delta z_i-\Delta z_{i-1}}{L_{\mathrm{B}}} \end{cases} \tag{18}$$

式中，Δz 的下标 i 和 i–1 对应径向-止推轴瓦前后两节点，膜厚方程修正得到：

$$h_{\mathrm{J}}=c+e\cos(\theta-\varphi)+h_{\mathrm{JE}}+h_{\mathrm{JT}}+\frac{\Delta z_i-\Delta z_{i-1}}{L_{\mathrm{B}}}\cos(\theta-\varphi)\left(Y-\frac{L_{\mathrm{B}}}{2}+\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t\right) \tag{19}$$

在此基础上开展径向-止推轴瓦瞬态润滑计算并获取时变刚度 K_x、K_y、K_z，作为下一时刻的轴瓦支撑特性，用来更新曲轴振动计算中的刚度矩阵。

更新时变刚度矩阵代入曲轴强迫振动模型，开展下一时刻轴瓦润滑计算。综上所述，本研究模型的耦合关系体现在：曲轴的振动通过轴颈时变参数（速度、倾角）改变轴瓦润滑边界条件，导致润滑膜特性动态变化；润滑膜动态特性（刚度）反馈至轴系振动模型，修正传递矩阵的动力学参数，形成双向耦合作用，具体公式和耦合关系如图 4 所示。

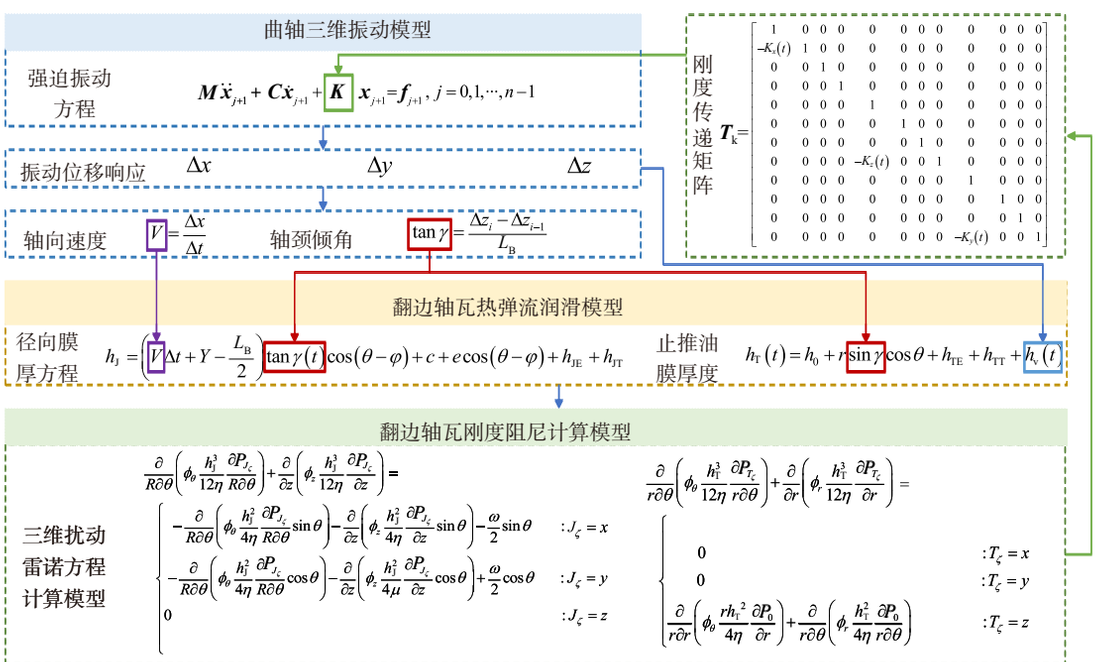


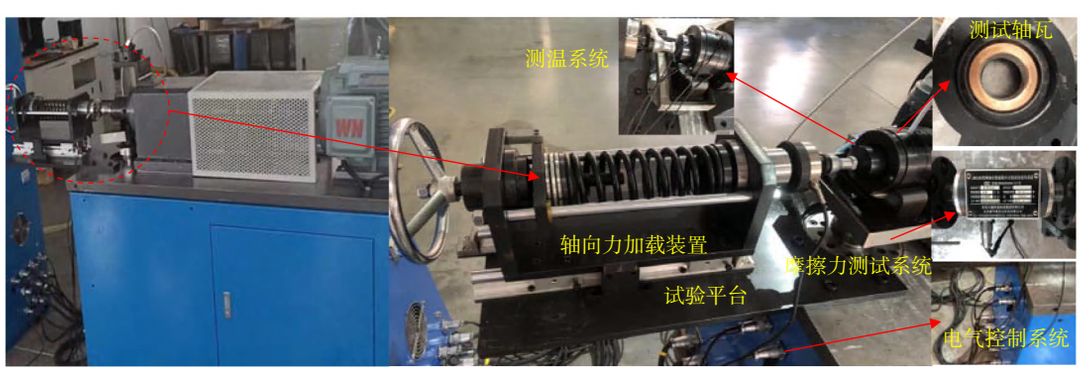
图 4　曲轴振动与翻边轴瓦润滑耦合示意图

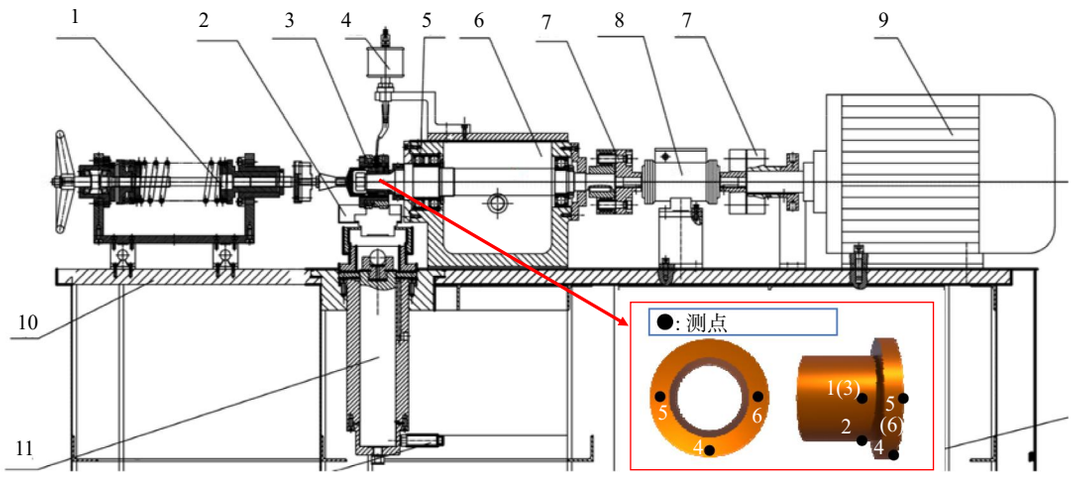
Fig. 4　Coupling diagram of crankshaft vibration and journal-thrust coupled bearing lubrication

2　模型验证

本研究分别对润滑模型和振动模型进行了验证。其中，润滑模型通过在翻边轴瓦摩擦学试验台上的瞬态测试进行验证。试验台的结构示意图如图 5 所示。试验采用 JN338 型扭矩转速传感器测量轴颈转速与摩擦扭矩，进而计算摩擦系数，同时使用 PT100 电阻温度检测器监测轴瓦表面温度。试验中施加了幅值为 6 kN 的正弦径向载荷和 300 N 的恒定轴向载荷，其余试验参数见表 1。

试验结果与模拟计算结果的对比如图 6(a)所示，结果表明，热-压-流耦合模型、传统模型和试验摩擦系数值趋势一致，分别为 0.0215、0.0254 和 0.0198。与传统模型相比，热-压-流耦合模型在相同加载条件下的摩擦系数更小，更接近试验值，最大误差约为 6%。在测试操作稳定后，将循环结束时每个测量点





1-轴向力加载装置; 2-接油盒; 3-试验夹具; 4-油壶; 5-被测轴瓦; 6-轴承座; 7-联轴器; 8-扭矩传感器; 9-电机; 10-工作台; 11-径向力加载装置

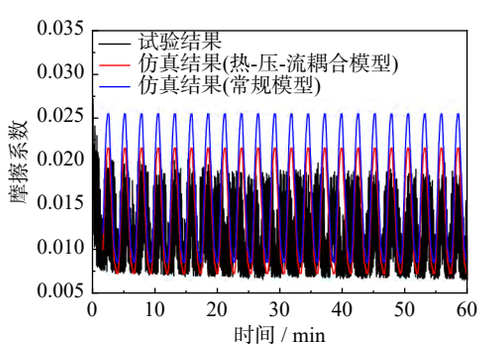
图 5 翻边轴瓦摩擦学试验台示意图

Fig. 5 Schematic of test rig for journal-thrust coupled bearing

表 1 润滑试验参数

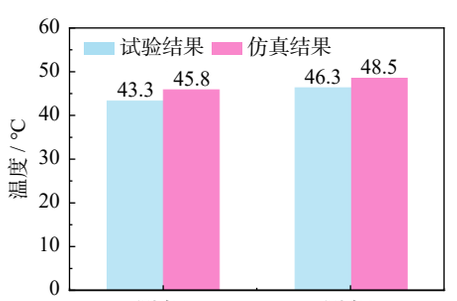
Tab. 1 Lubrication test parameters

参数	数值
径向部分内径/mm	40
止推部分外径/mm	60
倾斜角/(°)	0.01
转速ω/(r·min^{-1})	500
滑油黏度η_0/(Pa·s)	0.175
进油温度T_0/℃	35



(a) 摩擦系数

(a) Friction coefficient



(b) 测点温度

(b) Temperature

图 6 润滑性能参数验证结果

Fig. 6 Verification results of lubrication performance parameters

的温度数据与模拟值进行比较，验证结果如图 6(b)所示。径向和止推部件油膜温度的最大误差分别为 5.7% 和 4.8%，均低于 10%。所有计算结果与试验数据相比都存在合理的偏差，证实了热-压-流耦合模型在瞬态操作条件下的准确性。

本研究所建立的曲轴振动模型较为常规，通过与 ANSYS 软件结果对比以验证模型准确性，基于 ANSYS 对某柴油机曲轴模型进行有限元建模，开展瞬态分析，待结果稳定后输出第 1 档轴瓦处各向位移曲线，并与振动程序计算得到的位移仿真结果进行对比，相关计算材料设定如表 2 所示。

表 2 振动仿真设定参数

Tab. 2 Parameters for vibration simulation

参数	数值
轴颈材料密度/(kg·m^{-3})	7850
弹性模量/Pa	2.12×10^{11}
泊松比	0.3
轴瓦水平刚度/(N·m^{-1})	2×10^{9}
轴瓦轴向刚度/(N·m^{-1})	2×10^{9}
轴瓦垂向刚度/(N·m^{-1})	2×10^{8}

第 1 档轴瓦处各向振动位移结果如图 7(a)~(c)所示，可以发现程序计算得到的竖直位移、水平位移和轴向位移结果与 ANSYS 结果均吻合较好，在趋势和幅值上较为一致，表明了曲轴振动模型具有可信性，进而间接验证了耦合曲轴纵弯振动的翻边轴瓦润滑模型的准确性。

3 计算流程

振动模型的计算较为常规，在前述模型的基础

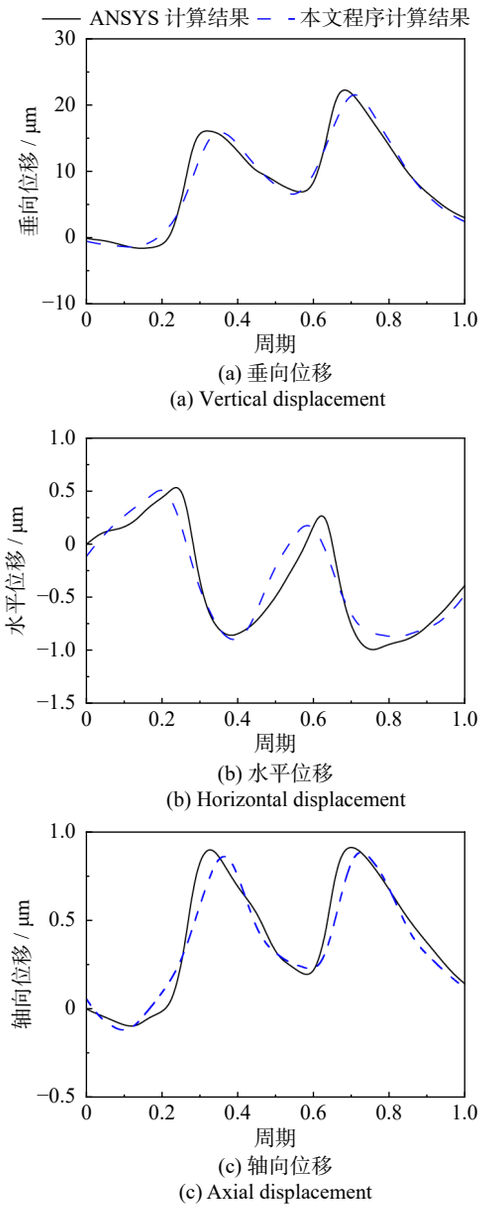


图 7　轴系振动位移验证结果

Fig. 7　Verification results of crankshaft vibration displacement

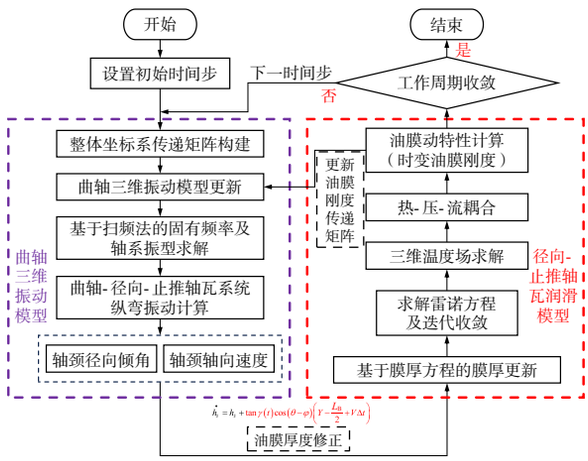
上通过传递矩阵法得到曲轴系统的动力学模型后，基于 Newmark-β 法求解得到曲轴的振动特性。翻边轴瓦的润滑计算较为复杂，除常规径向轴瓦与止推轴瓦的热弹流混合润滑计算外，还需考虑热-压-流耦合连续性方程，具体计算流程如下。

在仿真计算前，进行了网格无关性验证，检查了 72×20×4、88×20×4 和 104×20×4 的网格配置（在周向、轴向和径向上的网格数），结果表明各网格计算值之间的差异小于 10%，最终选择了 72×20×4 的网格分布。时间步长根据曲柄转角的转动角度划分，设置曲柄转角每转动 0.05°为一个时间步，时间步收敛判定依据设定为两个周期。首先分别单独建立径向和止推轴瓦的热弹流混合润滑模型，根据轴颈和径向轴瓦、止推肩和止推轴瓦的相对位置计算径向与止推部分的油膜厚度，基于迎风差分法对各部分压力场进行差分求解得到单独径向与单独止推轴瓦的油膜压力，接着基于伽辽金加权残值法进行各部分温度场的有限元求解，得到油膜及轴瓦温度，至此完成径向轴瓦与止推轴瓦热弹流混合润滑计算两部分内容。接下来，通过热-压-流耦合连续性方程建立径向和止推部分的耦合润滑关系，基于热连续性条件对各部分油膜温度进行耦合修正，将修正后的油膜温度作为边界条件代入单独径向和止推轴瓦润滑模型中进行计算；接着基于流量连续性条件对各部分油膜压力进行耦合修正，同样将修正后的油膜压力作为边界条件代入各部分润滑模型中，待温度场和压力场均收敛后输出计算结果，完成单个时间步的润滑计算。基于径向与止推部分的运动方程持续更新止推肩和轴颈的位置，进行多次迭代计算以满足工作周期。

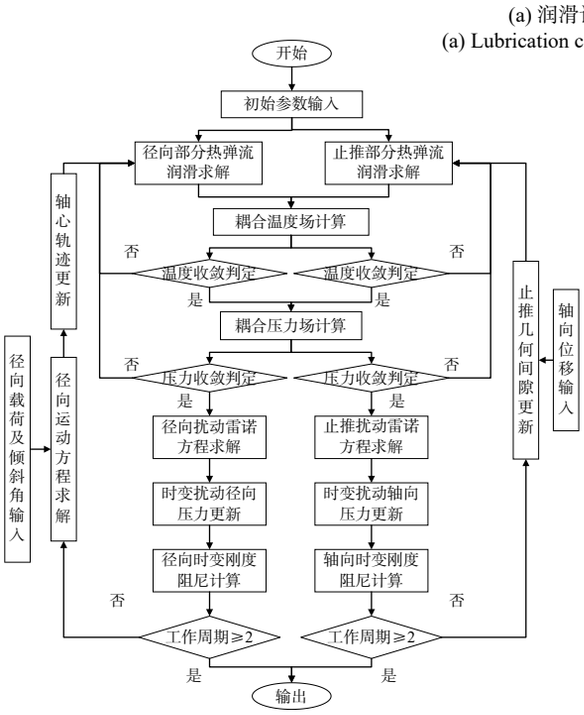
本研究所建立的曲轴振动-轴瓦润滑耦合模型为强耦合模型，首先调用径向-止推轴瓦润滑计算模块，通过假设径向-止推轴瓦与轴颈、止推肩的初始相对位置，基于润滑模型依次计算各部分初始时刻的油膜厚度、油膜压力与温度。在该时刻润滑计算末尾，基于所建立的刚度阻尼模型开展准稳态计算，获取当前时刻径向-止推轴瓦的三维时变刚度。接着，调用曲轴纵弯振动位移计算模块，将其作为时变支撑特性参数代入本研究建立的曲轴振动分析模型中，计算得到径向-止推轴瓦节点处的轴向位移以及径向位移，至此完成初始时刻曲轴振动与轴瓦润滑耦合计算。该过程将润滑状态转化为支撑刚度，进而影响振动位移，而计算出的位移又将作为下一时刻润滑计算的输入，从而形成了一个完整的“润滑-振动”双向耦合闭环，为下一时刻的迭代计算奠定了基础。之后切换到润滑模块，通过轴颈运动方程计算下一个时间步的轴颈位置，开展下一时刻的计算，基于曲轴振动计算得到的轴向位移计算轴向窜动速度；基于径向-止推轴瓦前后两节点的径向位移差计算径向-止推轴瓦的径向倾角。将上述参数与计算得到的轴颈位置参数输入润滑模块，进行下一时刻的润滑计算，至此实现曲轴纵弯振动对径向-止推轴瓦润滑的作用。重复上述操作直到完成整个工作周期计算，基于轴心轨迹闭合情况判定收敛性，最终实现曲轴纵弯振动与径向-止推轴瓦润滑的双向强耦合，计算流程如图 8 所示。

4　结果分析

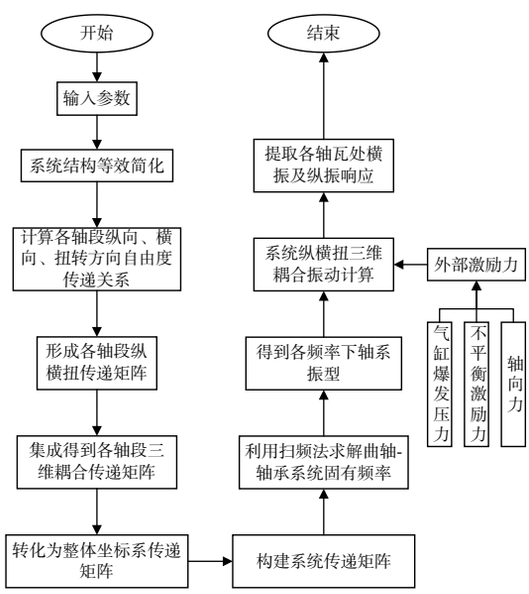
除本研究构建的双向耦合振动-润滑模型（CVL 模型）外，分析中还加入了仅考虑振动对润滑影响的常规模型（SVL 模型）。在 SVL 模型中，输入固定刚



(a) 润滑计算流程图
(a) Lubrication calculation flow chart



(b) 振动计算流程图
(b) Vibration calculation flow chart



(c) 振动-润滑耦合计算流程图
(c) Vibration-lubrication coupled calculation flow chart

图 8 模型求解计算流程图

Fig. 8 Calculation flowchart for solving the model

度值进行振动计算，未考虑轴瓦刚度对曲轴振动的反作用。各模型的命名及含义如表 3 所示。

表 3 模型简写及含义

Tab. 3 Model abbreviation and meaning

名称	定义
CVL模型	考虑轴瓦润滑计算得到的轴瓦时变刚度对曲轴振动的影响以及振动导致的轴颈倾斜及轴向速度对轴瓦润滑的反作用
SVL模型	润滑计算所需的轴颈倾斜及轴向速度通过设定的固定刚度值(10^8 N/m)基于曲轴振动计算得到

以某船用中速柴油机为主要研究对象，该机型柴油机曲轴系基本参数如表 4 所示。仿真中使用到的翻边轴瓦润滑计算相关参数如表 5 所示。

表 4 轴系基本参数

Tab. 4 Basic parameters of shaft system

参数	数值
缸径/mm	400
冲程/mm	460
缸数	16
连杆长度/mm	950

4.1 径向间隙

一个工作周期内不同径向间隙 c 下，径向部分和止推部分的最大油膜压力如图 9 所示。可以发现，CVL 模型下径向部分与止推部分的最大油膜压力均有降低，随着径向间隙增大，径向部分周期压力峰值分别降低 9.8%、9.6% 和 5.6%，止推部分分别降低

表 5　润滑计算相关参数

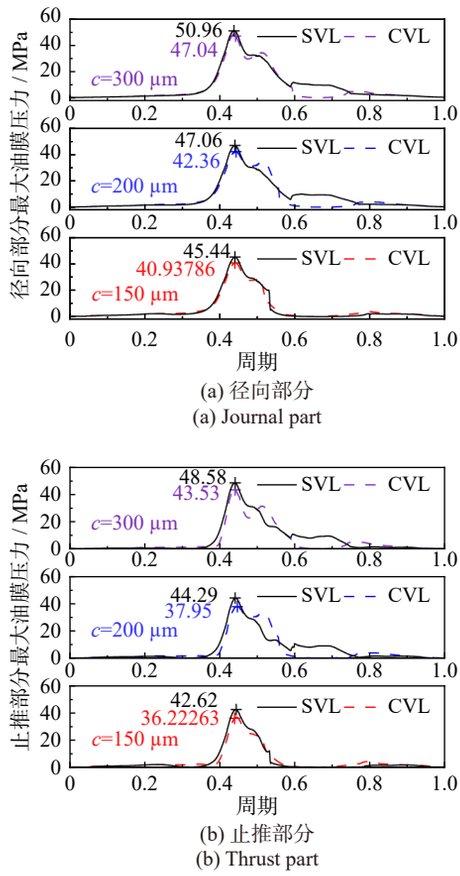
Tab. 5　Lubrication calculation parameters

参数	数值
偏位角φ/rad	0
轴瓦弹性模量E_J/GPa	10
轴瓦泊松比v_p	0.327
滑油黏度η_0/(Pa·s)	0.07
黏温系数β	−0.0491
轴瓦热膨胀系数k_p/K	1.2×10^{-5}
轴瓦热传导系数k_b/[W·(m·K)$^{-1}$]	47
轴瓦对流换热系数h_b/[W·(m^2·K)$^{-1}$]	80
滑油热传导系数k_t/[W·(m·K)$^{-1}$]	0.13
比热容C_p/[W·(m^2·K)$^{-1}$]	2000

13.3%、13.7% 和 9.8%。其原因是 CVL 模型中轴瓦刚度具有时变特性且在高压时刻显著升高，曲轴振动位移量减小，径向部分的倾角减小，止推部分的轴向间隙升高，因此各部分最大油膜压力均有降低。

当间隙为 200 μm 时，1/3 个工作周期位置时，径向及止推各部分油膜压力分布如图 10 所示。可以发现，考虑时变刚度与否对于各部分油膜压力的影响较为直观，随着径向间隙的增大，各部分油膜压力分布差异较大。其原因是考虑振动-润滑耦合效应后，润滑状态的变化影响轴承的实时刚度，进而影响曲轴纵弯振动位移，导致相同时刻的轴颈倾角和轴向间隙有所差异，并且轴颈倾角的差异直接导致各部分的油膜压力区域有所区别。

一个工作周期内，径向部分和止推部分的最小油膜厚度曲线如图 11 所示。由图 11(a)可知，对于径向部分，考虑时变刚度与否对润滑性能的影响，在膜厚较小时更为显著，且考虑时变刚度后，最小膜厚极小值有所升高，随着径向间隙的增大，考虑时变刚度后径向最小油膜厚度分别提升 10.4%、6.7% 和 10.5%。由图 11(b)可知，随径向间隙的增大，考虑时变刚度后，止推最小油膜厚度分别提升 22.2%、19.7% 和 9.6%。其原因是止推部分最小膜厚受曲轴纵振位移直接影响，考虑时变刚度后不同径向间隙下的轴瓦时变刚度不同，导致曲轴纵振出现差异。



(a) 径向部分
(a) Journal part

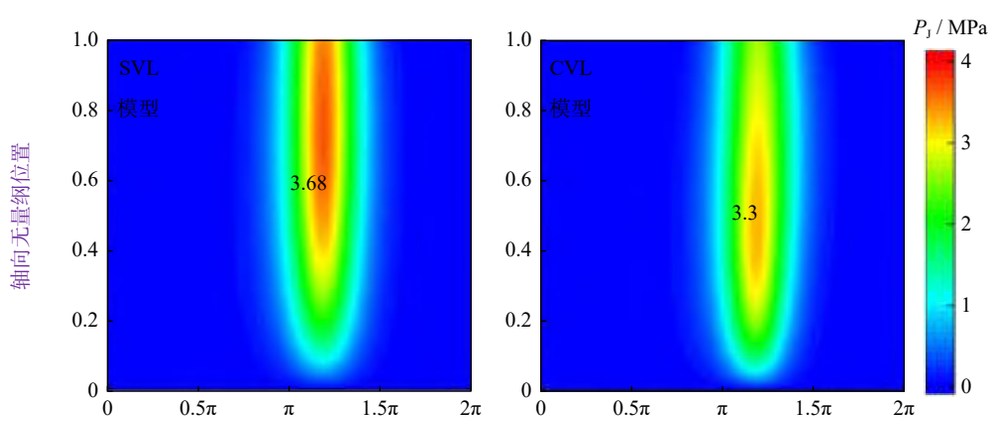
(b) 止推部分
(b) Thrust part

图 9　径向间隙对各部分最大油膜压力的影响

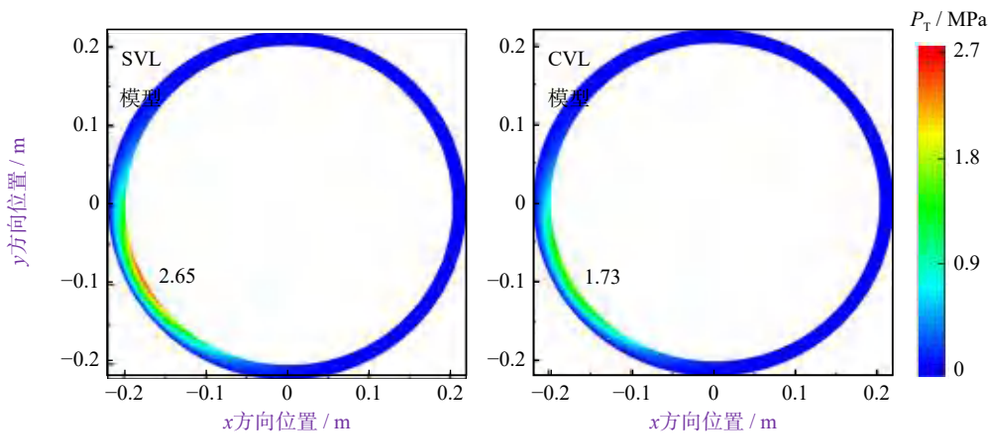
Fig. 9　The influence of radial clearance on the maximum film pressure of each part

4.2　转　速

根据船用中速柴油机的典型转速范围，选取了 500、700 和 900 r/min 进行分析，不同转速 ω 下各部分的最大油膜压力在周期内的变化如图 12 所示。由图 12(a)可知，随转速增大，考虑时变刚度后径向最大油膜压力分别降低 6.2%、5.4% 和 1.2%。当转速为 500 和 700 r/min 时，不同模型下，径向部分最大油



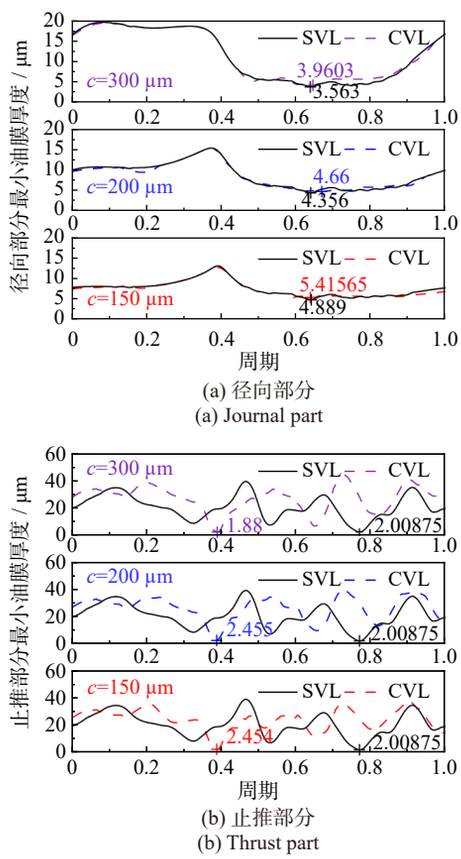
(a) 径向部分
(a) Journal part



(b) 止推部分
(b) Thrust part

图 10 1/3 周期时刻油膜压力分布

Fig. 10 Film pressure distribution at 1/3 cycle time

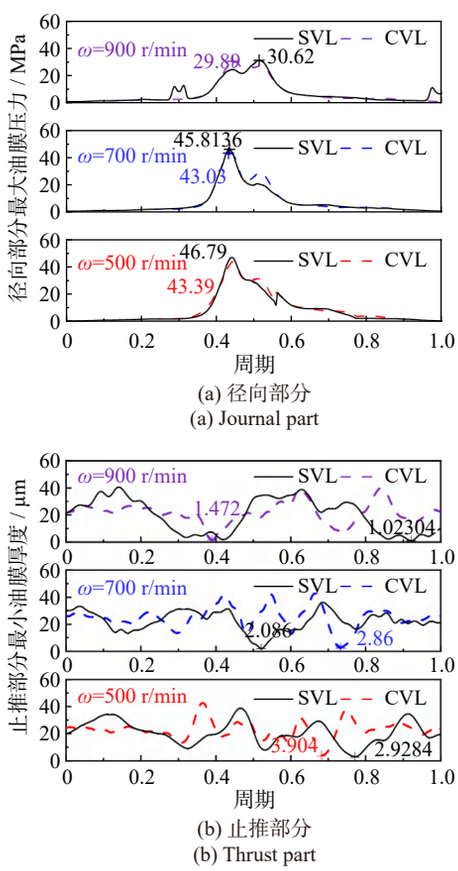


(a) 径向部分
(a) Journal part

(b) 止推部分
(b) Thrust part

图 11 径向间隙对各部分最小油膜厚度的影响

Fig. 11 The influence of radial clearance on the minimum film thickness of each part



(a) 径向部分
(a) Journal part

(b) 止推部分
(b) Thrust part

图 12 转速对各部分最大油膜压力的影响

Fig. 12 The influence of rotating speed on the maximum film pressure of each part

膜压力变化趋势大体一致；当转速为 900 r/min 时，考虑时变刚度后，径向部分最大油膜压力曲线显著变化，在周期首尾区域出现波动的同时，周期中间位置两个压力峰也有所变化。其原因是，高转速下径向部分压力较小而止推部分压力较大，在热-压-流耦合效应下，径向-止推交界面压力有所升高，进而导致径向部分的最大油膜压力增大。图 12(b)中对应止推部分的最大油膜压力曲线变化规律也类似，随转速增大，考虑时变刚度后，止推部分最大油膜压力分别降低 7.7%、3.9% 和 18.5%。此外，周期中间位置处变化较为平缓，周期首尾位置处止推部分油膜压力略高于径向部分，其原因是止推部分压力较径向部分更高。

一个工作周期内，径向部分和止推部分的最小油膜厚度曲线如图 13 所示。由图 13(a)可知，径向部分最小膜厚与上一节分析的结果类似，考虑时变

刚度后，周期最小膜厚有所升高，且随着转速的增大，周期径向部分最小膜厚增大，较常规模型结果分别提升 3.8%、2.8% 和 1.1%。由图 13(b)可知，转速对止推部分的膜厚影响很大，不仅体现在峰值，同时也体现在膜厚曲线趋势上。其原因是，不同转速下，曲轴纵振变化较为显著。此外，随转速的增大，考虑时变刚度后，止推最小油膜厚度分别提升 33.3%、37.1% 和 43.9%，可以发现，转速对止推部分的影响显著，这归因于高转速下曲轴会产生更大的轴向窜动。

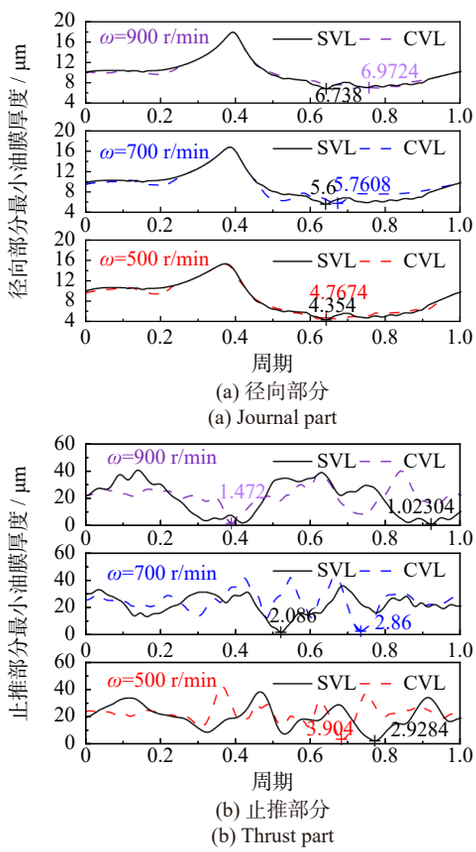


图 13　转速对各部分最小油膜厚度的影响

Fig. 13　The influence of rotating speed on the minimum film thickness of each part

4.3　进油温度

通过调整进油温度 T_{in}，探究不同轴瓦结构参数下翻边轴瓦的润滑性能，不同进油温度下各部分的最大油膜压力如图 14 所示。由图 14(a)可知，随着进油温度的升高，考虑时变刚度后，径向部分最大油膜压力有所降低，分别减少 23.7%、24.4% 和 19.3%。同时在考虑时变刚度后，最大压力曲线变化趋势不规律，其原因是，CVL 模型下，振动响应受时变刚度影响，计算得到的倾角方向变化较大。止推部分的最大油膜压力曲线如图 14(b)所示，其变化规律与径向部分类似，随着进油温度的升高，考虑时变刚度后，止推最大油膜压力分别降低 30.7%、19.4% 和 16.9%。除了倾角的影响，止推间隙也同样直接影响其润滑性能，可以发现，考虑时变刚度后，各进油温度下的最大油膜压力变化曲线规律性相对较差。

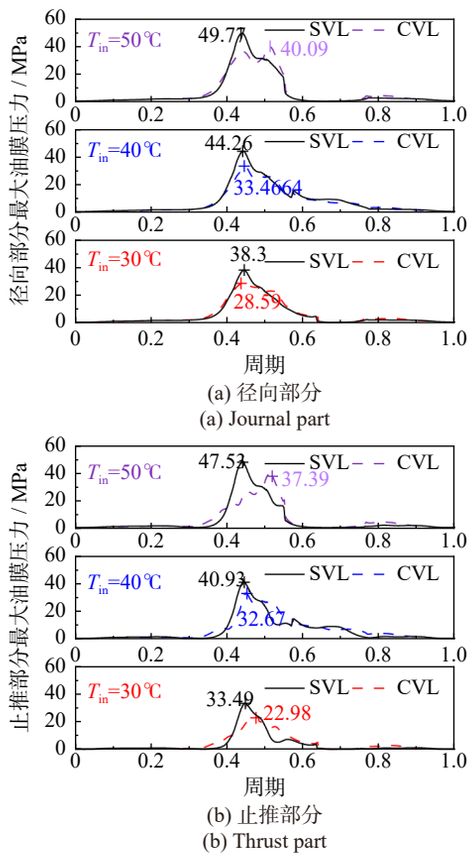
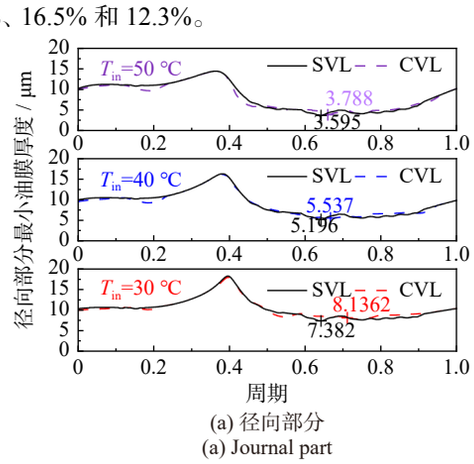
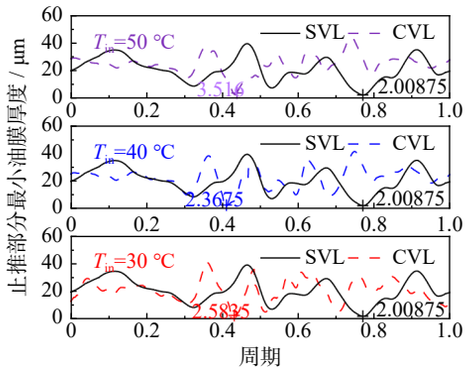


图 14　进油温度对各部分最大油膜压力的影响

Fig. 14　The influence of inlet oil temperature on the maximum film pressure of each part

不同进油温度下，工作周期内，径向部分和止推部分的最小油膜厚度曲线如图 15 所示。由图 15(a)可知，随着进油温度的升高，径向部分最小膜厚减小，在最小膜厚极小值上，考虑时变刚度后，计算结果更大，分别提升 6.3%、6.0% 和 5.4%。由图 15(b)可知，随着进油温度升高，在未考虑时变刚度时，轴瓦刚度固定，不同进油温度下的止推部分最小油膜厚度没有变化；考虑时变刚度后，随着进油温度的升高，止推部分最小膜厚极小值增大，分别提升 24.9%、16.5% 和 12.3%。





(b) 止推部分

(b) Thrust part

图 15 进油温度对各部分最小油膜厚度的影响

Fig. 15 The influence of inlet oil temperature on the minimum film thickness of each part

5 结 论

本研究建立了柴油机曲轴振动模型和轴瓦热弹流混合润滑模型，以轴瓦时变刚度为耦合媒介，建立了曲轴纵弯振动与径向-止推轴瓦润滑双向耦合关系，开展了耦合曲轴纵弯振动的径向-止推轴瓦润滑性能研究。采用商业仿真软件对曲轴振动模型进行了验证，基于试验台测试数据对瞬态润滑模型进行了验证。具体结论如下：

（1）与传统单向耦合模型（SVL）相比，本研究所建立的双向耦合振动-润滑模型（CVL）能够更准确地反映曲轴振动与轴瓦润滑之间的交互作用。CVL 模型下，翻边轴瓦在 1 个工作周期内的润滑性能曲线形状发生明显变化，具体表现为：周期最大油膜压力平均降低约 6%~18%，周期最小油膜厚度平均提升约 5%~44%。该变化主要由时变油膜刚度对曲轴振动的抑制作用引起，刚度升高导致振动位移减小，进而改善润滑状态。

（2）各参数对润滑性能的影响程度存在显著差异，其主次关系为：转速 > 径向间隙 > 进油温度。转速对止推部分润滑行为影响最为突出，尤其在高速工况（900 r/min）下，CVL 模型中止推部分最小油膜厚度提升超过 40%，表明高转速下轴向窜动加剧，耦合效应更为显著。

（3）径向间隙增大时，CVL 模型下，径向与止推部分最大油膜压力分别降低 5.6%~9.8% 与 9.8%~13.7%，最小膜厚则分别提高 6.7%~10.5% 与 9.6%~22.2%。径向间隙较大时，刚度时变特性对振动的抑制效果更明显，润滑性能改善幅度更大。进油温度升高导致润滑油黏度下降，CVL 模型中由于振动响应受刚度反馈调节，润滑性能变化较 SVL 模型更为复杂。进油温度从 35℃ 提高至 45℃ 时，CVL 模型中，止推部分最大油膜压力降低 16.9%~30.7%，最小油膜厚度提升 12.3%~24.9%，表明热-振-润滑耦合效应在高温工况下不可忽略。在高转速工况下，CVL 模型与 SVL 模型的差异尤为显著，在转速为 900 r/min 时，CVL 模型中，止推部分最大油膜压力降低 18.5%，而最小油膜厚度提升 43.9%，可以说明耦合效应在恶劣工况下具有更强的调控作用。

参考文献：

[1] JANG G H，LEE S H，KIM H W. Finite element analysis of the coupled journal and thrust bearing in a computer hard disk drive[J]. Journal of Tribology，2006，128(2)：335-340.

[2] WANG Y S，WANG Q J，LIN C. Mixed lubrication of coupled journal-thrust-bearing systems including mass conserving cavitation[J]. Journal of Tribology，2003，125(4)：747-755.

[3] XIANG G，HAN Y F，CHEN R X，et al. A numerical method to investigate the mixed lubrication performances of journal-thrust coupled bearings[J]. Industrial Lubrication and Tribology，2019，71(9)：1099-1107.

[4] XIANG G，WANG J X，ZHOU C D，et al. A tribo-dynamic model of coupled journal-thrust water-lubricated bearings under propeller disturbance[J]. Tribology International，2021，160：107008.

[5] STEFANI F. THD analysis of a coupled journal and tilting pad thrust bearing system[C]//International Conference on Tribology，2006：20-22.

[6] HAGEMANN T，BLUMENTHAL H，KRAFT C，et al. A study on energetic and hydraulic interaction of combined journal and thrust bearings[C]//Proceedings of Volume 7A：Structures and Dynamics. American Society of Mechanical Engineers，2015：V07AT31A019.

[7] 孙启国. 扭-纵耦合对曲轴系统固有特性的影响 [J]. 机械设计与制造，2011(8)：121-123.
SUN Qiguo. Effects of the coupled torsional-axial vibration on the natural characteristics of a crankshaft[J]. Machinery Design & Manufacture，2011(8)：121-123.

[8] 龚云轩. 柴油机曲轴系统弯纵扭耦合振动研究 [D]. 哈尔滨：哈尔滨工程大学，2020.
GONG Yunxuan. Study on the bending-axial-torsional coupling vibration of the diesel engine crankshaft system[D]. Harbin：Harbin Engineering University，2020.

[9] 唐有绮，周星宇，陈玲，等. 轴向运动梁的横纵耦合非线性振动 Galerkin 截断研究 [J]. 振动与冲击，2024，43(21)：237-244.
TANG Youqi，ZHOU Xingyu，CHEN Ling，et al. Nonlinear transverse-longitudinal coupled vibration of axially moving beam using Galerkin method and truncation technique[J]. Journal of Vibration and Shock，2024，43(21)：237-244.

[10] 梁兴雨，舒歌群，卫海桥，等. 基于瑞利法的内燃机曲轴

扭纵耦合振动 [J]. 机械工程学报，2006，42(增刊 1)：183-187.
LIANG Xingyu，SHU Gequn，WEI Haiqiao，et al. Coupled torsional-axial vibration of crankshaft based on Rayleigh differential method[J]. Journal of Mechanical Engineering，2006，42(Sup1)：183-187.

[11] BRITO F P，MIRANDA A S，FILLON M. Analysis of the effect of grooves in single and twin axial groove journal bearings under varying load direction[J]. Tribology International，2016，103：609-619.

[12] GUTOWSKI P，LEUS M. Computational model of friction force reduction at arbitrary direction of tangential vibrations and its experimental verification[J]. Tribology International，2020，143：106065.

[13] HAN Y M，WANG J，LI W M，et al. Oil film variation and surface damage in the process of reciprocation-oscillation transformation[J]. Tribology International，2019，140：105828.

[14] XIANG G，HAN Y F，WANG J X，et al. A transient hydrodynamic lubrication comparative analysis for misaligned micro-grooved bearing considering axial reciprocating movement of shaft[J]. Tribology International，2019，132：11-23.

[15] XIANG G，HAN Y F，WANG J X，et al. Influence of axial microvibration on the transient hydrodynamic lubrication performance of misaligned journal-thrust microgrooved coupled bearings under water lubrication[J]. Tribology Transactions，2021，64(4)：579-592.

[16] LIU R C，MENG X H，LI P. Transient tribodynamic analysis of crankshaft-main bearing system during engines starting up[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers，Part J：Journal of Engineering Tribology，2018，232(5)：535-549.

[17] 魏立队，魏海军，段树林，等. 船舶柴油机柔性曲轴与机体 EHD 耦合下振动研究 [J]. 哈尔滨工程大学学报，2017，38(2)：181-188.
WEI Lidui，WEI Haijun，DUAN Shulin，et al. Vibrations of the flexible crankshaft and block of a marine diesel engine under EHD coupling[J]. Journal of Harbin Engineering University，2017，38(2)：181-188.

[18] MOURELATOS Z P. A crankshaft system model for structural dynamic analysis of internal combustion engines[J]. Computers & Structures，2001，79(20-21)：2009-2027.

[19] 魏立队，魏海军，李精明，等. 大型船舶低速柴油机柔性曲轴三维振动 [J]. 内燃机学报，2017，35(2)：185-191.
WEI Lidui，WEI Haijun，LI Jingming，et al. Three-dimensional vibration of flexible crankshaft of low-speed diesel engine for large ships[J]. Transactions of CSICE，2017，35(2)：185-191.

[20] HE Z P，GONG W Q，XIE W S，et al. NVH and reliability analyses of the engine with different interaction models between the crankshaft and bearing[J]. Applied Acoustics，2016，101：185-200.

[21] WEI L D，WEI H J，DU H P，et al. Three-dimensional vibration of the crankshaft of a large marine diesel engine under a mixed thermo-elastic-hydro-dynamic lubrication coupling between flexible crankshaft and engine block[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power，2018，140(6)：062802.

[22] 李正文，赵俊生，李涵，等. 柴油机曲轴润滑与弯曲振动耦合影响研究 [J]. 润滑与密封，2020，45(1)：129-134.
LI Zhengwen，ZHAO Junsheng，LI Han，et al. Study on coupling effect of crankshaft lubrication and bending vibration in diesel engine[J]. Lubrication Engineering，2020，45(1)：129-134.

[23] PATIR N，CHENG H S. An average flow model for determining effects of three-dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication[J]. Journal of Lubrication Technology，1978，100(1)：12-17.

[24] 蒋秀龙. 可倾瓦推力滑动轴承弹流润滑研究 [D]. 杭州：浙江大学，2011.
JIANG Xiulong. TEHD analysis of tilting pad thrust bearing[D]. Hangzhou：Zhejiang University，2011.

[25] SHI F H，WANG Q J. A mixed-TEHD model for journal-bearing conformal contacts：part I：model formulation and approximation of heat transfer considering asperity contact[J]. Journal of Tribology，1998，120(2)：198-205.

第一作者：施佳皓(1997—)，男，博士，助理研究员。
E-mail：sjhgarfield@hrbeu.edu.cn
通信作者：赵　滨(1990—)，男，博士，副教授。
E-mail：donglizhaobin@hrbeu.edu.cn

考虑球缺陷的全陶瓷角接触球轴承打滑及非线性振动特性研究

王 展[1]，赵 瑞[1]，王子男[1]，张 珂[2]，高刘旺[1]

（1. 沈阳建筑大学机械工程学院，辽宁 沈阳 110168；2. 沈阳工业大学机械工程学院，辽宁 沈阳 110870）

摘要：为探究球缺陷对全陶瓷角接触球轴承打滑和非线性振动特性的影响，提出了一种考虑球缺陷的全陶瓷角接触球轴承打滑动力学模型。引入球缺陷产生的时变位移激励，建立了球缺陷对滚道的冲击力模型。结合轴承动态接触过程中的赫兹接触特性，构建了球与滚道的接触力模型。考虑球与滚道和保持架的相互作用，构建了轴承打滑模型。仿真分析了不同工况下径向载荷、转速和球缺陷尺寸对全陶瓷轴承打滑及非线性振动特性的影响。结果表明，内圈的加速度越大，保持架的滑动率更容易趋近稳定。径向载荷增大，球与内滚道的滑移速度减小。随着缺陷尺寸的扩大，冲击过程更加明显，接触力幅值增大，波动紊乱度提升，保持架的滑动率越大，运动越复杂，振动幅值越大，不利于轴承的长时间运行。仿真与试验的旋转频率幅值最大误差为 6.5%，验证了模型的可靠性。该研究可为全陶瓷轴承的运行状态检测提供一定的理论基础。

关键词：全陶瓷轴承；球缺陷；打滑特性；非线性振动

中图分类号：TH133.33 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508068

Slipping and nonlinear vibration characteristics of full ceramic angular contact ball bearing considering ball defects

WANG Zhan[1], ZHAO Rui[1], WANG Zinan[1], ZHANG Ke[2], GAO Liuwang[1]

（1.School of Mechanical Engineering，Shenyang Jianzhu University，Shenyang 110168，China；
2.School of Mechanical Engineering，Shenyang University of Technology，Shenyang 110870，China）

Abstract: To investigate the effects of ball defects on the slipping and nonlinear vibration of full ceramic angular contact ball bearings，a dynamic model incorporating ball defects is proposed. The time-varying displacement excitation induced by a ball defect is introduced，and the corresponding impact force on the raceway is modeled. Based on Hertzian contact characteristics，a ball-raceway contact force model is developed. The interactions between the ball-raceway and ball-cage are considered to construct a bearing skidding model. Simulations examine the effects of radial load，rotational speed，and defect size on slipping and nonlinear vibration under various operating conditions. Results show that higher inner ring acceleration stabilizes the cage slipping ratio，while increasing radial load reduces slip velocity between balls and the inner raceway. Larger defects intensify the impact process，increase contact force amplitude，enhance fluctuation disorder，enlarge the cage slipping ratio，and complicate cage motion，leading to greater vibration amplitudes. These effects are detrimental to the bearing's long-term performance. The maximum error in rotational-frequency amplitude between the simulation and experiment is 6.5%，confirming the model's reliability. This study provides a theoretical basis for monitoring the operating status of full ceramic bearings.

Keywords: full ceramic bearing; ball defects; slipping characteristics; nonlinear vibration

全陶瓷轴承具有变形小、刚度高和耐腐蚀性好等优点，能够更好地满足数控机床、航空发动机等高精密机械在超高速、宽温域等极端工况下的运行需求[1]。然而，陶瓷球不仅存在高硬度带来的加工难度和脆性特性，在运行中还会受到接触应力的反复作用，受这两方面因素影响，其表面易出现缺陷[2]。此外，在轴承运行过程中，球与滚道之间的摩擦力不足以克服阻力，导致球与滚道之间发生滑移，球并非做理想的纯滚动运动，这会使轴承内部的作用力更加复杂[3-4]。不仅会加剧轴承球表面的磨损，还会诱发严重的噪声和振动，影响轴承的运行精度，缩短其使用寿命[5]。因此，研究球缺陷的全陶瓷轴承打滑及

收稿日期：2025-08-15；**修订日期：**2025-09-24

基金项目：国家自然科学基金资助项目（52205117，52175107）；辽宁省兴辽英才青年拔尖人才项目（XLYC2203015）；辽宁省教育厅项目（JYTMS20231563）

非线性振动特性对轴承的健康检测和寿命预测至关重要。

目前已有多种理论模型用于研究轴承的打滑行为。师志峰等[6]建立了单行星滚针轴承滚道局部故障动力学模型，发现内圈滚道局部故障对保持架打滑率的影响更大。涂文兵等[7]建立了启动过程中圆柱滚子轴承的动力学方程，仿真结果表明，滚子在刚进入承载区时打滑的影响较大。LIU 等[8]建立了考虑轴承部件相互作用的轴承滑动动力学模型，仿真结果表明，滚动体滑动通常发生在进入或离开载荷区域的瞬间。GAO 等[9]提出了一种轴承的运动学-赫兹接触-热力学-流体力学综合模型，发现增加润滑剂流量可能会加剧滑动现象，但也能在一定程度上缓解温度升高。ATEF 等[10]通过一种改进的轴承非线性动力学模型探究了润滑剂特性对圆柱滚子轴承滑动行为的影响，结果表明，润滑剂特性对滚子与保持架之间的冲击力和保持架的滑移率有显著影响。景新等[11]推导出了保持架打滑率和轴承故障频率之间的关系，并通过试验验证了公式的正确性，结果表明，随着转速的增大，轴承实际故障频率与理论故障频率偏差增大。彭城等[12]探究了三点接触球轴承的打滑行为，分析表明，接触角越大，三点接触球轴承的打滑率越大。XU 等[13]通过试验和仿真对滑动-滚动接触的轴承动力学响应展开分析，分析表明当滚动接触发生滑动时，会导致切应力不稳定，导致切向振动。李峰等[14]建立了摆动深沟球轴承的动力学方程，结果表明，摆动工况下轴承的打滑更明显。TU 等[15]研究了圆柱滚子轴承在滑动状态下的振动响应，发现滑动现象可能会导致振动幅值波动并显著增加摩擦。于庆杰等[16]归纳了角接触球轴承和圆柱滚子轴承打滑特性的影响因素，阐述了打滑的预防措施。

轴承的打滑行为往往伴随着轴承内部接触状态的间接性失稳和摩擦力的强烈波动，加速其表面局部磨损等故障的产生[17-18]，导致轴承的振动响应呈现出非常复杂的非线性现象。许多学者针对轴承故障产生的非线性振动现象开展了深入研究。伊海铭等[19]针对中介轴承内圈局部缺陷的双转子系统建立了振动方程，分析发现其较无故障系统新增了三个由内圈故障引起的分叉区域。郭宝良等[20]建立了单一局部故障的变刚度动力学模型，分析表明，滚动体进入和退出载荷区及故障区时，会引起总有效刚度突变，导致系统复杂振动。ZHANG 等[21]建立了考虑局部故障边缘扩展和形态特征的轴承动力学模型，分析表明，滚道故障表面形貌可以产生多重冲击，并激发故障频率的高频成分。NIU 等[22]提出了一种带有滚子故障的轴承动力学模型，结果表明，滚子故障与内圈之间的作用时间长于滚子故障与外圈之间的作用时间。MUFAZZAL 等[23]提出了一种考虑外圈故障扩展的球轴承非线性动力学模型，结果表明故障深度对冲击力的影响较小。基于故障边缘特征，LIU 等[24]提出了一种轴承故障扩展和形态建模方法，分析表明，故障边缘角对进入故障区域的滚动体激发的加速度峰值无明显影响。LI 等[25]研究了外圈故障轴承在振动激励条件下的动态特征，发现振动激励可使轴承的加速度和轴向轨迹显著增大。雷春丽等[26]建立了内、外圈复合故障的角接触球轴承动力学模型，发现故障尺寸对振动特征频率无明显影响。

上述工作通过理论分析、试验测试和仿真模拟，在健康及滚道故障轴承的打滑与非线性振动机理研究中取得了一定成果。然而，在轴承实际运行过程中，球缺陷作为一种普遍存在的故障形式，对轴承动态性能的影响同样不可忽视。且全陶瓷轴承具有刚度大和自润滑等优良特性，对轴承的打滑及非线性振动特性具有一定的影响[27]。因此，为了探究球缺陷对全陶瓷轴承打滑及非线性振动的影响，构建了一种考虑球缺陷的全陶瓷轴承打滑动力学模型。该模型不仅考虑了球缺陷产生的时变位移激励以及球缺陷对滚道产生的冲击力，同时还考虑了球与滚道之间的摩擦力及球与保持架之间的作用力。在此基础上，分析不同参数对全陶瓷轴承打滑及非线性振动特性的影响，并将试验结果与仿真得到的结果进行对比，验证模型的可靠性。研究结果可为全陶瓷轴承的运行状态检测提供一定的理论基础。

1　球缺陷的冲击力模型

全陶瓷轴承各部件之间的相互作用是非常复杂的，为了更好地描述全陶瓷轴承各部件在运行中的状态，首先需要建立准确的坐标系，图 1 清晰地展示了所定义的局部坐标系。

（1）O-xyz 表示惯性坐标系，原点 O 位于外圈中心。假设外圈不动，即坐标系固定，是其他局部坐标系的基础。

（2）O_i-$x_iy_iz_i$ 表示内圈运动的坐标系，原点 O_i 与内圈中心重合，该坐标系随内圈运动，ω_i 为内圈的旋转速度。

（3）O_b-$x_by_bz_b$ 表示球运动的坐标系，原点 O_b 与球中心重合，该坐标系随球运动，ω_{bx}、ω_{by}、ω_{bz} 分别为球绕 x_b、y_b、z_b 轴的旋转速度。

（4）O'-$x'y'z'$表示球接触表面的局部坐标系。

在轴承高速运行的过程中，其外环运动相对简单，一般是定轴转动。但球的运动却十分复杂，球在绕轴承中心轴线进行公转的同时，还要绕自身轴线进行自转。图 2 描述了球的缺陷与滚道接触的 3 种

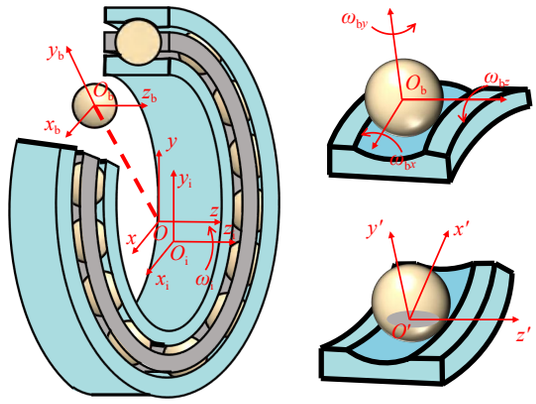


图 1 全陶瓷轴承坐标系

Fig. 1 Coordinate systems for the full ceramic bearing

状态。图 2 中，ω_b 为球的自转角速度；θ_R 为球缺陷区域的跨角；θ_b 为缺陷区域在滚道上转过的角度；H 为时变位移激励；w 为缺陷的宽度；H_{max} 为最大时变位移激励。当缺陷区域逐渐接触滚道时，时变位移激励逐渐变大；当缺陷区域完全接触滚道时，时变位移激励最大，缺陷区域在滚道上转过的角度等于缺陷区域跨角的一半；当缺陷区域逐渐远离滚道时，时变位移激励逐渐变小；当缺陷区域完全脱离滚道时，时变位移激励为零。

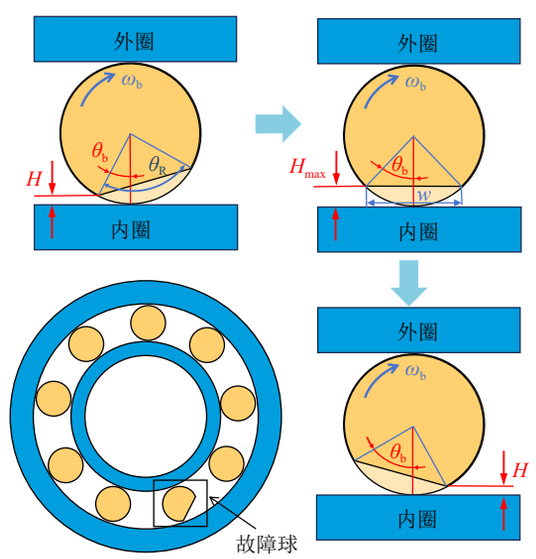


图 2 缺陷球在滚道上的运动

Fig. 2 The movement of defective ball on the raceway

球缺陷区域的跨角可以表示为：

$$\theta_R = \arcsin\left(\frac{w}{D_w}\right) \tag{1}$$

式中，D_w 为球的直径。

结合球的自转角度，可以得到时变位移激励为：

$$u_f = \begin{cases} H = \begin{cases} \dfrac{D_w}{2}(1-\cos\theta_b), & 0 \leqslant \theta_b \leqslant \dfrac{\theta_R}{2} \\ \dfrac{D_w}{2}(1-\cos(\theta_R-\theta_b)), & \dfrac{\theta_R}{2} < \theta_b \leqslant \theta_R \end{cases} \\ 0, \text{ 其他} \end{cases} \tag{2}$$

当球不存在缺陷时，u_f 为零。根据球与滚道之间的位置关系，第 j 个球与滚道之间的接触变形量可以表示为[28]：

$$\delta_j = x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j - 0.5u - u_f \tag{3}$$

式中，x、y 分别为轴承内圈沿 x_i、y_i 方向的位移；φ_j 为第 j 个球的角位置；u 为轴承的初始游隙。

当球的缺陷区域通过滚道时，会产生瞬时冲击力。每当球自转一周，球的缺陷区域会分别与内、外滚道接触一次，产生两次冲击。考虑缺陷区域尺寸大小和球自转速度，可以推导出冲击力激励函数。球缺陷区域撞击滚道的速度可以用瞬时位移激励函数的一阶导数求得：

$$V = \frac{\mathrm{d}u_f}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \dfrac{D_w}{2}\omega_b\sin\theta_b, & 0 \leqslant \theta_b \leqslant \dfrac{\theta_R}{2} \\ \dfrac{D_w}{2}\omega_b\sin(\theta_R-\theta_b), & \dfrac{\theta_R}{2} < \theta_b \leqslant \theta_R \\ 0, \text{ 其他} \end{cases} \tag{4}$$

由式(4)可知，当 θ_b=0.5θ_R 时，缺陷区域与滚道完全接触，球缺陷区域撞击滚道的速度最大，但速度方向会瞬间反向转变，速度方向的瞬时变化会伴随撞击现象。通过碰撞点的弹性变形，可以得到碰撞时刻的冲击力。图 3 展示了缺陷区域撞击滚道时的运动状态，图中，V_{max} 为最大撞击速度，碰撞过程中的最大弹性势能为[29]：

$$P = \int_0^{\delta_f} k_n x^h \mathrm{d}x = \frac{1}{h+1}k_n\delta_f^{h+1} \tag{5}$$

式中，δ_f 为缺陷区域与滚道的最大变形量；h 为载荷变形指数；k_n 为球与滚道间的接触刚度。

当变形量最大时，撞击速度为零，此过程的动能改变量为：

$$E = \frac{1}{2}m_bV_{max}^2 - 0 = \frac{m_bD_w^2\omega_b^2\sin^2\left(\dfrac{\theta_R}{2}\right)}{8} \tag{6}$$

根据能量守恒，弹性势能的变化等于动能的变化，可求得撞击过程中的最大接触变形为：

$$\delta_f = \left[\frac{(h+1)m_bD_w^2\omega_b^2\sin^2\left(\dfrac{\theta_R}{2}\right)}{8k_n}\right]^{\frac{1}{h+1}} \tag{7}$$

则最大撞击力 F_{max} 为：

$$F_{max} = k_n^{\frac{h}{h+1}}\left[\frac{(h+1)m_bD_w^2\omega_b^2\sin^2\left(\dfrac{\theta_R}{2}\right)}{8}\right]^{\frac{h}{h+1}} \tag{8}$$

故，冲击力可以表示为：

$$F_c = \begin{cases} F_{max}\left[\dfrac{\delta_f-(H_{max}-H)}{\delta_f}\right]^{\frac{h}{h+1}}, & H_{max}-\delta_f \leqslant H \leqslant H_{max} \\ 0, \text{ 其他} \end{cases} \tag{9}$$

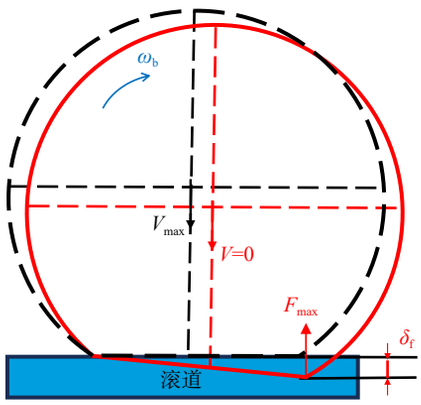


图 3　缺陷区域与滚道接触的冲击过程

Fig. 3　The impact process of the contact between defective area and raceway

2　考虑球缺陷的全陶瓷轴承打滑动力学模型

全陶瓷轴承工作过程中，球与滚道之间的接触特性直接影响轴承的振动特性。采用球轴承的拟静力学模型，分析轴承中球与滚道之间的接触特性。全陶瓷角接触球轴承在初始状态下，内、外滚道曲率中心和球中心在一条直线上。在工作过程中，由于球受到离心力和陀螺力矩的影响，导致球与内、外滚道的接触角不同，造成内、外滚道的曲率中心和球中心不在一条直线上。图 4 展示了轴承工作过程中滚道曲率中心的相对位置关系。图 4 中，O_i、O_o 和 O_b 分别为内、外滚道曲率中心和球中心的初始位置；O_b^F 和 O_i^F 分别为球中心和内滚道曲率中心的最终位置；BD 为内、外滚道曲率中心的初始距离；α_0 为初始接触角；α_{ij}、α_{oj} 分别为第 j 个球与内、外滚道的接触角；δ_x、δ_y 和 δ_z 分别为受载荷后轴承在 x、y 和 z 方向的位移；X_{rj} 和 X_{aj} 分别为球中心到外滚道曲率中心的径向和轴向距离；A_{rj} 和 A_{aj} 分别为受载后内、外滚道曲率中心的径向和轴向距离；R_{ri} 为内滚道曲率半径。

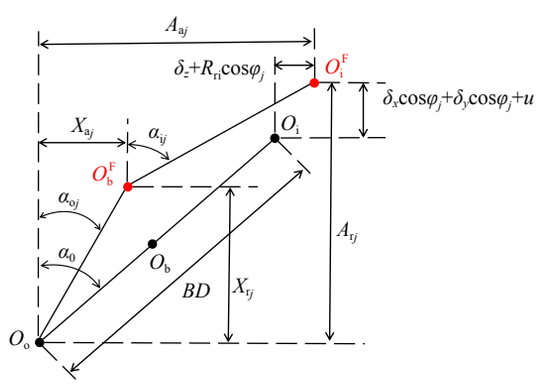


图 4　曲率中心的相对位置

Fig. 4　The relative position of the curvature center

全陶瓷角接触轴承的初始接触角可以表示为：

$$\alpha_0=\begin{cases}\arccos\left[1-\dfrac{0.5u}{(f_i+f_o-1)D_w}\right], & u>0\\ 0, & u\leqslant 0\end{cases} \tag{10}$$

式中，f_i、f_o 分别为内、外滚道与球之间的曲率比。

全陶瓷轴承在工作过程中，第 j 个球与内、外滚道的接触角可以表示为：

$$\alpha_{ij}=\arccos\left[\frac{A_{rj}-X_{rj}}{(f_i-0.5)D_w+\delta_{ij}}\right] \tag{11}$$

$$\alpha_{oj}=\arccos\left[\frac{X_{rj}}{(f_o-0.5)D_w+\delta_{oj}}\right] \tag{12}$$

式中，δ_{ij}、δ_{oj} 分别为第 j 个球和内、外滚道之间的接触变形。

由毕达哥拉斯定理可知，第 j 个球的几何变形协调方程可以表示为：

$$(A_{aj}-X_{aj})^2+(A_{rj}-X_{rj})^2=[(f_i-0.5)D_w+\delta_{ij}]^2 \tag{13}$$

$$X_{aj}^2+X_{rj}^2=[(f_o-0.5)D_w+\delta_{oj}]^2 \tag{14}$$

对于润滑的全陶瓷轴承，球与滚道之间的中心油膜厚度可以根据经验公式得到：

$$h_o=2.69R'U'^{0.67}G'^{0.53}W'^{-0.067}(1-0.61e^{-0.73\sigma}) \tag{15}$$

式中，R'为球与内、外滚道在椭圆接触区的有效半径；U'为无量纲速度参数；G'为无量纲材料参数；W'为无量纲载荷参数；σ 为椭圆率。

当球与内滚道接触时，R'表示为：

$$R'=0.5D_w\left(\frac{d_m-D_w\cos\alpha_i}{d_m}\right) \tag{16}$$

式中，d_m 为轴承节圆直径；α_i 为球与内滚道的接触角。

当球与外滚道接触时，R'表示为：

$$R'=0.5D_w\left(\frac{d_m+D_w\cos\alpha_o}{d_m}\right) \tag{17}$$

式中，α_o 为球与外滚道的接触角。

当接触椭圆的长/短半轴未知时，椭圆率 σ 可以表示为：

$$\sigma=1.03\left(\frac{R_z}{R'}\right) \tag{18}$$

式中，R_z 为轴向平面内的当量曲率半径。

由于球与内、外滚道的接触状态存在差异，导致油膜在不同接触情况下的受力和变形特点存在一定区别，使得球与内、外滚道的油膜刚度存在差异，它们可以表示为：

$$\begin{cases}k_{oi}=\dfrac{dW_c}{dh_{oi}}\\ k_{oo}=\dfrac{dW_c}{dh_{oo}}\end{cases} \tag{19}$$

式中，W_c 为接触区的分布载荷；h_{oi}、h_{oo} 分别为球与内、外滚道之间的中心油膜厚度。

等效刚度系数可以表示为：

$$k_e=\frac{k_ik_ok_{oi}k_{oo}}{k_i+k_o+k_{oi}+k_{oo}} \tag{20}$$

式中，k_i、k_o 分别为球与内、外滚道的接触刚度系数，

可以表示为：

$$\begin{cases} k_{\mathrm{i}} = \dfrac{\pi\gamma_{\mathrm{i}}E_{\mathrm{c}}}{3\xi_{\mathrm{i}}}\left(\dfrac{2\lambda_{\mathrm{i}}}{\xi_{\mathrm{i}}\Sigma\rho_{\mathrm{i}}}\right) \\ k_{\mathrm{o}} = \dfrac{\pi\gamma_{\mathrm{o}}E_{\mathrm{c}}}{3\xi_{\mathrm{o}}}\left(\dfrac{2\lambda_{\mathrm{o}}}{\xi_{\mathrm{o}}\Sigma\rho_{\mathrm{o}}}\right) \end{cases} \tag{21}$$

式中，E_{c} 为陶瓷材料的等效弹性模量；γ_{i}、γ_{o} 分别为球与内、外滚道接触的椭圆率；λ_{i}、λ_{o} 分别为球与内、外滚道接触的第二类椭圆积分；ξ_{i}、ξ_{o} 分别为球与内、外滚道接触的第一类椭圆积分；$\Sigma\rho_{\mathrm{i}}$、$\Sigma\rho_{\mathrm{o}}$ 分别为球与内、外滚道接触副曲率之和。

在工作过程中，全陶瓷轴承充分润滑时，球会因公转运动受到润滑剂剪切力的作用，阻碍球的运动，受到的阻力可以表示为：

$$F_{\mathrm{d}} = 0.25C_{\mathrm{d}}\rho\pi\,(D_{\mathrm{w}}d_{\mathrm{m}}\omega_{\mathrm{s}})^2 \tag{22}$$

式中，C_{d} 为流动阻力系数；ρ 为润滑剂密度；ω_{s} 为球的公转速度。

由于流体阻力的存在，球自转和保持架旋转也会受到流体阻力力矩的影响，它们可以表示为：

$$M_{\mathrm{b}} = 0.5C_{\mathrm{b}}\rho\omega_{\mathrm{b}}^2D_{\mathrm{w}}^5 \tag{23}$$

$$M_{\mathrm{c}} = 0.125\eta_0\rho Ar_{\mathrm{a}}^3\omega_{\mathrm{c}}^2 + 0.5\rho C_{\mathrm{c}}r_{\mathrm{a}}^3(r_{\mathrm{a}}^2 - r_{\mathrm{b}}^2)\omega_{\mathrm{c}}^2 \tag{24}$$

式中，C_{b} 为球自转的阻力系数；η_0 为运动黏度系数；A 为保持架外圆柱面面积；r_{a} 为保持架外半径；ω_{c} 为保持架旋转速度；C_{c} 为保持旋转的阻力系数；r_{b} 为保持架内半径。

虽然球与滚道表面之间存在着一层油膜，但它不会从根本上影响接触面处的应力分布特征及变形的基本规律。因此，球与滚道之间的相互作用，在本质上并没有因油膜的存在而发生根本性的改变，仍然可以用赫兹理论进行分析。根据赫兹理论，第 j 个球与滚道的接触力为：

$$Q_j = k_{\mathrm{e}}(x\cos\varphi_j + y\sin\varphi_j - 0.5u - u_{\mathrm{f}})^{1.5} \tag{25}$$

考虑球与滚道之间的冲击力，球与滚道之间的滑动摩擦力可以表示为：

$$\begin{cases} f_{\mathrm{o}} = \mu_{\mathrm{o}}(Q_{\mathrm{o}} + F_{\mathrm{c}})\dfrac{\Delta v_{\mathrm{o}}}{|\Delta v_{\mathrm{o}}|} \\ f_{\mathrm{i}} = \mu_{\mathrm{i}}(Q_{\mathrm{i}} + F_{\mathrm{c}})\dfrac{\Delta v_{\mathrm{i}}}{|\Delta v_{\mathrm{i}}|} \end{cases} \tag{26}$$

式中，μ_{i}、μ_{o} 分别为球与内、外滚道之间的摩擦系数；Q_{i}、Q_{o} 分别为球与内、外滚道的接触力；Δv_{i}、Δv_{o} 分别为球与内、外滚道之间的滑移速度，可以推导为：

$$\begin{cases} \Delta v_{\mathrm{o}} = \omega_{\mathrm{s}}R_{\mathrm{o}} - \omega_{\mathrm{b}}R_{\mathrm{w}} \\ \Delta v_{\mathrm{i}} = (\omega - \omega_{\mathrm{s}})R_{\mathrm{i}} - \omega_{\mathrm{b}}R_{\mathrm{w}} \end{cases} \tag{27}$$

式中，R_{o}、R_{i} 和 R_{w} 分别为全陶瓷轴承外滚道、内滚道和球的半径；ω 为内圈角速度。

当施加较大载荷时，球在运动中不会发生陀螺滑移，可以认为球与滚道在轴向平面产生的静摩擦阻力力矩与陀螺力矩平衡，再考虑缺陷冲击的影响，则平衡方程可以表示为[30]：

$$\begin{cases} F_{\mathrm{o}} = \mu_{\mathrm{s}}(Q_{\mathrm{o}} + F_{\mathrm{c}}) \\ F_{\mathrm{i}} = \mu_{\mathrm{s}}(Q_{\mathrm{i}} + F_{\mathrm{c}}) \end{cases} \tag{28}$$

$$(F_{\mathrm{o}} + F_{\mathrm{i}})D_{\mathrm{w}} = M_{\mathrm{g}} \tag{29}$$

式中，F_{o} 为陶瓷球与外滚道产生的静摩擦力；F_{i} 为陶瓷球与内滚道产生的静摩擦力；M_{g} 为陶瓷球的陀螺力矩；μ_{s} 为陶瓷球与滚道间的摩擦系数。图 5 展示了缺陷球与滚道之间的相互作用力。

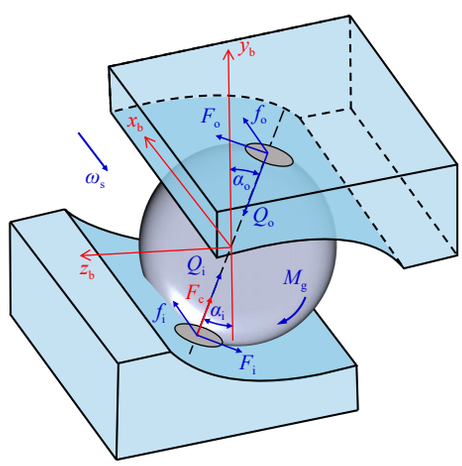


图 5 缺陷球与滚道之间的作用

Fig. 5 The function of the defective ball and raceway

此外，轴承运行中，在空载区域由保持架驱动球旋转，在负载区域由球驱动保持架旋转。因此，球不会与保持架兜孔前、后端同时接触，球与保持架兜孔前、后端的接触力可以分别表示为：

$$Q_{\mathrm{cf}} = \begin{cases} k_{\mathrm{r}}[0.5(\varphi_{\mathrm{s}} - \varphi_{\mathrm{c}})d_{\mathrm{m}}]^h, & \varphi_{\mathrm{s}} > \varphi_{\mathrm{c}} \\ 0, \text{ 其他} \end{cases} \tag{30}$$

$$Q_{\mathrm{cr}} = \begin{cases} k_{\mathrm{r}}[0.5(\varphi_{\mathrm{c}} - \varphi_{\mathrm{s}})d_{\mathrm{m}}]^h, & \varphi_{\mathrm{s}} < \varphi_{\mathrm{c}} \\ 0, \text{ 其他} \end{cases} \tag{31}$$

式中，φ_{s} 为球的旋转角度；φ_{c} 为保持架的旋转角度；k_{r} 为球与保持架之间的连接刚度；Q_{cf}、Q_{cr} 分别为球与保持架兜孔前、后端的接触力。

第 j 个球与保持架兜孔前、后间的摩擦力可以表示为：

$$\begin{cases} f_{\mathrm{cf}j} = \mu_{\mathrm{c}}Q_{\mathrm{cf}j} \\ f_{\mathrm{cr}j} = \mu_{\mathrm{c}}Q_{\mathrm{cr}j} \end{cases} \tag{32}$$

式中，$Q_{\mathrm{cf}j}$、$Q_{\mathrm{cr}j}$ 分别为第 j 个球与保持架兜孔前、后端的接触力。

综合考虑，球主要受到内、外滚道和保持架的接触力、摩擦力和缺陷区域的冲击力，以及球自转和公转受到的流体阻力和力矩，如图 6 所示。第 j 个球在公转方向上的动力学方程为：

$$0.25m_{\mathrm{b}}d_{\mathrm{m}}^2\ddot{\varphi}_{\mathrm{s}} - 0.5d_{\mathrm{m}}(Q_{\mathrm{cr}} - Q_{\mathrm{cf}} + G_{\mathrm{b}}\sin\varphi_j + f_{\mathrm{i}} - f_{\mathrm{o}}) = 0 \tag{33}$$

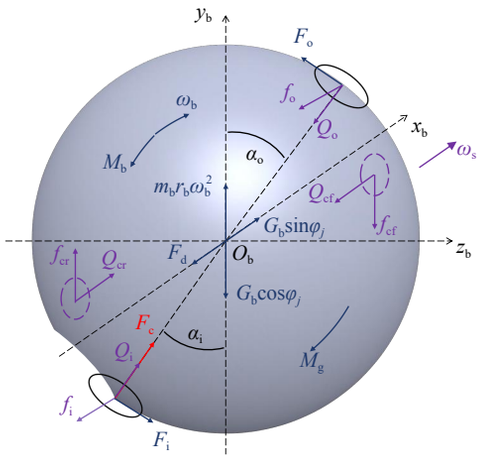


图 6　缺陷球受力图

Fig. 6　Force diagram of the defective ball

式中，m_b 为球的质量；G_b 为陶瓷球的重力。

第 j 个球在自转方向上的动力学方程为：

$$J_b\ddot{\varphi}_b - 0.5D_w(F_i + F_o - f_{cr} - f_{cf}) - M_b = 0 \tag{34}$$

式中，J_b 为球的转动惯量；φ_b 为球的自转角。

第 j 个球在径向上的动力学方程为：

$$\begin{aligned} &m_b\ddot{r}_b - Q_i\cos\alpha_i - F_c\cos\alpha_i + Q_o\cos\alpha_o + F_i\cos\alpha_i - \\ &F_o\cos\alpha_o - m_b r_b\omega_b^2 + G_b\cos\varphi_j + f_{cf} - f_{cr} = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

保持架主要受到球的接触力和摩擦力，以及流体阻力矩，因此，在其旋转方向上的动力学方程可以表示为：

$$0.25m_c d_m\ddot{\varphi}_c - 0.5d_m\sum_{j=1}^{N}(f_{crj} - f_{cfj}) - M_c = 0 \tag{36}$$

式中，m_c 为保持架质量；N 为球的个数。

内圈主要受到球的接触力和摩擦力，以及球缺陷区域的冲击力，因此，内圈在 x、y 方向上的动力学方程可以表示为：

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i + F_c\cos\alpha_i\cos\varphi_j + \\ \quad\sum_{j=1}^{N}\left[(Q_{ij}\cos\alpha_i + F_{ij}\sin\alpha_i)\cos\varphi_j - f_{ij}\sin\varphi_j\right] = 0 \\ m_i\ddot{y}_i - W + F_c\cos\alpha_i\sin\varphi_j + \\ \quad\sum_{j=1}^{N}\left[(Q_{ij}\cos\alpha_i + F_{ij}\sin\alpha_i)\sin\varphi_j - f_{ij}\cos\varphi_j\right] = 0 \end{cases} \tag{37}$$

式中，W 为径向外载荷。

图 7 描述了考虑球缺陷的全陶瓷轴承打滑动力学模型的求解过程。首先，设置仿真时间，输入轴承结构、材料性能、缺陷尺寸等初始参数。其次，计算每个球的角位置和自转角度，通过球的自转角度来判断球缺陷区域是否与滚道接触。然后，综合考虑润滑作用、球与保持架的相互作用，分别构建缺陷球、保持架和内圈的动力学模型。最后，采用 Newton-Raphson 和 Newmark-β 法嵌套迭代求解，得到全陶瓷轴承的打滑及非线性振动特性。

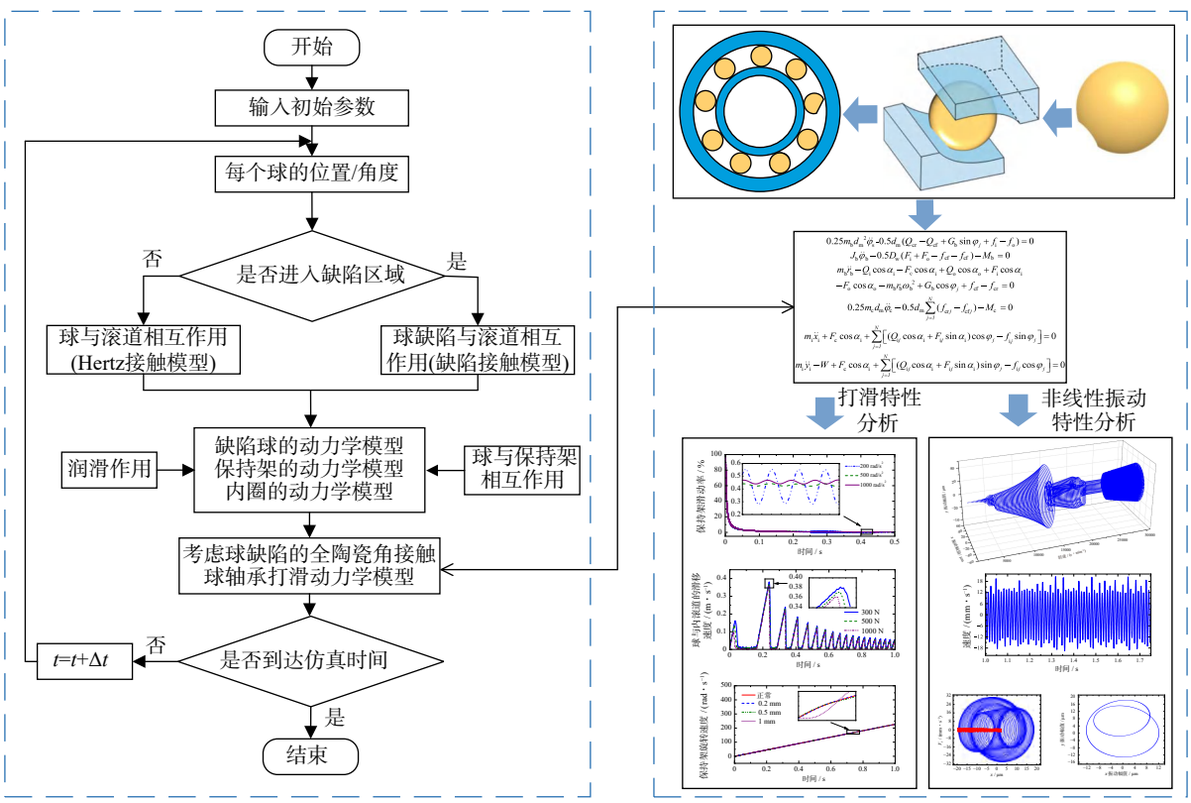


图 7　动力学仿真流程图

Fig. 7　Flowchart of the dynamic simulation

3 加速工况下全陶瓷轴承打滑特性分析

全陶瓷轴承在加速工况下，由于离心力导致球与滚道之间的接触力发生显著变化，球与滚道在接触中有明显的打滑现象[31]。球存在缺陷时会严重影响这种接触特性。本文以 7006CE 全陶瓷角接触球轴承为仿真对象，模拟打滑及非线性振动特性，具体参数如表 1 所示。

表 1 7006CE 全陶瓷角接触球轴承参数

Tab. 1 Parameters of 7006CE full ceramic angular contact ball bearing

参数	参数设置
轴承型号	7006CE
内径/mm	30
外径/mm	55
球直径/mm	6.35
轴承节圆直径/mm	42.5
初始接触角/(°)	15
内滚道直径/mm	37.04
外滚道直径/mm	49.11
滚动体数量	13
初始游隙/μm	15
轴承宽度/mm	13
轴承材料	ZrO_2
密度/(g·cm^{-3})	5.67
泊松比	0.28
弹性模量/GPa	220

3.1 内圈角加速度对全陶瓷轴承打滑特性的影响

本节以球缺陷宽度为 0.5 mm 的全陶瓷轴承为例，在载荷为 300 N，内圈角加速度分别为 200、500、1000 rad/s^2 时，探究加速度对全陶瓷轴承打滑特性的影响。

图 8 为存在缺陷球的全陶瓷轴承在内圈以不同角加速度加速 1 s 的过程中，自转角速度理论值和仿真值的对比。可以发现，球的自转角速度仿真值呈阶梯状上升。这是因为，在承载区，球承受载荷作用，在内滚道摩擦力的作用下自转加速，与理论值相同。在非承载区，球不受载荷作用，此时不受内滚道的摩擦力，只能靠保持架的推动向前运动，因此，仿真值会小于理论值。随着转速的提升，球自转角速度仿真值的波动变小，这表明全陶瓷轴承在启动初始阶段打滑最严重。并且，内圈的加速度越大，仿真值靠近理论值的速度越快。

图 9 为不同内圈角加速度下球与内圈的滑移速度。可以发现，内圈角加速度越大，球与内圈的最大滑移速度越大，且最大滑移速度发生的时间越快。

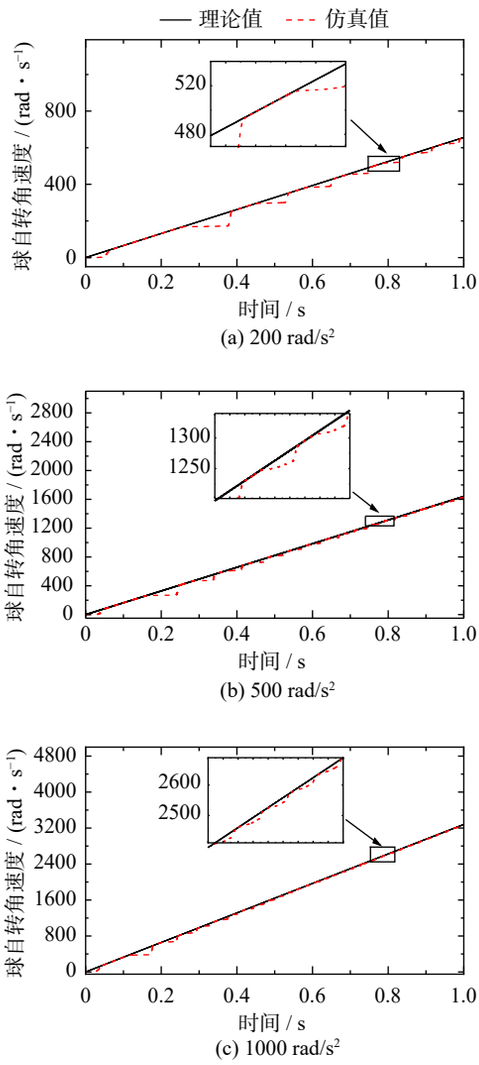


图 8 不同内圈角加速度下球的自转角速度

Fig. 8 Rotational angular velocity of the ball under different angle accelerations of inner race

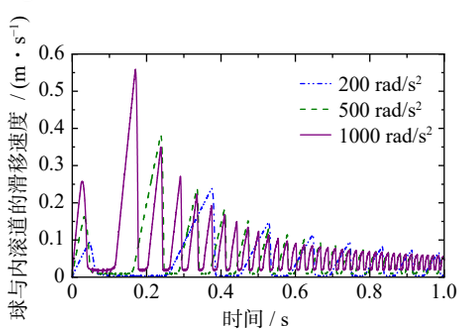


图 9 不同内圈角加速度下球与内圈的滑移速度

Fig. 9 Slipping velocity between the ball and inner race under different angle accelerations of inner race

在相同时间内，内圈角加速度的增大导致球与内圈滑移曲线的三角波峰数量增加，这是由于球与内滚道之间的接触频率增加所致。

图 10 展示了以不同内圈角加速度加速 1 s 的过程中，保持架旋转速度的理论值与仿真值的对比。可以看出，内圈在 3 种不同角加速度加速过程中，由于全陶瓷轴承打滑的影响，保持架旋转速度的仿真

值始终小于理论值。在内圈角加速度以 200 rad/s^2 加速 1 s 的过程中，保持架旋转速度的仿真值与理论值平均差为 0.08 rad/s。在内圈角加速度以 500 rad/s^2 加速 1 s 的过程中，仿真值与理论值平均差为 0.21 rad/s。在内圈角加速度以 1000 rad/s^2 加速 1 s 的过程中，仿真值与理论值平均差为 0.36 rad/s。说明内圈的角加速度越大，仿真值与理论值相差越大。不同内圈角加速度下保持架的滑动率如图 11 所示，内圈在 3 种不同角加速度下保持架的滑动率变化趋势基本相同。加速 0.4 s 后，在 200 rad/s^2 时，保持架滑动率的波动幅值最大，约为 0.55%，随着内圈角加速度的增大，保持架的滑动率更容易趋近稳定。

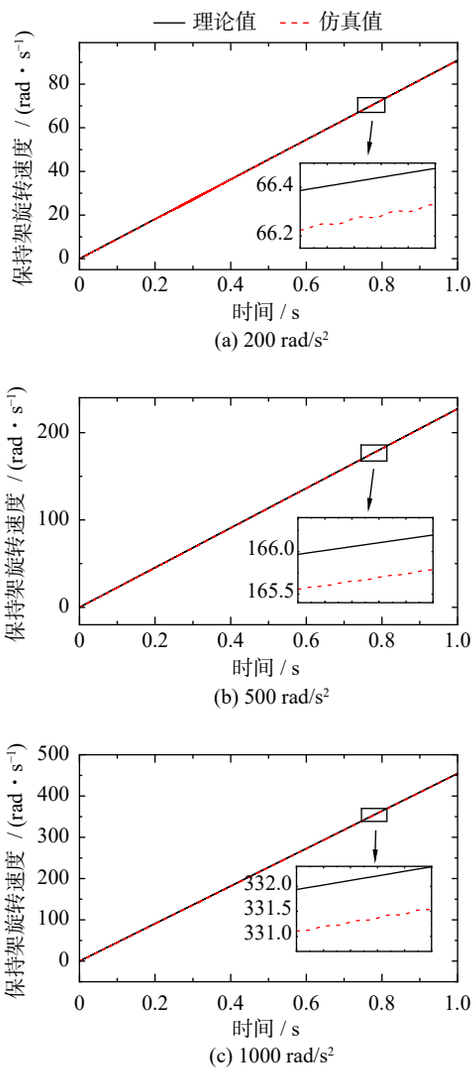


图 10　不同内圈角加速度下保持架的旋转速度

Fig. 10　Rotational velocity of the cage under different angle accelerations of inner race

3.2　径向载荷对全陶瓷轴承打滑特性的影响

本节以球缺陷宽度为 0.5 mm 的全陶瓷轴承为例，在内圈角加速度为 500 rad/s^2，径向载荷分别为 300、500、1000 N 时，探究径向载荷对全陶瓷轴承打滑特性的影响。

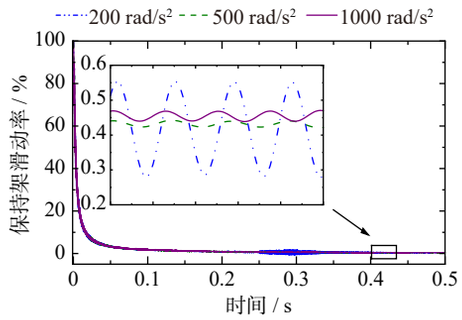


图 11　不同内圈角加速度下保持架的滑动率

Fig. 11　Slip ratio of the cage under different angle accelerations of inner race

图 12 展示了不同径向载荷下球与内圈的接触力，可以明显地看出全陶瓷轴承的非承载区域。在整个加速过程中，随着时间的增大，内圈转速不断增大，全陶瓷轴承的承载区与非承载区交替的速度变快。随着径向载荷的增大，球与内圈的接触力也增大。在非承载区域，球与内圈的接触力接近于零，可以忽略不计。由于球缺陷的存在，在承载区，球与内圈的接触力出现冲击现象，且冲击力的周期与球自转周期相同，这会严重影响轴承的振动特性。

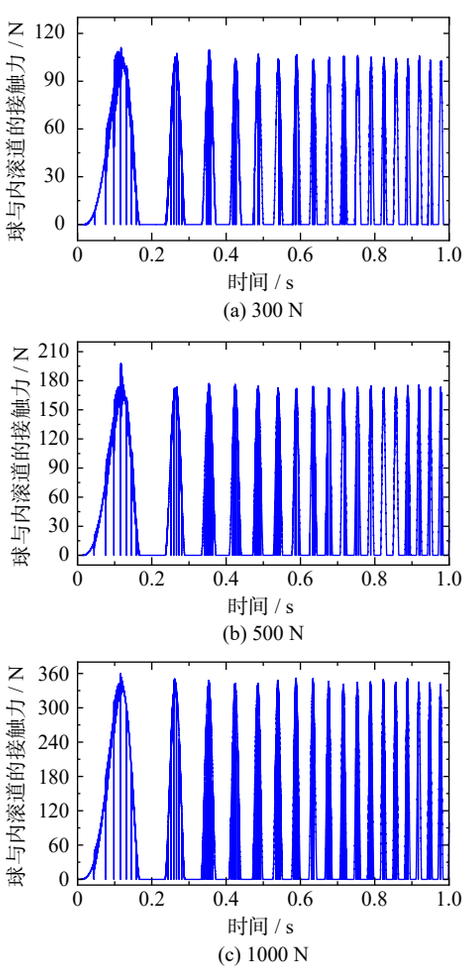


图 12　不同径向载荷下球与内圈的接触力

Fig. 12　Contact force between the ball and inner race under different radial loads

图 13 展示了不同径向载荷下，球在内圈加速 1 s 的过程中的自转角速度。可以看出，径向载荷越大，仿真值的波动越小。不同径向载荷下球与内滚道的滑移速度如图 14 所示。可以看出，随着径向载荷的增大，球与内滚道发生最大滑移速度的时间提前，且最大滑移速度减小。在径向载荷为 300 N 时，球与内滚道的滑移速度约为 0.38%；在径向载荷为 500 N 时，球与内滚道的滑移速度约为 0.37%；在径向载荷为 1000 N 时，球与内滚道的滑移速度约为 0.36%。可以得到，径向载荷的增大可以在一定程度上抑制陶瓷轴承打滑的作用。

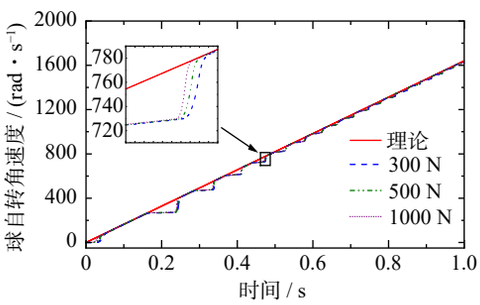


图 13 不同径向载荷下球的自转角速度

Fig. 13 Rotational angular velocity of the ball under different radial loads

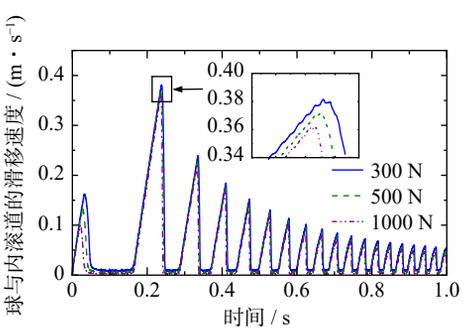


图 14 不同径向载荷下球与内滚道的滑移速度

Fig. 14 Slipping velocity between the ball and inner race under different radial loads

图 15 展示了不同径向载荷下，保持架在内圈加速 1 s 的过程中的旋转速度。在 300 N 的径向载荷下，保持架旋转速度的仿真值与理论值相差 0.42 rad/s；在 500 N 的径向载荷下，仿真值与理论值相差 0.24 rad/s；在 1000 N 的径向载荷下，仿真值与理论值相差 0.13 rad/s。由此可知，随着径向载荷的增加，保持架的旋转速度逐渐靠近理论值。图 16 展示了不同径向载荷下，保持架在内圈加速 1 s 的过程中的滑动率。在加速 0.4 s 时，300 N 径向载荷下，保持架的滑动率约为 0.44%；500 N 径向载荷下，保持架的滑动率约为 0.23%；1000 N 径向载荷下，保持架的滑动率约为 0.13%。可以进一步得到，径向载荷的增大可以在一定程度上抑制陶瓷轴承打滑。

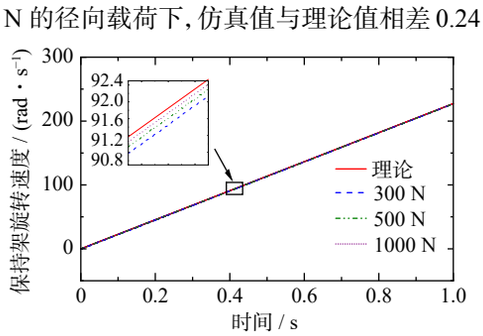


图 15 不同径向载荷下保持架的旋转速度

Fig. 15 Rotational velocity of the cage under different radial loads

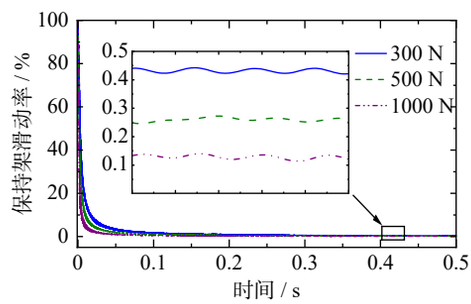


图 16 不同径向载荷下保持架的滑动率

Fig. 16 Slip ratio of the cage under different radial loads

3.3 球缺陷尺寸对全陶瓷轴承打滑特性的影响

本节以内圈角加速度为 500 rad/s^2，径向载荷为 300 N 为例，球缺陷宽度分别为 0.2、0.5、1 mm，探究径向载荷对全陶瓷轴承打滑特性的影响。

图 17 展示了健康轴承和球在不同缺陷宽度下，球与内圈的接触力。从图中可以看出，相对于健康球与内圈的接触力，缺陷球与内圈的接触力存在明显的冲击过程，且持续时间较短。随着缺陷宽度的扩大，冲击过程更加明显，接触力幅值增大，波动紊乱度提升，当球缺陷宽度尺寸为 1mm 时，球与内滚道接触力曲线前期波动极不规则，球与内滚道接触状态严重畸变，冲击、不稳定特性突出，这会严重影响轴承的振动特性。

图 18 展示了健康轴承和球在不同缺陷宽度下，球的自转角速度。可以看出，无论有/无缺陷，球自转角速度都随时间呈上升趋势。球存在缺陷时，其自转角速度有明显的变化；缺陷较小时，球自转角速度曲线与健康球自转角速度曲线差距较小。图 19 展示了健康轴承和球在不同缺陷宽度下，球与内圈的滑移速度。可以看出，滑移速度在出现第一次峰值时，随着球缺陷的尺寸增大，滑移速度越大，在承载区，存在缺陷的球与内圈的滑移速度出现波动，使轴承运行状态的不稳定性变大。

图 20 展示了健康轴承和球在不同缺陷宽度下，保持架在内圈加速 1 s 的过程中的旋转速度。可以看出，随着球缺陷宽度的增大，保持架旋转速度波动更加明显。图 21 展示了健康轴承和球在不同缺陷

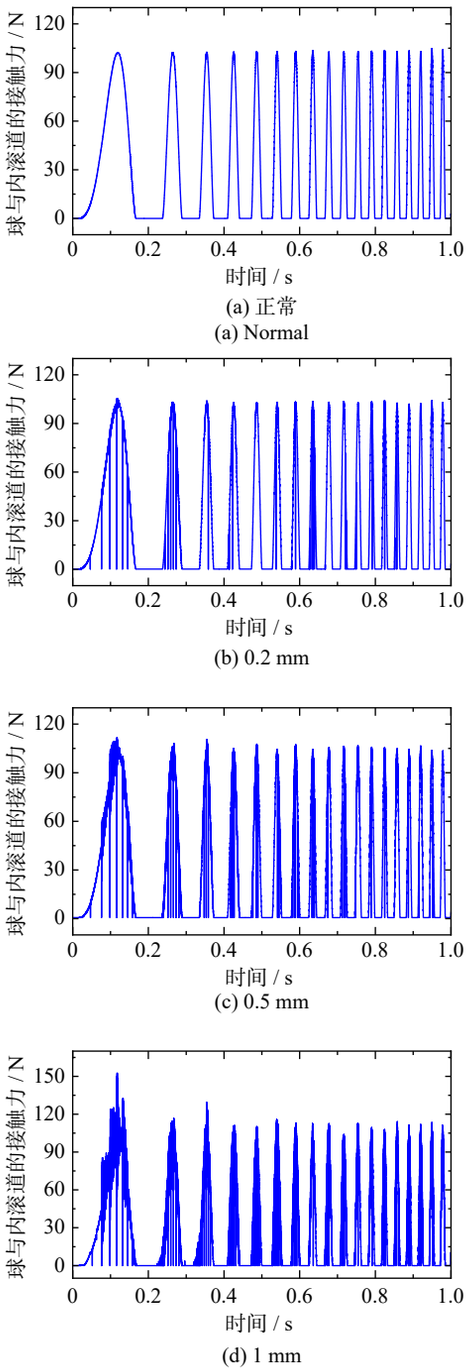


图 17　不同缺陷宽度下球与内圈的接触力

Fig. 17　Contact force between the ball and inner race under different defect widths

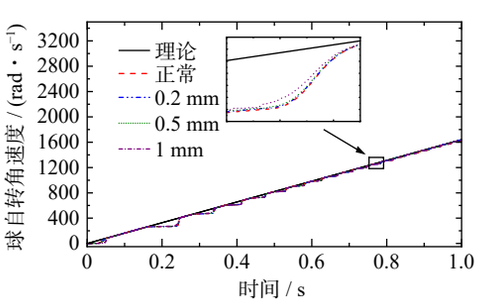


图 18　不同缺陷宽度下球的自转角速度

Fig. 18　Rotational angular velocity of the ball under different defect widths

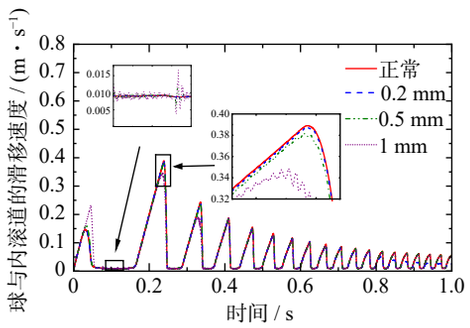


图 19　不同缺陷宽度下球与内圈的滑移速度

Fig. 19　Slipping velocity between the ball and inner race under different defect widths

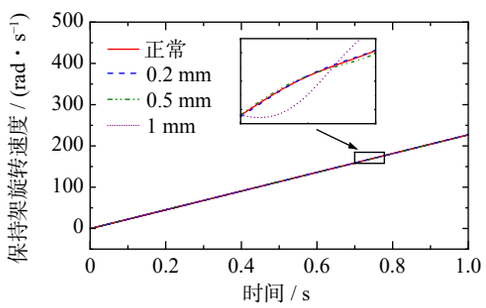


图 20　不同缺陷宽度下保持架的旋转速度

Fig. 20　Rotational velocity of the cage under different defect widths

宽度下，保持架在内圈加速 1 s 的过程中的滑动率。可以看到，当保持架滑动率趋近稳定时，球缺陷宽度越大，保持架滑动率波动越大。在加速 0.4 s 时，健康轴承的保持架滑动率约为 0.42%；球缺陷宽度为 0.2 mm 时，保持架的滑动率约为 0.43%；球缺陷宽度为 0.5 mm 时，保持架的滑动率约为 0.44%；球缺陷宽度为 1 mm 时，保持架的滑动率约为 0.52%。由此可知，随着球缺陷宽度的扩大，保持架的不稳定性增加，滑动率增大。

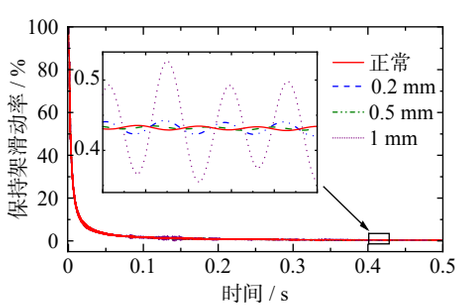


图 21　不同缺陷宽度下保持架的滑动率

Fig. 21　Slip ratio of the cage under different defect widths

4　匀速工况下全陶瓷轴承非线性振动特性分析

全陶瓷轴承在运行过程中，其振动特性会受到多种方面的影响[32-33]，本节分别采用健康轴承和球缺陷轴承模拟其振动状态，通过分析轴承的时域图、

频域图、相图、庞加莱截面图及轴心轨迹，探究转速和球缺陷宽度对全陶瓷轴承振动特性的影响。

4.1 转速对全陶瓷轴承打滑及非线性振动特性的影响

为了研究转速对全陶瓷轴承打滑及非线性振动特性的影响，提取不同转速下的振动响应数据进行比较和分析。本节以健康轴承为例，探究转速对全陶瓷轴承打滑及非线性振动特性的影响。

当全陶瓷轴承匀速运行时，球每次进入承载区会产生较为明显的咬入打滑现象。由图 22 可以看出，当转速为 6000 r/min 时，球与内滚道的最大滑移速度为 0.59 mm/s；当转速增大到 15000 r/min 时，球与内滚道的最大滑移速度为 1.19 mm/s；当转速增大到 25000 r/min 时，球与内滚道最大的滑移速度为 2.1 mm/s。随着转速的提升，球与内滚道的最大滑移速度增大，且滑移频率加快。球与内滚道滑移速度的增大，会直接加剧接触表面的滑动摩擦效应，导致接触面磨损量显著加快。

通过图 23 不同转速下的时域图可以看出，在一致

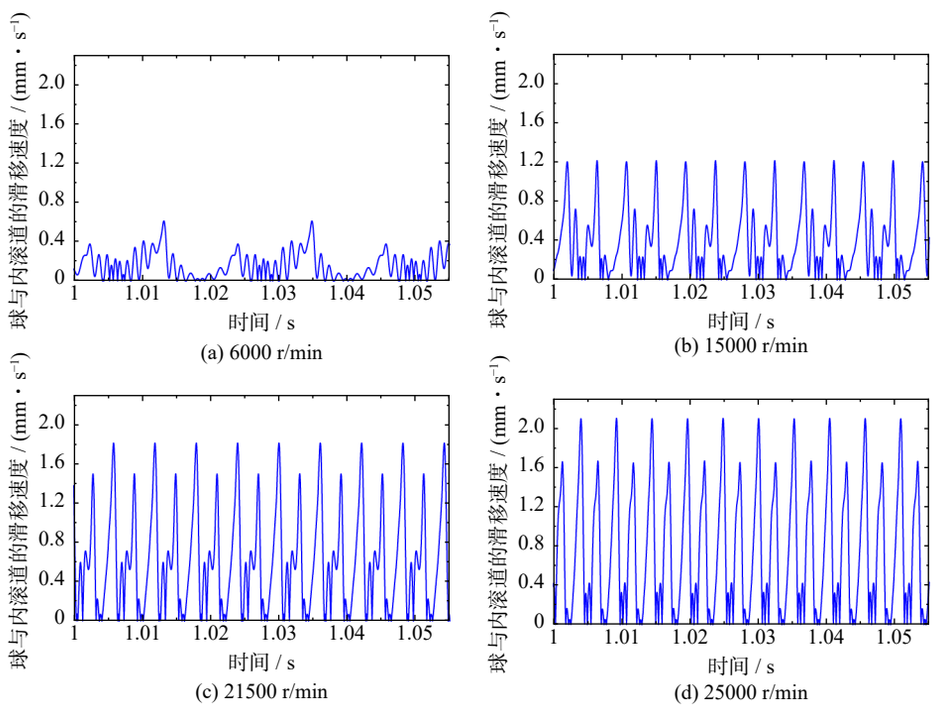


图 22 不同转速下球与内滚道的滑移速度

Fig. 22 Slipping velocity of the ball and inner raceway under different rotational velocities

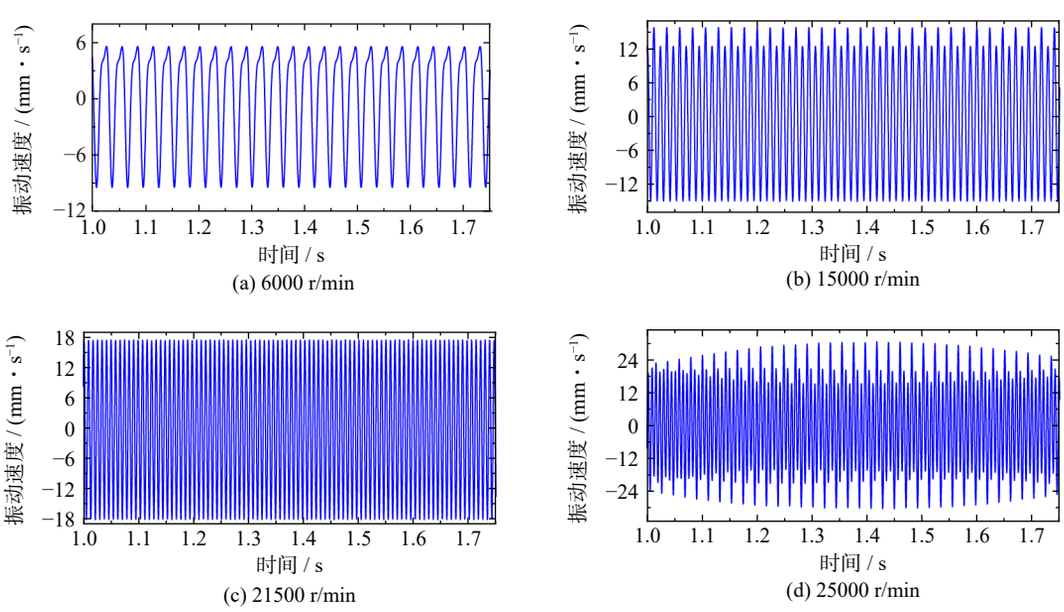


图 23 不同转速下的时域图

Fig. 23 Time-domain diagrams under different rotational velocities

的时间间隔内，随着转速的增加，全陶瓷轴承的时域振动周期减小，振动幅值增大，在 15000 和 21500 r/min 时，全陶瓷轴承的时域图反映为更加复杂的多周期函数。图 24 展示了不同转速下全陶瓷轴承的相轨迹和庞加莱截面图，图中，V_x 为 x 方向的振动速度。

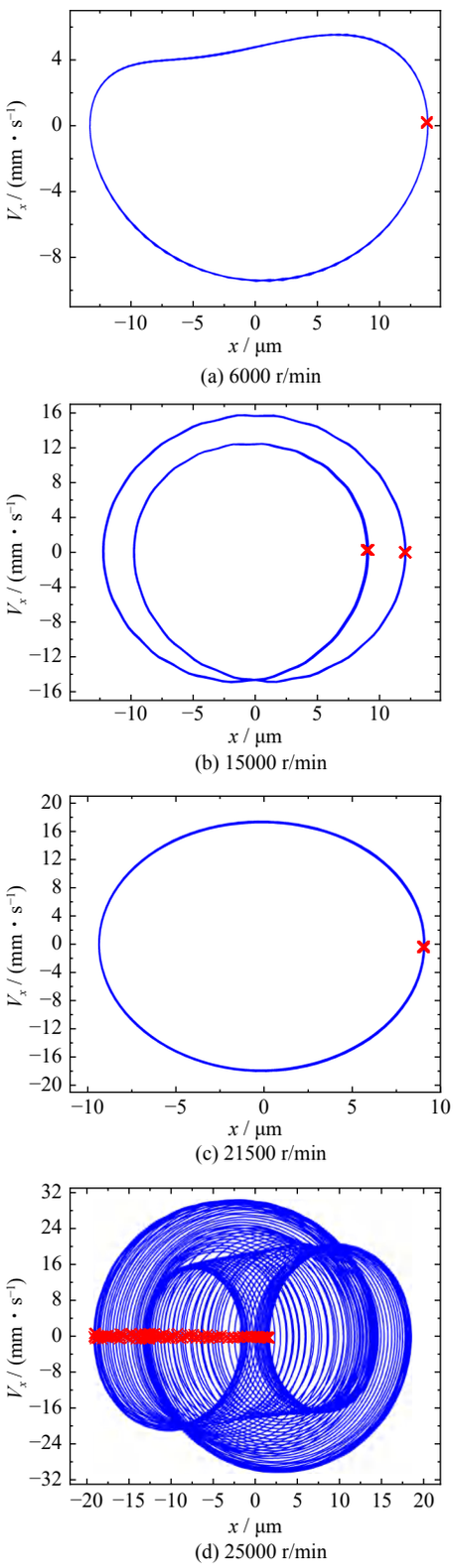


图 24　不同转速下的相轨迹和庞加莱截面图

Fig. 24　Phase trajectories and Poincaré section diagrams under different rotational velocities

可以看出，转速越高，相轨迹的范围越大，这也说明，随着转速的增加，全陶瓷轴承的振动幅值增大。在 6000 和 21500 r/min 转速时，相轨迹为一个闭合的曲线，庞加莱截面上出现了一个明显的周期性吸引子，这表示，在这两种转速下，全陶瓷轴承处于单周期状态。在 15000 r/min 转速时，相轨迹为两个闭合的椭圆形，庞加莱截面上出现了两个明显的周期性吸引子，这表示，此时全陶瓷轴承处于双周期状态。而在 25000 r/min 转速时，相轨迹为多个闭合而不重合图形，轨迹更加混乱，庞加莱截面上出现多个混沌吸引子，数量更多，更为分散，运动状态更加复杂。

图 25 展示了不同转速下全陶瓷轴承的轴心轨迹。可以看出，在 1000~30000 r/min 范围内，轴心轨迹可以分为 4 个阶段。在 1000~14000 r/min 范围内，全陶瓷轴承的轴心轨迹为一个闭合的椭圆形，随着转速的增大，轴心轨迹逐渐扩大，但始终保持单周期的状态。当转速增加到 14800 r/min 时，全陶瓷轴承的振动具有三周期的特性，此时，轴心轨迹由 3 个闭合椭圆交错组成。当转速增加到 21000 r/min 时，全陶瓷轴承的振动回归到单周期特性。当转速高于 24600 r/min 时，轴心轨迹较为混乱，轴承的运动状态为复杂，结合图 23 中 25000 r/min 下的相轨迹和庞加莱截面，可以认为，在此阶段全陶瓷轴承的振动呈现混沌状态。

4.2　球缺陷宽度对全陶瓷轴承非线性振动特性的影响

本节以转速为 15000 r/min 为例，健康轴承和球缺陷宽度分别为 0.2、0.5、1 mm，探究球缺陷宽度对全陶瓷轴承非线性振动特性的影响。

图 26 展示了球缺陷宽度为 0.5 mm 的情况下，打滑对全陶瓷轴承振动特性的影响。可以看出，考虑打滑的情况下，振动速度要略大，且振动波形产生了一定的周期滞后现象。而从轴心轨迹、相轨迹和庞加莱截面图看，考虑打滑的情况下，轴承的运动更加复杂，这也表明，打滑对轴承非线性振动的影响显著且不可忽视，要准确预测全陶瓷轴承的振动响应，必须要同时考虑接触力和打滑因素的影响。

图 27 展示了全陶瓷轴承球在不同缺陷宽度下的时域图，可以看出，球存在缺陷的时域中有明显的冲击波形，且随着缺陷宽度的逐渐扩大，时域信号产生的冲击越明显。图 28 展示了健康轴承和球在不同缺陷宽度下的频谱瀑布图，可以看出，在 1000~14000 r/min 范围内，健康轴承的频谱中主要由旋转频率 f_s 及其倍频分量组成。存在球缺陷的全陶瓷轴承频谱图中，除旋转频率 f_s 外，还有保持架故障频率 f_c 和球故障频率 f_b 以及它们的组合频率。这是因为球的缺陷

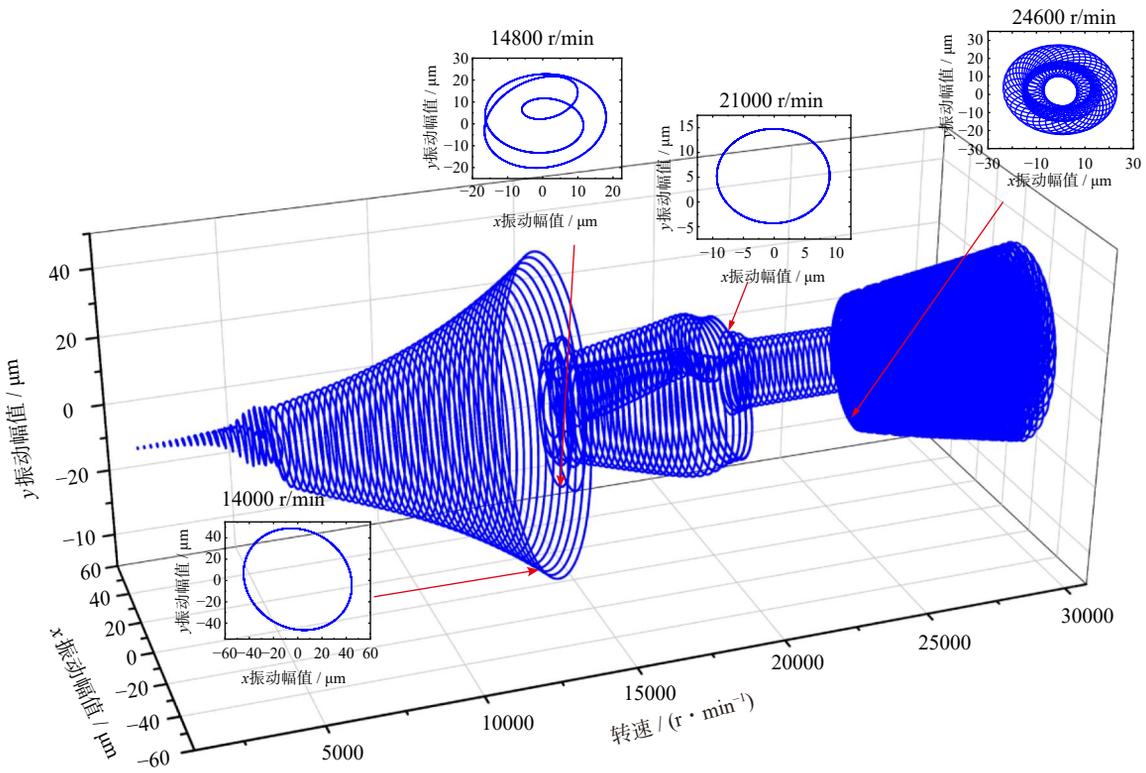


图 25 不同转速下的轴心轨迹

Fig. 25 Axis trajectory under different rotational velocities

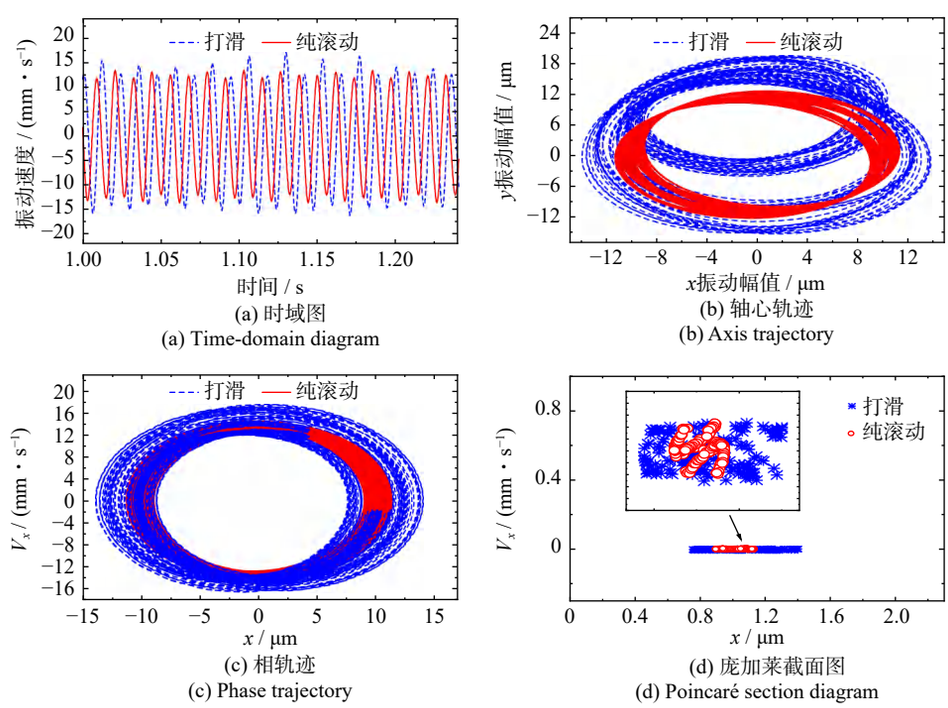


图 26 打滑对振动特性的影响

Fig. 26 The influence of slipping on vibration characteristic

区域撞击保持架，迫使保持架偏离正常运动轨迹，从而出现保持架故障频率。从图中可以明显看出，f_c 和 f_b 及它们的组合频率幅值随球缺陷宽度的增大而增大，这表明，球缺陷宽度越大，对全陶瓷轴承振动的影响越明显，这是因为，球缺陷尺寸越大导致位移激励越大，球与滚道之间产生的冲击力越大。但无论在哪种情况下，旋转频率的幅值仍占主导地位。

图 29 及 30 分别展示了健康轴承和球在不同缺陷宽度下，全陶瓷轴承的相轨迹和庞加莱截面图及轴心轨迹。可以看出，球缺陷宽度越大，相轨迹越混乱，庞加莱截面上的吸引子越为分散，轴心轨迹的曲线复杂。这也说明，随着球缺陷宽度的增加，轴承振

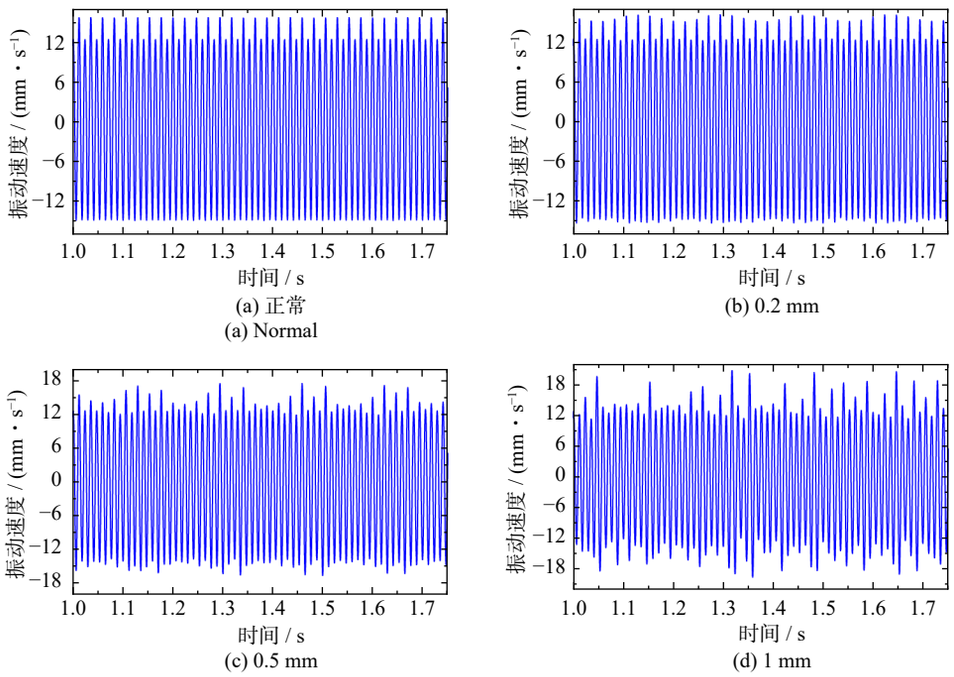


图 27　不同缺陷宽度下的时域图

Fig. 27　Time-domain diagrams under different defect widths

动幅值增大，运动越复杂，更容易出现失稳现象，不利于其高速运行，这与之前得到的结论一致。

5　试验验证

为验证所提模型的可靠性，搭建了如图 31 所示的轴承振动试验平台。选用型号为 7006CE 的全陶瓷球轴承作为测试轴承，一端选用球带缺陷的轴承，

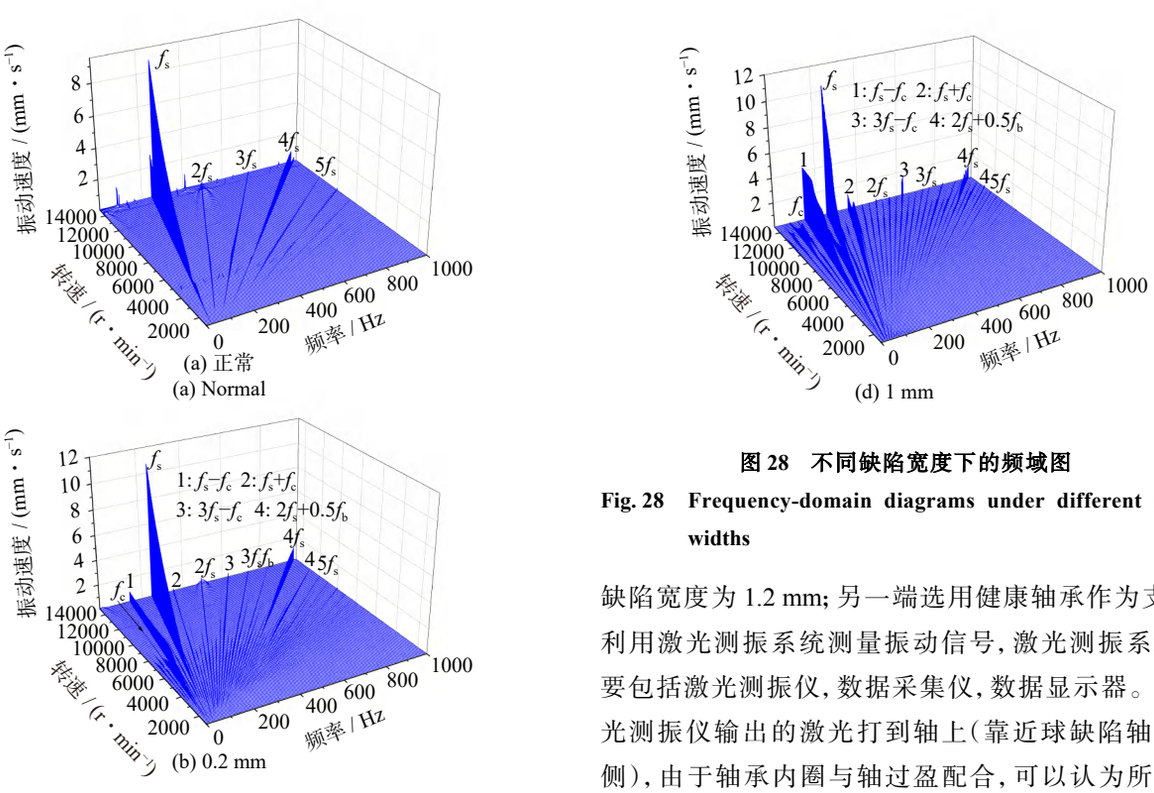


图 28　不同缺陷宽度下的频域图

Fig. 28　Frequency-domain diagrams under different defect widths

缺陷宽度为 1.2 mm；另一端选用健康轴承作为支撑。利用激光测振系统测量振动信号，激光测振系统主要包括激光测振仪，数据采集仪，数据显示器。将激光测振仪输出的激光打到轴上（靠近球缺陷轴承一侧），由于轴承内圈与轴过盈配合，可以认为所测得

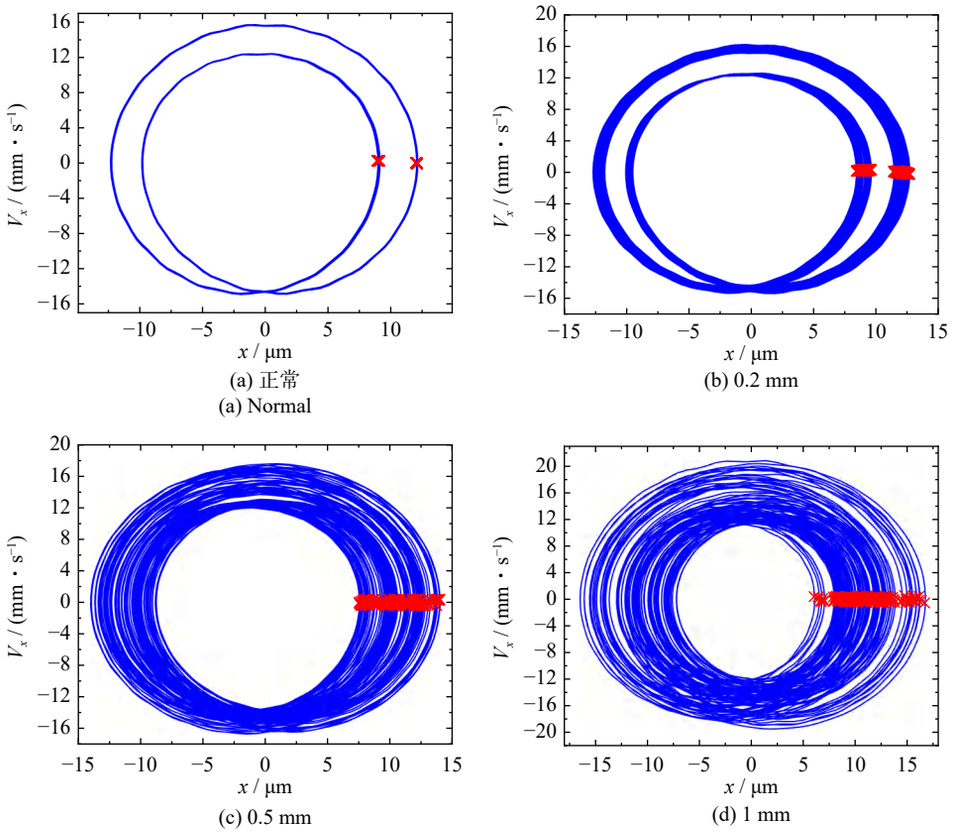


图 29 不同缺陷宽度下的相轨迹和庞加莱截面图

Fig. 29 Phase trajectories and Poincaré section diagrams under different defect widths

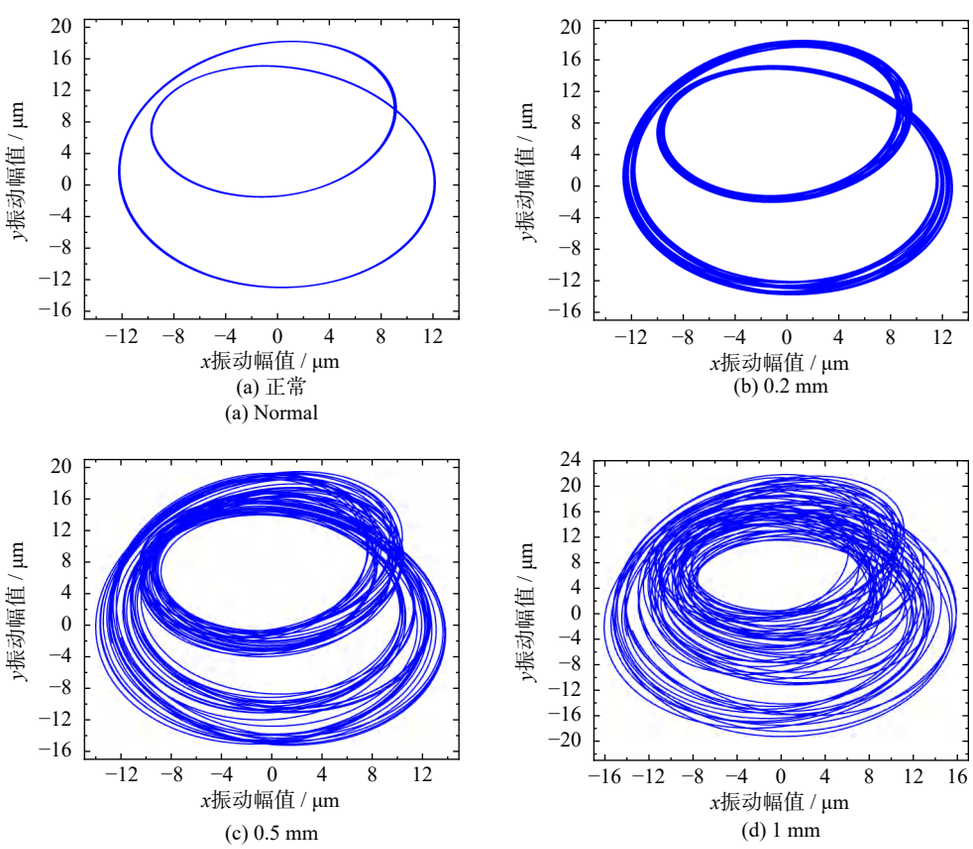


图 30 不同缺陷宽度下的轴心轨迹

Fig. 30 Axis trajectories under different defect widths

的振动为内圈振动。分别在 2000、4000 和 6000 r/min 下进行振动测量，并将其测量出的时域和频域信号与仿真结果进行对比。

图 32 展示了不同转速下仿真与试验振动响应的

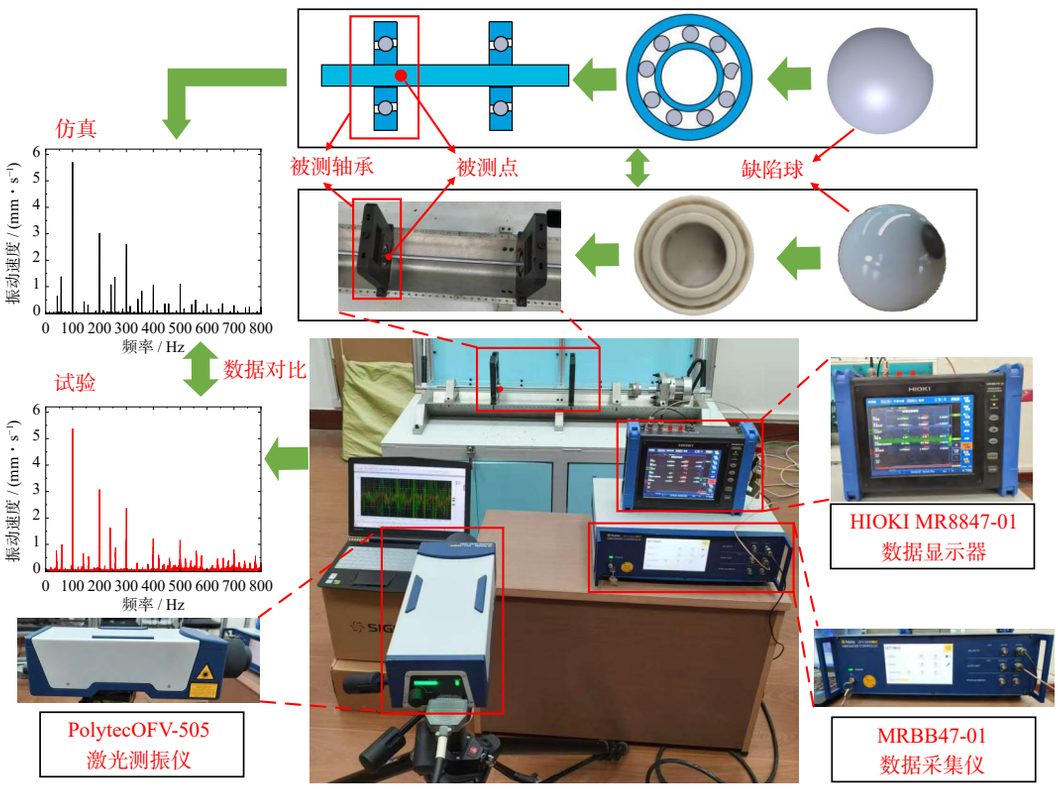
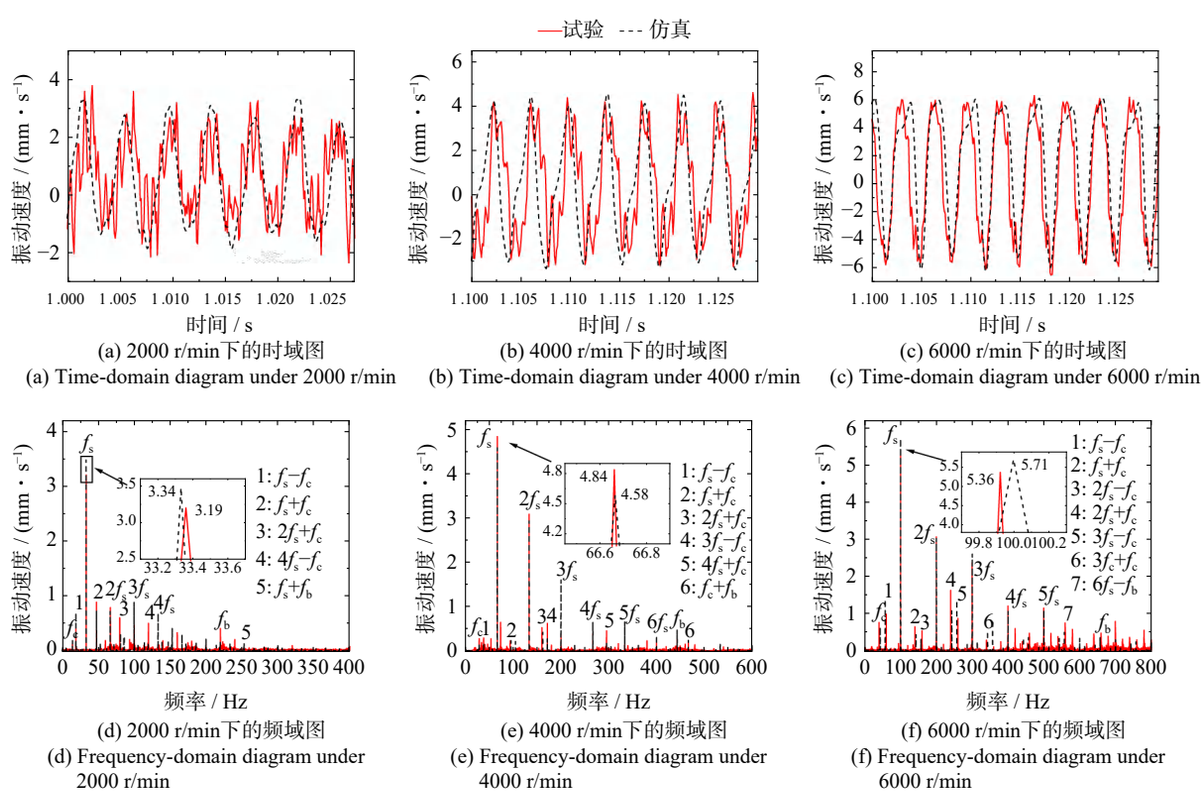


图 31　试验平台

Fig. 31　Experimental platform

对比，可以看出，在 3 种转速下，随着转速的升高，振动速度增大，在相同时间间隔内，振动周期减小。频谱图中仿真与试验结果具有较高的一致性。除旋转频率外，在仿真和试验结果中均出现了保持架和球的故障频率及它们的组合频率。在 2000 r/min 下，仿真和试验结果的 f_s 幅值误差约为 4.7%，在 4000 r/min 下，仿真和试验结果的 f_s 幅值误差约为 5.7%，在 6000 r/min 下，仿真和试验结果的 f_s 幅值误差约为 6.5%。试验



(a) 2000 r/min下的时域图
(a) Time-domain diagram under 2000 r/min

(b) 4000 r/min下的时域图
(b) Time-domain diagram under 4000 r/min

(c) 6000 r/min下的时域图
(c) Time-domain diagram under 6000 r/min

(d) 2000 r/min下的频域图
(d) Frequency-domain diagram under 2000 r/min

(e) 4000 r/min下的频域图
(e) Frequency-domain diagram under 4000 r/min

(f) 6000 r/min下的频域图
(f) Frequency-domain diagram under 6000 r/min

图 32　不同转速下振动响应的对比

Fig. 32　Comparison of vibration responses under different rotational velocities

结果与仿真结果的差异主要是试验过程中的不可控变量。

在图 30 的频谱图中，2000 r/min 下仿真的球故障频率为 219.66 Hz，试验的球故障频率为 220.08 Hz，相差 0.42 Hz；4000 r/min 下仿真的球故障频率为 443.16 Hz，试验的球故障频率为 442.04 Hz，相差 1.12 Hz；6000 r/min 下仿真的球故障频率为 656.98 Hz，试验的球故障频率为 659.36 Hz，相差 2.38 Hz。这些特征频率主要是因为球缺陷造成的，且这些特征频率的幅值均小于旋转频率的幅值，旋转频率仍占主要地位。结果表明，从仿真中获得的基本频率与试验结果基本吻合，验证了所提理论模型的可靠性。

6 结 论

为了探究球缺陷对全陶瓷角接触球轴承打滑及非线性振动特性的影响，提出了一种考虑球缺陷的全陶瓷角接触球轴承打滑动力学模型。该模型不仅考虑了球缺陷产生的时变位移激励和球缺陷对滚道产生的冲击力，同时还考虑了球与滚道之间的摩擦力及球与保持架之间的作用力，分别构建了全陶瓷轴承内圈、缺陷球和保持架的动力学模型。分析了加速工况下，加速度、径向载荷和球缺陷宽度对全陶瓷轴承打滑特性的影响。研究了匀速工况下，转速和球缺陷宽度对全陶瓷轴承非线性振动的影响，并将仿真得到的结果与试验结果进行对比，以验证模型的可靠性。主要结论如下：

(1)全陶瓷轴承在加速过程中，球的自转角速度仿真值呈阶梯状上升，但由于打滑，仿真值会略小于真实值，且随着转速的增大，仿真值的阶梯状逐渐减小，逐渐靠近理论值。内圈的加速度越大，球自转角速度仿真值靠近理论值的速度越快，球与内圈的最大滑移速度越大，且最大滑移速度发生的时间越快，保持架的滑动率更容易趋近稳定。

(2)在轴承承载区，缺陷球与内圈的接触力会出现明显的冲击现象，且冲击的周期与球自转周期相同。随着径向载荷的增大，球与内滚道发生最大滑移速度的时间提前，且最大滑移速度减小。径向载荷的增大可以在一定程度上抑制陶瓷轴承打滑的作用。

(3)考虑打滑的情况下，轴承的运动更加复杂，这也表明，打滑对轴承非线性振动的影响不可忽视，要准确预测全陶瓷轴承的振动响应，必须要同时考虑接触力和打滑因素的影响。随着缺陷宽度的扩大，冲击过程更加明显，接触力幅值增大，波动紊乱度提升，保持架的滑动率越大。当缺陷宽度扩大到 1 mm 时，接触力曲线前期波动极不规则，球与内滚道接触状态严重畸变，冲击、不稳定特性突出。在承载区，存在缺陷的球与内圈的滑移速度出现波动，使轴承运行状态的不稳定性变大。

(4)随着球缺陷宽度尺寸的增大，全陶瓷轴承的振动幅值增大，运动越复杂，更容易出现失稳现象，不利于全陶瓷轴承的高速运行。通过仿真与试验结果的对比表明，从仿真中获得的基本频率与试验结果基本吻合，验证了所提理论模型的可靠性。

参考文献：

[1] 魏万鑫，苏云峰，樊恒中，等. 氮化硅陶瓷轴承球的滚动摩擦磨损特性与损伤行为 [J]. 摩擦学学报(中英文)，2024，44(9)：1256-1265.
WEI Wanxin，SU Yunfeng，FAN Hengzhong，et al. Rolling friction，wear characteristics and damage behaviors of Si_3N_4 ceramic bearing balls[J]. Tribology，2024，44(9)：1256-1265.

[2] XIA Z X，WU Y H，MA T B，et al. Experimental study on adaptability of full ceramic ball bearings under extreme conditions of cryogenics and heavy loads[J]. Tribology International，2022，175：107849.

[3] ZHANG K，WANG M X，ZHANG Y B，et al. Wear performance evaluation of journal bearings in wind turbine gearbox[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2025，297-298:110346.

[4] QI W T，WANG W M，GU Z P，et al. Investigation on the characteristics of rub-impact and misalignment faults in aero-engines during diving-climbing maneuver[J]. Journal of Sound and Vibration，2025，606：119019.

[5] 韩勤锴，褚福磊. 角接触滚动轴承打滑预测模型 [J]. 振动工程学报，2017，30(3)：357-366.
HAN Qinkai，CHU Fulei. A nonlinear dynamic model to predict skidding behavior of angular contact ball bearings[J]. Journal of Vibration Engineering，2017，30(3)：357-366.

[6] 师志峰，张刚，刘静，等. 考虑滚道局部故障的行星滚针轴承保持架打滑特性研究 [J]. 振动工程学报，2025，38(6)：1280-1286.
SHI Zhifeng，ZHANG Gang，LIU Jing，et al. Cage slip characteristics of planetary needle roller bearings considering localized raceway defects[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(6)：1280-1286.

[7] 涂文兵，杨锦雯，罗丫，等. 高速列车轴箱圆柱滚子轴承启动过程的打滑动力学特性 [J]. 振动与冲击，2020，39(10)：127-132.
TU Wenbing，YANG Jinwen，LUO Ya，et al. Skidding dynamic characteristics of axle box roller bearing of high-speed trains during start-up[J]. Journal of Vibration and Shock，2020，39(10)：127-132.

[8] LIU Y Q，CHEN Z G，TANG L，et al. Skidding dynamic

performance of rolling bearing with cage flexibility under accelerating conditions[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，150：107257.

[9] GAO S，CHATTERTON S，NALDI L，et al. Ball bearing skidding and over-skidding in large-scale angular contact ball bearings：nonlinear dynamic model with thermal effects and experimental results[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，147：107120.

[10] ATEF M M，KHAIR-ELDEEN W，YAN J W，et al. A nonlinear dynamic analysis of skidding behavior in rolling bearings using lubricant traction coefficients and cage flexibility[J]. Tribology International，2024，197：109756.

[11] 景新，曹宏瑞，陈雪峰. 保持架打滑对航空发动机主轴承故障特征频率的影响 [J]. 航空动力学报，2019，34(5)：1145-1152.
JING Xin，CAO Hongrui，CHEN Xuefeng. Effect of cage slipping on fault characteristic frequencies of aeroengine mainshaft bearings[J]. Journal of Aerospace Power，2019，34(5)：1145-1152.

[12] 彭城，曹宏瑞，朱玉彬，等. 三点接触球轴承打滑动力学分析与验证 [J]. 机械工程学报，2023，59(1)：123-130.
PENG Cheng，CAO Hongrui，ZHU Yubin，et al. Dynamic analysis and verification on skidding behavior of three-point contact ball bearings[J]. Journal of Mechanical Engineering，2023，59(1)：123-130.

[13] XU C，WU T H，YANG H B，et al. Study on vibration mechanism induced by skidding in pure rolling contact[J]. Tribology International，2021，154：106669.

[14] 李峰，邓四二，张文虎. 频繁摆动工况下球轴承打滑特性研究 [J]. 机械工程学报，2021，57(1)：168-178.
LI Feng，DENG Sier，ZHANG Wenhu. Skidding characteristics of ball bearings withstanding a frequent oscillating condition[J]. Journal of Mechanical Engineering，2021，57(1)：168-178.

[15] TU W B，YU W N，SHAO Y M，et al. A nonlinear dynamic vibration model of cylindrical roller bearing considering skidding[J]. Nonlinear Dynamics，2021，103(3)：2299-2313.

[16] 于庆杰，张家铭，孙志强. 高速滚动轴承打滑动力学理论和试验研究进展 [J]. 轴承，2025(7)：1-12.
YU Qingjie，ZHANG Jiaming，SUN Zhiqiang. Advances in dynamics theory and experimental research on skidding of high-speed rolling bearings[J]. Bearing，2025(7)：1-12.

[17] 高帅，韩勤锴，褚福磊. 考虑热流固耦合的角接触滚动轴承动力学特性及打滑状态分析 [J]. 机械工程学报，2022，58(9)：87-97.
GAO Shuai，HAN Qinkai，CHU Fulei. Analysis of dynamic characteristics and skidding state of angular contact bearing by thermo-hydro-elasto-dynamic coupling model[J]. Journal of Mechanical Engineering，2022，58(9)：87-97.

[18] 郑艳伟，刘公平，赵滨海，等. 高温高速混合陶瓷球轴承性能分析与试验研究 [J]. 航空动力学报，2024，39(8)：496-504.
ZHENG Yanwei，LIU Gongping，ZHAO Binhai，et al. Performance analysis and test research of high temperature and high speed hybrid ceramic ball bearings[J]. Journal of Aerospace Power，2024，39(8)：496-504.

[19] 伊海铭，侯磊，高朋，等. 含中介轴承内圈局部缺陷的双转子系统的组合共振特性 [J]. 航空动力学报，2020，35(9)：1964-1976.
YI Haiming，HOU Lei，GAO Peng，et al. Combination resonance characteristics of a dual-rotor system with a local defect of inter-shaft bearing inner ring[J]. Journal of Aerospace Power，2020，35(9)：1964-1976.

[20] 郭宝良，赵玉秀，郑建校，等. 滚动轴承单一局部损伤故障变刚度动力学建模 [J]. 振动工程学报，2025，38(5)：963-973.
GUO Baoliang，ZHAO Yuxiu，ZHENG Jianxiao，et al. Dynamic modeling of variable stiffness for single local damage fault of rolling bearing[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(5)：963-973.

[21] ZHANG X，BAI C，JIN Y L，et al. Nonlinear vibration characteristics of a rotor bearing system with irregular raceway defect[J]. Nonlinear Dynamics，2025，113(10)：11259-11281.

[22] NIU L K，CAO H R，HOU H P，et al. Experimental observations and dynamic modeling of vibration characteristics of a cylindrical roller bearing with roller defects[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2020，138：106553.

[23] MUFAZZAL S，MUZAKKIR S，KHANAM S. A dynamic model for simulating vibration response of ball bearings with extended outer race defects for precise spall size estimation[J]. Journal of Sound and Vibration，2023，552：117606.

[24] LIU J，WANG L F，SHI Z F. Dynamic modelling of the defect extension and appearance in a cylindrical roller bearing[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2022，173：109040.

[25] LI N，ZHANG J Q，MENG X Y，et al. Dynamic response and failure analysis of bearing under the impact of vibration excitation[J]. Engineering Failure Analysis，2023，154：107640.

[26] 雷春丽，薛伟，樊高峰，等. 考虑内、外圈复合故障的角接触球轴承振动特性研究 [J]. 振动与冲击，2024，43(14)：275-283.
LEI Chunli，XUE Wei，FAN Gaofeng，et al. Dynamic modeling of angular contact ball bearings considering composite defects in inner and outer rings[J]. Journal of Vibration and Shock，2024，43(14)：275-283.

[27] 王展，陈思阳，王子男，等. 考虑动态波纹的陶瓷轴承-转子系统非线性振动特性研究 [J]. 机械工程学报，2024，60(23)：189-204.
WANG Zhan，CHEN Siyang，WANG Zinan，et al.

Research on nonlinear vibration characteristics of ceramic bearing-rotor system considering dynamic waviness[J]. Journal of Mechanical Engineering，2024，60(23)：189-204.

[28] DAI P，LIANG X Y，LIN X，et al. Investigation on stability and slip characteristic of the cage in cylindrical roller bearing with localized failure on raceways[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，199：110469.

[29] ZHANG R Q，GUO L，ZONG Z，et al. Dynamic modeling and analysis of rolling bearings with rolling element defect considering time-varying impact force[J]. Journal of Sound and Vibration，2023，562：117820.

[30] DENG S，CHANG H Y，ZHU X L，et al. Sensitivity of different types of structural size combinations to dynamic stability and vibration of angular contact ball bearings based on nonlinear dynamic model[J]. Tribology International，2023，181：108309.

[31] ROHANI BASTAMI A，VAHID S. A comprehensive evaluation of the effect of defect size in rolling element bearings on the statistical features of the vibration signal[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，151：107334.

[32] WANG Z，CHEN S Y，WANG Z N，et al. Nonlinear dynamic analysis of full-ceramic bearing-rotor systems considering dynamic waviness variations[J]. Nonlinear Dynamics，2024，112(24)：21819-21847.

[33] 李志农，李云龙，任帅，等. 局部点蚀故障滚动体的滚动轴承动力学模型研究 [J]. 振动工程学报，2020，33(3)：597-603.
LI Zhinong，LI Yunlong，REN Shuai，et al. Research on dynamic model of rolling bearing with local pitting fault in rolling bearing element[J]. Journal of Vibration Engineering，2020，33(3)：597-603.

第一作者：王 展(1984—)，男，博士，教授。
E-mail：juven1126@sjzu.edu.cn
通信作者：王子男(1989—)，男，博士，副教授。
E-mail：zinanwang89@sjzu.edu.cn

基于叶尖定时的低转速动叶片裂纹在线识别方法

杨斯骞[1,2]，段礼祥[2]，张继旺[1,3]，何仁洋[1,3]，王荣仁[1,3]

（1. 中国特种设备检测研究院，北京 100029；2. 中国石油大学（北京）安全与海洋工程学院，北京 102249；
3. 国家市场监督管理总局技术创新中心（油气管道与储存设备安全），北京 100029）

摘要：针对矿用通风机等低转速（低于叶片 1 阶频率）透平设备动叶片裂纹在线识别难题，本文提出了一种基于叶尖定时原理与叶尖偏移量的裂纹在线识别方法。采用理论建模和有限元仿真分析了不同转速、不同裂纹状态下，动叶片的动态形变特性，建立了叶尖偏移量与叶片状态间的关系。构建了动叶片叶尖偏移量在线测取值与离线标定值对比的裂纹识别策略。设计搭建了叶尖定时原理的动叶片裂纹测试试验台，并选择在 500~3000 r/min 的范围内，进行了 45 组不同位置（叶尖、叶中和叶根）、不同长度裂纹（最小裂纹长度为 1/10 叶宽）的测试试验，3 mm 级及以上尺寸裂纹识别准确率达到 100%，裂纹长度识别误差小于 5.33%，结果表明所提方法可为低转速动叶片裂纹在线识别提供有效解决方案。

关键词：动叶片；叶尖定时；裂纹识别；低转速；叶尖偏移量
中图分类号：TH165$^+$.3；TD441 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508004

Online identification method for cracks in low-speed rotating blades based on tip-timing technique

YANG Siqian[1,2], DUAN Lixiang[2], ZHANG Jiwang[1,3], HE Renyang[1,3], WANG Rongren[1,3]

（1.China Special Equipment Inspection and Research Institute，Beijing 100029，China；
2.School of Safety and Ocean Engineering，China University of Petroleum，Beijing 102249，China；
3.Technology Innovation Center of Oil and Gas Pipeline and Storage Equipment Safety，
State Administration for Market Regulation，Beijing 100029，China）

Abstract: Aiming at the problem of online identification of cracks in the moving blades of low-speed turbomachinery，such as mine ventilation fans (below the first-order frequency of the blades)，a recognition method based on tip timing vibration measurement and tip displacement is proposed. The dynamic deformation characteristics of the moving blades under different speeds and crack conditions were analyzed through theoretical modeling and finite element simulations，and the relationship between the tip offset and the blade state was established. A crack identification strategy was constructed by comparing the online measured values of the tip offset of the moving blades with the offline calibrated values. A test bench for the crack test of the moving blade based on the tip timing principle was designed and built，and 45 groups of tests with different crack positions (blade tip，blade middle，and blade root) and different crack lengths (the minimum crack length is 1/10 of the blade width) were carried out in the range of 500~3000 r/min. The recognition accuracy of cracks with a size of 3 mm or more reached 100%，and the crack length recognition error was less than 5.33% under the condition of having prior knowledge of the crack location. The test results show that the proposed method can provide an effective solution for the online identification of cracks in low-speed moving blades.

Keywords: rotating blades; tip-timing; crack identification; low rotational speed; blade tip offset

旋转叶片作为透平设备如矿用通风机、烟气轮机等的核心部件，其结构完整性对设备效率与安全至关重要。然而，长期处于粉尘、腐蚀及交变载荷等复杂工况下，叶片极易萌生裂纹甚至断裂，对透平设备的安全运行造成威胁。因此，对动叶片裂纹进行识别具有重要的现实意义，但其特殊的结构与恶劣的运行工况导致状态数据测取难，裂纹识别难[1]。

针对此难题，近年来发展了叶尖定时监测与叶片模态参数变化的裂纹识别方法：通过监测叶片裂纹引发的模态频率偏移，实现对裂纹的有效识别[2]。

收稿日期：2025-08-03；**修订日期：**2025-10-15
基金项目：中国特检院重点项目（2025 重点 02）；青年科技英才项目（KJYC-2025-04）；内蒙古自然科学基金资助项目（2024LHMS05006）

王维民等[3]基于叶尖定时技术，研究喘振阶段的叶片频幅特征，根据幅值有效值和报警阈值实现喘振实时预警。胡明辉等[4]建立了燃气轮机叶片激振力模型和机匣强迫振动响应模型，求解得到动叶片断裂激励下的宽频振动响应规律，形成宽频振动特征驱动的叶片断裂故障辨识方法。CHUNG 等[5]定义了马氏距离并将其用于具有裂纹的旋转多叶片系统故障诊断，通过仿真模型获取 BTT 信号，研究裂纹存在和信噪比对所提方法可靠性的影响。DU TOIT 等[6]提出一种包含随机有限元模型（FEM）的模态分析和贝叶斯线性回归的叶尖定时技术，通过跟踪叶片固有频率的相对变化和振幅，将涡轮叶片损伤分为非严重、中等和严重等级。张松林等[7]开展转子叶片疲劳试验，利用裂纹存在会导致叶片共振频率偏移的特性实现对裂纹的早期诊断。许敬晖等[8]提出基于 L_0 范数的叶端定时欠采样信号稀疏重构算法，利用分块正交匹配追踪算法分段重构信号以监测在变转速非稳态工况下转子叶片动频的变化情况，据此判断转子叶片是否产生裂纹。WU 等[9]提出通过分析叶片共振频率、振幅变化及叶间距等参数诊断裂纹的方法，先通过 Lomb-Scargle 周期图判断裂纹是否出现，再利用叶片频率和间距定位裂纹叶片数量。XU 等[10]提出利用高时频分辨率的同步提取变换，提取裂纹叶片振动信号的时频特征，能更早检测到裂纹叶片的固有频率偏移，同时结合试验与有限元分析结果定性分析裂纹长度，此外，为了监测叶片裂纹的扩展，提出了（Block-AOLS）的稀疏重建方法重建欠采样的 BTT 信号[11]，以跟踪破裂叶片的固有频率，根据健康叶片和裂纹叶片间的固有频率偏移来推断裂纹扩展过程。FAN 等[12]提出结合叶片振动位移、有效值和转速的喘振识别方法（RSSID），并通过监测叶片的固有频率来检测裂纹叶片。敖春燕等[13]基于叶尖定时的非接触测量方法和振动响应传递比概念，采用周向傅里叶算法对叶尖定时信号进行处理，提取不同转速下单模态共振条件下的叶尖位移。ZHANG 等[14]提出基于叶尖定时技术的圆盘外缘裂纹表征方法，利用裂纹尖端位移、叶尖振动相对位置及实际测量点，表征裂纹状态参数（长度、位置）对叶尖圆周位移信号的影响。

由文献调研可知，上述方法能够较好地实现叶片过临界转频下裂纹的识别。但针对低转速条件下叶片振动响应较弱的问题，现有依赖于叶片共振参数变化的识别方法不再适用。因此，低转速下动叶片状态监测与裂纹识别依然是透平设备运维中亟需解决的重大技术挑战。针对上述问题，ZHANG 等[15]以低速烟气轮机为研究对象提出基于等效悬臂梁自由端挠度变化的损伤识别方法，并通过有限元模态理论和试验进行验证。DIAMOND 等[16]提出了一种状态空间模型方法，利用近距离检测信号将信号转换到角域，然后计算信号的瞬时相位，从而根据获得的叶尖偏转量识别裂纹。

本文针对低转速动叶片裂纹识别难的问题，提出一种基于叶尖定时与叶尖偏移量的低转速叶片裂纹识别方法。通过含裂纹动叶片气动载荷-悬臂梁耦合模型和有限元仿真模拟，研究叶尖偏移量与裂纹长度、裂纹位置间的关系。在此基础上搭建旋转叶片叶尖定时测试试验台，在线测取动叶片叶尖偏移量，验证低转速下动叶片裂纹识别的有效性。

1 叶尖定时测振原理

叶尖定时方法作为一种非接触式叶片振动测量技术，通过定时传感器捕捉动叶片尖端因振动产生的时序差来间接测取叶片的振动信息[17]，核心原理如图 1 所示。

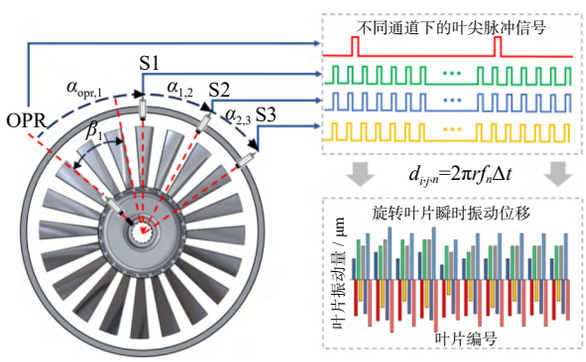


图 1 叶尖定时技术原理

Fig. 1 Principle of tip-timing technique

其中，叶尖定时传感器（如图 1 中 S1、S2、S3）布设于叶片外围的机匣上，用于测量旋转叶片经过定时传感器的到达时刻；键相（once per revolution, OPR）传感器可测取转轴瞬时转速，并为叶尖振幅计算提供测量基准。

在实际测试中，可以 OPR 传感器任意脉冲信号为起始时刻开始采样，将首个经过 S1 传感器的叶片定义为 1 号叶片，按照旋转方向对叶片依次进行编号。假设叶片总数为 m 个，叶尖旋转半径为 r，第 j 个定时传感器与 OPR 传感器的夹角为 $\alpha_{\mathrm{opr},j}$，1 号叶片与键相的夹角为 β_1，相邻定时传感器之间的夹角分别为 $\alpha_{1,2}$ 和 $\alpha_{2,3}$。则可测得第 i 个叶片在第 n 圈到达第 j 个定时传感器的实际到达时间 $t_{i,j,n}$。若 OPR 传感器测得第 n 圈转子的转频为 f_n，则可以得到第 i 个叶片在第 n 圈到达第 j 个定时传感器的理论时间为：

$$\tilde{t}_{i,j,n}=\frac{\alpha_{\mathrm{opr},j}-\beta_1+2\pi(n-1)+\dfrac{2\pi}{m}(i-1)}{2\pi f_n} \tag{1}$$

当叶片发生振动时, 叶尖的摆动会导致实际到达时间相对于理论到达时间产生超前或滞后现象, 则实际到达时刻与理论到达时刻的偏差 Δt 为:

$$\Delta t = t_{i,j,n} - \tilde{t}_{i,j,n} \tag{2}$$

可以测算出该时刻第 i 个叶片的瞬时振动位移为:

$$d_{i,j,n} = 2\pi r f_n \Delta t \tag{3}$$

2　低转速下动叶片形变分析

2.1　理论建模分析

旋转叶片在运行中承受气动力、离心力及重力等多源载荷综合作用, 其中垂直作用于叶面的气动力载荷对微幅振动偏移影响最为显著。基于叶片在稳定垂直流场中的力学特性, 建立以叶根为固定端的悬臂梁简化模型, 定义 x 轴沿叶片展向延伸, y 轴与旋转切向一致的直角坐标系, 如图 2 所示。该模型将流固耦合作用下叶片的动力学响应问题简化为梁结构形变问题, 为后续叶尖偏移量化分析奠定理论基础。

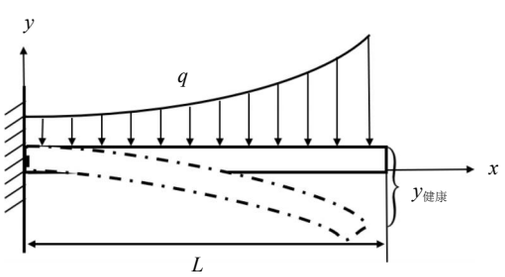


图 2　叶片等效悬臂梁结构

Fig. 2　Equivalent cantilever beam structure of blade

图 2 中, L 为悬臂梁的长度, 即叶片的长度; q 为气动等效载荷, 作用于悬臂梁上表面; $y_{健康}$ 表示气动载荷作用下的叶尖偏移量。

因此, 根据空气阻力的通用公式, 计算叶片所受气动力载荷的大小为:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho C_D A v^2 \tag{4}$$

式中, F_D 为气动力载荷(单位: N); ρ 为密度, 标准大气条件下 45 号钢的密度 $\rho \approx 7.85$ kg/m^3; C_D 为阻力系数, 与叶片的形状和表面粗糙度有关, 本文取为 0.82; A 为叶片的迎风横截面积(单位: m^2), 即垂直于气流方向的投影面积; v 为空气相对于叶片的流速(单位: m/s)。

假设以叶片根部为起点(x=0)、沿 x 轴正方向, 坐标最大值为叶片长度 L(即 $0 \leqslant x \leqslant L$), 宽度为 b, 则载荷函数为:

$$q(x) = \frac{1}{2}\rho C_D b v^2 \tag{5}$$

根据气动力载荷分布, 剪力 $F_D(x)$ 和弯矩 $M_D(x)$ 满足以下关系:

$$\frac{F_D(x)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}F_D(x), \quad \frac{\mathrm{d}M_D(x)}{\mathrm{d}x} = F_D(x) \tag{6}$$

对式 (6) 进行积分, 得到剪力 $F_D(x)$ 和弯矩 $M_D(x)$ 的表达式:

$$F_D(x) = \frac{1}{2}\rho C_D b\omega^2 \int_x^L x^2 \mathrm{d}x = \frac{\rho C_D b\omega^2 (L^3 - x^3)}{6} \tag{7}$$

式中, ω 为动叶片的角速度。对剪力 $F_D(x)$ 进行积分, 得到弯矩 $M_D(x)$:

$$M_D(x) = \int_x^L \frac{1}{6}\rho C_D b\omega^2 \left(L^3 - x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho C_D b\omega^2 \left(\frac{L^4}{4} - \frac{xL^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) \tag{8}$$

同时, 根据材料力学公式, 叶片截面上的弯曲应力 $\sigma(x,y)$ 为:

$$\sigma(x,y) = \frac{M_D(x)\cdot y}{I} \tag{9}$$

式中, $\sigma(x,y)$ 为叶片截面上 y 处的弯曲应力; y 为距中性轴的距离; I 为截面的惯性矩, 矩形截面积惯性矩为:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \tag{10}$$

式中, h 为叶片厚度。

(1)正常条件叶片的叶尖位移

根据以上推导结论, 分析正常叶片的叶尖位移, 悬臂梁的弯曲变形满足以下关系:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M_D(x)}{EI} \tag{11}$$

式中, $y(x)$ 为叶片的竖向位移; E 为材料弹性模量。

对 $M_D(x)$ 积分两次即可得到叶片的变形曲线 $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{EI}\int_0^x \int_0^x M_D(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2EI}\rho C_D b\omega^2 \left(\frac{L^4 x^2}{8} - \frac{x^3 L^3}{18} + \frac{x^6}{360}\right) \tag{12}$$

将 x=L 代入式 (12), 健康叶片的叶尖偏移量为:

$$y(x)_{健康} = \frac{13\rho C_D b\omega^2 L^6}{360EI} \tag{13}$$

(2)含裂纹叶片的叶尖位移

当叶片在运行过程中出现裂纹时, 会引起的惯性矩变化, 假设裂纹位于叶片的 x_c 位置, 其长度为 a, 宽度为 b_1, 如图 3 所示。则裂纹处的有效惯性矩 I_c 为:

$$I_c = \frac{1}{12}(b - b_1)(h - a)^3 \tag{14}$$

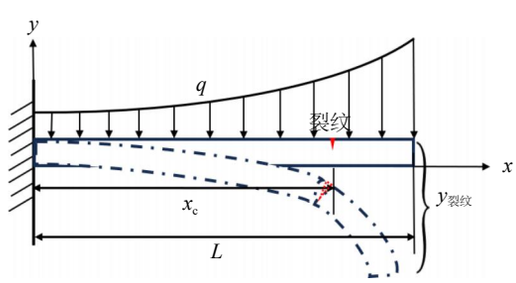


图 3　含裂纹叶片等效悬臂梁结构

Fig. 3　Equivalent cantilever beam structure of blade with cracks

此时，以裂纹为分割线将叶片分为两段：

（a）$0 \leqslant x \leqslant x_c$，刚度为 EI；

（b）$x_c \leqslant x \leqslant R$，刚度为 EI_c。

分段积分得到裂纹后叶尖位移 $y(L)$ 裂纹：

$$y(L)_{裂纹} = \frac{1}{EI}\int_0^{x_c}\int_0^{x_c} M_D(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{EI_c}\int_{x_c}^{L}\int_{x_c}^{L} M_D(x)\mathrm{d}x \tag{15}$$

将式 (12) 代入式 (15)，得到：

$$y(L)_{裂纹} = \frac{\rho C_D b\omega^2}{2E}\left[\left(\frac{x_c^6}{360} - \frac{2L^3x_c^3}{9} + \frac{3L^4x_c^2}{8} + \frac{L^5x_c}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_c}\right) + \frac{L^6}{360I_c}\right] \tag{16}$$

裂纹引起的叶尖位移增量 $\Delta y(L)$ 为：

$$\Delta y(L) = y(L)_{裂纹} - y(L)_{健康} \tag{17}$$

$$\Delta y(L) = \frac{\rho C_D b\omega^2}{2E}\left[\left(\frac{x_c^6}{360} - \frac{L^3x_c^3}{9} + \frac{3L^4x_c^2}{8} + \frac{L^5x_c}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_c}\right) + \frac{L^6}{360I_c}\right] - \frac{13\rho C_D b\omega^2 L^6}{360EI} \tag{18}$$

可以通过叶尖位移增量来判断叶片的健康状态，若增量超出合理范围，则可判定叶片存在裂纹等损伤，实现对叶片健康状态的定量监测与故障预警。

2.2 有限元模拟分析

2.2.1 模型建立

为验证低转速叶片形变理论分析结果的准确性，以试验台旋转叶片为对象，分别建立了叶根、叶中、叶尖位置不同长度裂纹的旋转叶片模型，将裂纹形态设定为矩形，其主要几何参数如表 1 所示。首先采用 Soildworks 建立叶轮三维模型，然后将模型导入 ANSYS/Workbench 有限元结构分析软件中建立叶轮的流场模型，整体仿真模型如图 4 所示。

表 1 叶轮的主要几何参数

Tab. 1 Main geometric parameters of impeller

序号	参数	参数设置
1	叶片长度L/mm	150
2	叶片宽度b/mm	30
3	叶片厚度/mm	2
4	叶片数	8
5	转轴长度/mm	550
6	裂纹位置	叶根、叶中、叶尖
7	裂纹长度/mm	3、4.5、6

2.2.2 网格划分

采用 ANSYS/Workbench 对流场计算域和叶轮本体进行精细化六面体网格划分，叶片表面边界层网格加密以捕捉气动载荷梯度，内部支撑结构采用四面体单元，旋转叶片有限元网格划分效果如图 5 所示。流场计算域最终划分节点 139376 个，单元 762877 个，叶轮本体共划分节点 1017421 个，单元 688119 个，

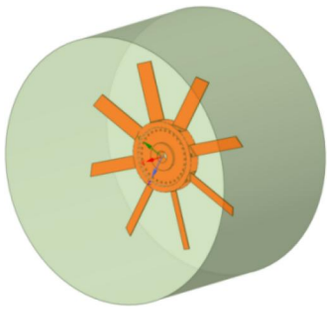
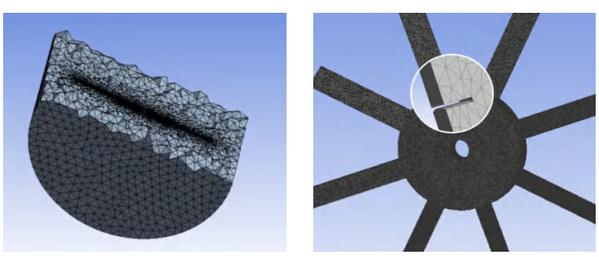


图 4 叶轮流场模型

Fig. 4 Impeller flow field model

网格质量均满足偏度 Skewness<0.80，达到网格划分的无关性和质量要求。



(a) 流体域网格划分
(a) Fluid-domain meshing

(b) 叶轮网格划分
(b) Impeller meshing

图 5 旋转叶片有限元网格划分效果

Fig. 5 Finite element meshing effect of rotating blades

2.2.3 边界条件设置

以试验台实际参数为基准，考虑需探索不同转速下叶片的振动特性，设置旋转叶片的基本参数如表 2 所示。

表 2 旋转叶片的基本参数

Tab. 2 Basic parameters of rotating blades

序号	参数	参数设置
1	叶片材料	45号钢
2	密度/(g·cm^{-3})	7.85
3	弹性模量/GPa	205
4	转速/(r·min^{-1})	500~3000
5	泊松比	0.27

为精准模拟旋转叶片在空气流场中的作用情况，参数设置需结合流场特性与实际工况综合考虑，在旋转叶片流场计算域模型边界条件参数设置如表 3 所示。

表 3 CFD 仿真关键参数设置

Tab. 3 Key parameters setting for CFD simulation

类别	参数设置
湍流模型	Realizable k-ε
边界条件	进口/出口：压力出口；叶轮表面：流固耦合交界面
环境压力	标准大气压
壁面条件	叶轮：无滑移无渗透；流道：光滑固定壁
数值方法	耦合算法（Coupled）

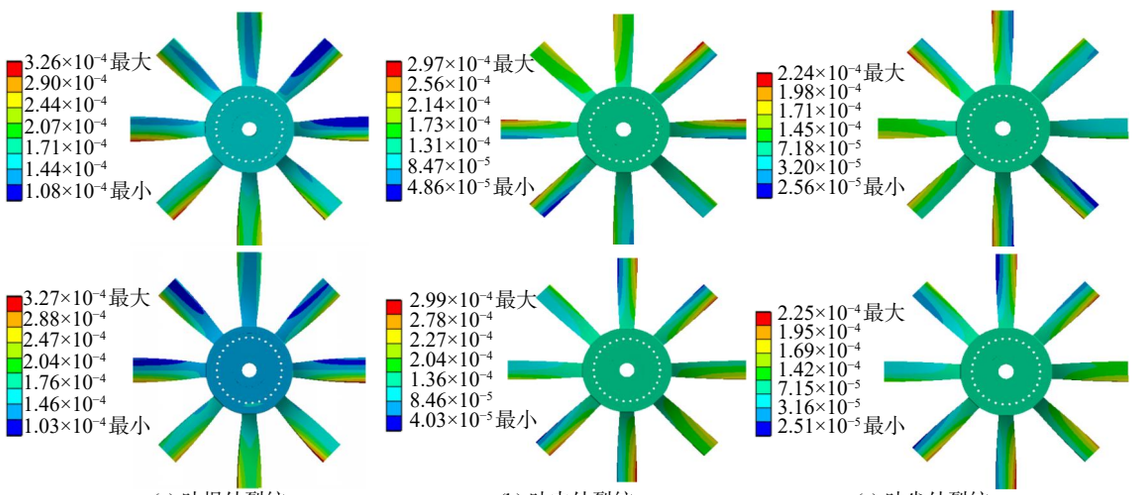
由于空气流体轴向速度远大于壁面法向速度，仿真过程中可忽略壁面因素对流场的影响。

2.2.4　仿真结果分析

(1)裂纹位置对叶尖偏移量的影响

以裂纹长度 4.5 mm 和转速 1500 r/min 为例, 完成不同裂纹位置的旋转叶片叶尖偏移量仿真试验, 结果如图 6 所示。

可以看出, 不同位置裂纹对叶尖偏移量增幅的影响存在显著差异: 叶根(0.1L, L 为叶片长度)裂纹引发的叶尖偏移量最大(327.7 μm), 相较于正常状态增幅达 57.3%, 这与其承受最大弯矩和离心力导致的高应力(412.5 MPa)直接相关, 高应力显著削弱结构整体刚度, 加剧了变形响应; 叶尖(0.9L)裂纹的叶尖偏移量增幅最小(244.3 μm, 增幅为 14.2%), 主要受限于叶尖区域局部刚度特性及较低应力水平(328.7 MPa), 从而导致叶尖变形增幅有限; 叶中(0.5L)裂纹的偏移量增幅介于两者之间, 对应其应力值(265.4 MPa)及对整体刚度的影响程度均处于中间水平, 需重点关注其向叶根扩展引发高应力失稳的风险。



(a) 叶根处裂纹　(b) 叶中处裂纹　(c) 叶尖处裂纹

(a) Cracks at the blade root　(b) Cracks at the blade middle　(c) Cracks at the blade tip

图 6　叶尖偏移量仿真结果(单位: m)

Fig. 6　Simulation results of blade tip offset (Unit: m)

(2)裂纹长度及转速对叶尖偏移量的影响

通过完成 3 种裂纹长度工况与 6 种转速条件的交叉试验, 对各耦合工况下叶片的叶尖偏移量进行测试并将数据进行整合, 如图 7 所示。

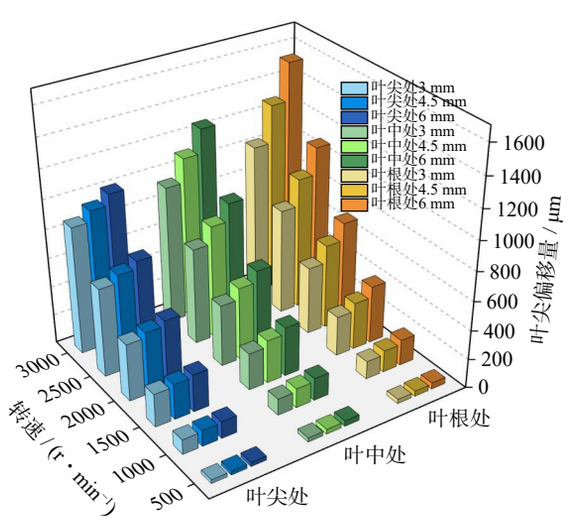


图 7　不同工况下的叶尖偏移量

Fig. 7　Blade tip offset under different conditions

图 7 表明, 相同转速下, 叶尖偏移量随裂纹长度增加非线性增长。以 2000 r/min 转速为例, 叶根含 3 mm 裂纹叶片的叶尖偏移量为 467.5 μm; 而叶根含 6 mm 裂纹时, 位移激增至 702.5 μm, 增幅达 150.2%。这是因为裂纹导致局部刚度下降, 抗弯刚度 EI_c 衰减; 随着裂纹长度 a 的增大, 惯性矩以三次方速率减小, 使得相同气动载荷下, 叶尖位移显著增大。同时, 位移增大诱发非对称流场, 气动力随转速平方增长($F_D \propto v^2$), 与位移形成正反馈, 加剧了气动弹性效应。

不同转速下, 随着转速的升高(500~3000 r/min), 叶片同一裂纹位置和长度的叶尖偏移量显著增大: 正常叶片位移由 24.1 μm 增至 788.2 μm; 而叶根处 6 mm 裂纹叶片则由 44.3 μm 剧增至 1544.5 μm, 增幅达 34.8 倍。裂纹显著降低叶片整体刚度, 导致相同转速下位移增量更大, 尤其是在 2000 r/min 后位移增速明显加快, 与材料塑性变形或裂纹扩展模式转变相关。值得注意的是, 此转速下含裂纹叶片应力增长率出现拐点, 预示裂纹可能进入稳定扩展阶段, 需重点关注该转速区间的疲劳损伤累积。

通过理论模型与有限元仿真结果对比发现, 不同裂纹长度和位置下叶尖偏移量的相对误差稳定在 3.2%~5.2% 之间; 且随着转速的升高, 两者均呈现叶尖偏移量非线性增长的趋势。

3 低速条件下动叶片裂纹识别方法

在第 2 节研究的基础上，提出了一种低转速条件下的动叶片裂纹识别方法，其技术框架由离线定量标定与在线监测识别两大模块构成，如图 8 所示。

在离线定量标定部分，通过建立含裂纹动叶片气动载荷-悬臂梁耦合理论模型与有限元仿真明确裂纹尺寸、裂纹位置与叶尖偏移量间的量化关系。在线监测识别部分主要是利用叶尖定时技术获取状态待测动叶片的叶尖偏移量，通过逆向求解离线标定模型，实现叶片裂纹状态的在线识别。

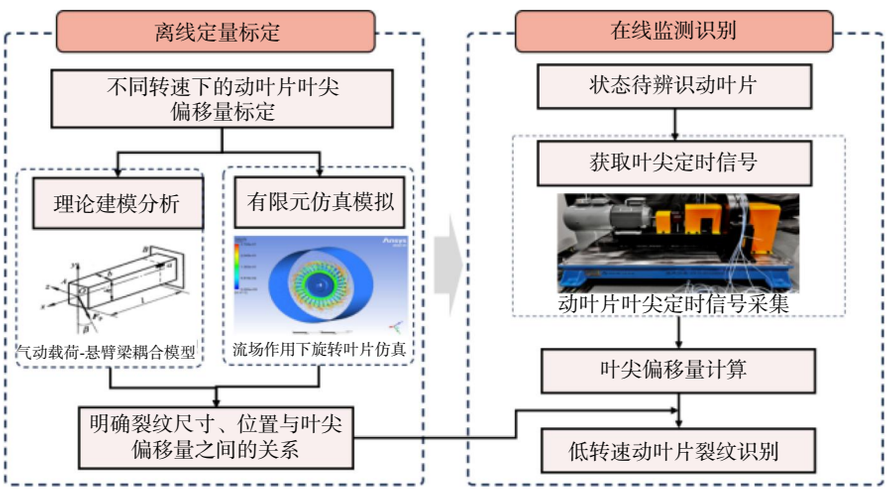


图 8 所提动叶片裂纹识别方法

Fig. 8 Proposed rotating blades cracks identification method

4 方法验证

4.1 测试试验台

为验证所提方法的有效性，设计搭建了旋转叶片叶尖定时测试试验台，如图 9 所示。其主要由驱动系统、叶轮组件、底座、传感器和数据采集与分析系统构成。为确保试验台叶片参数与有限元仿真叶片参数一致，叶片的矩形缺口裂纹采用慢走丝线切割方式引入。本次试验沿机匣上半周均布了 6 枚电涡流传感器（型号为 HWY-DO-22XLT08），转轴处布设一个激光键相传感器（SCZB-07），以键相传感器脉冲信号时间戳为基准，将最近叶片命名为叶片 1，其余 7 个叶片按叶轮旋转方向依次命名。数据采集系统选用 HD2000，试验台基本参数如表 4 所示。

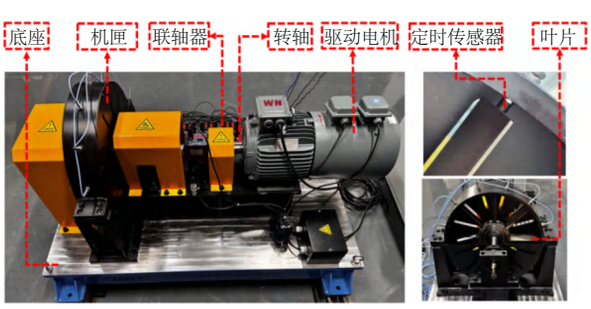


图 9 旋转叶片叶尖定时测试试验台

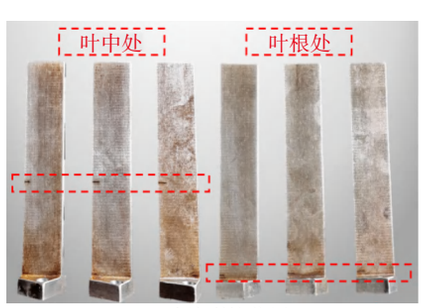
Fig. 9 Tip-timing test bench of rotating blades

本文研究以最大转频低于 1 阶共振频率（59 Hz）的低转速动叶片为研究对象，基于图 10 和表 5 设计

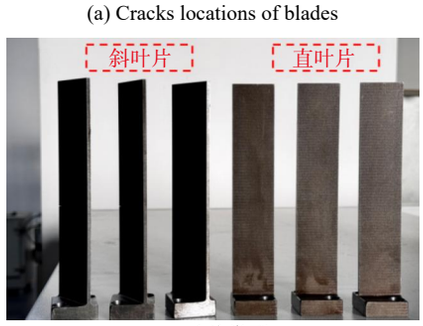
表 4 试验台基本参数

Tab. 4 Basic parameters of test bench

参数	参数设置
叶片数量	8
叶片类型	直/斜叶片
最大转速/(r·min^{-1})	5000
电机功率/kW	7.5
相邻传感器夹角/(°)	30
传感器间隙/mm	1.5



(a) 叶片裂纹位置
(a) Cracks locations of blades



(b) 叶片类型
(b) Types of blades

图 10 叶片基本参数

Fig. 10 Basic parameters of blades

的试验工况开展系统性试验。通过可替换式叶片组件构建 3 种裂纹位置、3 种裂纹长度及 5 个转速参数（均低于 1 阶共振频率）的多维试验矩阵，实现 45 组不同工况的测试。通过同步采集获取不同裂纹参数与转速耦合作用下的叶尖振动位移数据。

表 5　试验工况设置

Tab. 5　Settings of test conditions

参数	参数设置
叶片类型	直/斜叶片
裂纹位置	叶根、叶中、叶尖
裂纹长度/mm	3、4.5、6
转速/(r·min^{-1})	500、1000、1500、2000、3000
采样频率/kHz	100

为了提升叶尖定时精度，本文基于三次样条插值算法对原始信号进行 10 倍插值处理，等效采样率提升至 1 MHz，时间分辨率提升至 1 μs，确保叶尖位移偏移量的测量误差小于±1 μm。

在提高叶尖定时精度的基础上，本文采用极值点检测算法提取叶片尖端扫过传感器的时间戳；通过阈值检测法识别键相信号上升沿以确定旋转周期起始时间，结合传感器角度和叶片分布计算理论到达时间，将实测与理论时间进行比对，得到时间偏差，并转换为叶尖偏移量；为精准捕捉叶尖偏移量最大值并抑制背景噪声干扰，在相同转速工况下，对各叶片分别采集 500 组振动位移数据，以其平均值作为叶尖偏移量最大值。

4.2　测试结果分析

本研究通过试验获取了转速在 500~3000 r/min 区间内，60 s 内 8 个健康叶片的偏移量均值，如图 11 所示。

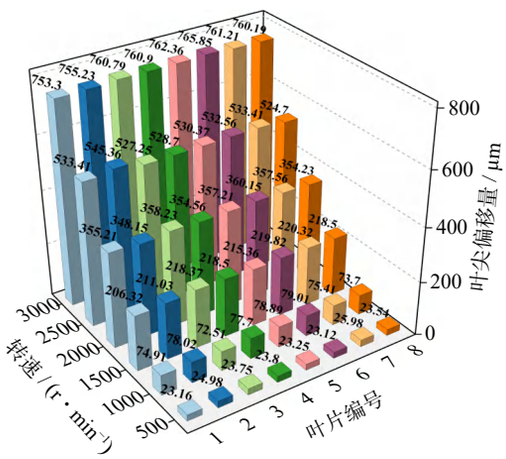


图 11　健康叶尖偏移量均值

Fig. 11　Mean offset of healthy blade tip

由图 11 可以看出，健康状态下，叶尖偏移量随转速升高呈非线性增长。500~1500 r/min 区间内，增长速率相对平缓；2000~3000 r/min 区间内，增长斜率陡升。且同一转速下，8 个叶片的位移存在差异（如 2000 r/min 时，最大差值达 28.1 μm），这是由于叶片加工时存在制造公差。

为了减小个体差异对叶尖偏移量的影响，本文采用 60 s 内 8 只叶尖偏移量的均值代替瞬时叶尖偏移量，不同转速下，含裂纹叶片的叶尖偏移量如图 12 所示。

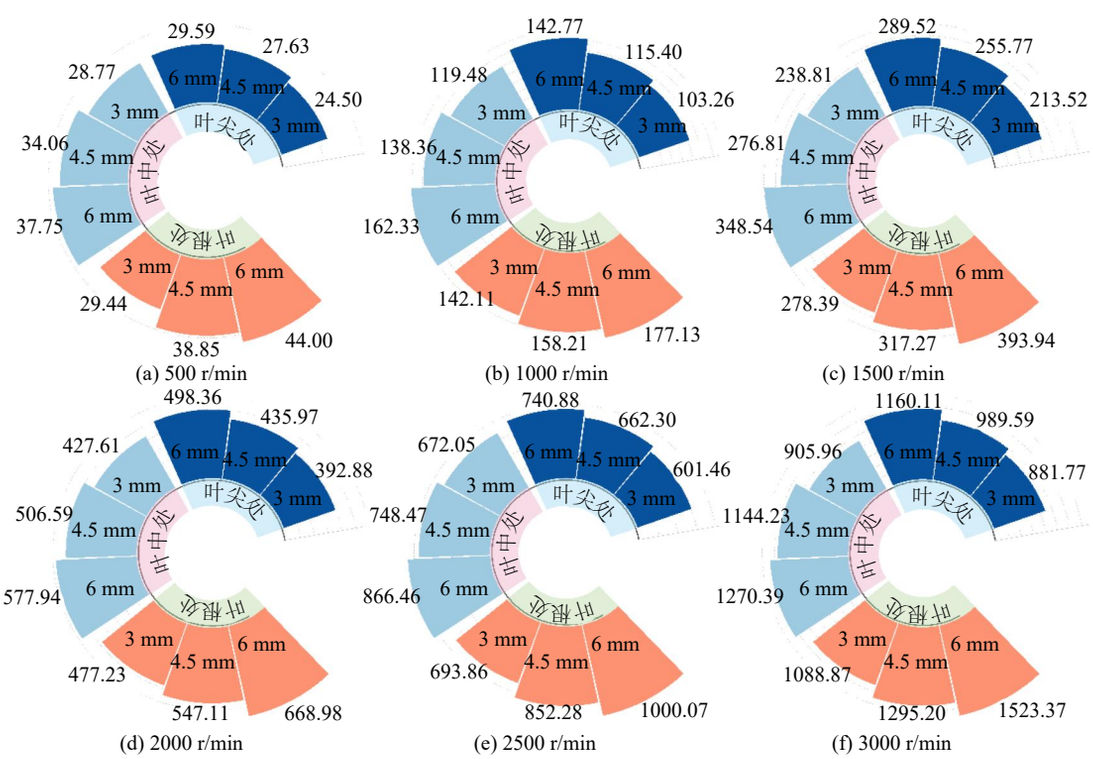


图 12　不同转速下含裂纹叶片的叶尖偏移量（单位：μm）

Fig. 12　Tip offset of blades with cracks under different rotational speeds (Unit: μm)

结果表明，随着转速从 500 r/min 逐步升高至 3000 r/min，正常叶片和含裂纹叶片的叶尖偏移量均呈现急剧增大的趋势。例如，正常叶片叶尖偏移量从 23.8 μm 增至 760.9 μm；而含裂纹叶片的增长更为显著，尤其是叶根含 6 mm 裂纹的叶片，偏移量由 172.1 μm 激增至 1523.4 μm。同一转速与裂纹尺寸下，叶根处的叶尖偏移量普遍大于叶中与叶尖区域。因为，叶根是叶片与轮盘的连接部位，不仅应力集中效应更显著，且裂纹对该区域结构完整性的破坏更强，直接导致叶片形变显著加剧。

将试验所测得的偏移量代入式(18)进行反演，得到结果如表 6 所示。

表 6 反演结果对比

Tab. 6 Comparison of inversion results

转速/($r\cdot min^{-1}$)	裂纹位置	裂纹实际长度/mm	反演长度/mm	相对误差/%
500	叶尖	3	2.84	5.33
1000	叶中	4.5	4.72	4.89
1500	叶根	6	6.08	1.33
2000	叶尖	3	3.15	5.00
2500	叶中	4.5	4.36	3.11
3000	叶根	6	6.28	4.67

试验结果表明，基于理论模型反演裂纹长度与实际值的相对误差稳定在 1.33%~5.33%，其中叶根 6 mm 裂纹在 1500 r/min 工况下误差仅 1.33%。同时，该方法在 500~3000 r/min 转速区间及叶片多处裂纹位置下均保持着稳定精度，验证了模型对工况离散性的鲁棒性。上述结果证明，所提识别方法可实现低转速下动叶片裂纹的监测和识别，为低转速叶片裂纹的在线监测识别提供了可靠的技术支持。

5 结 论

本文主要针对低转速下动叶片裂纹在线识别难题进行研究，取得主要成果如下：

(1)构建了流固耦合条件下动叶片形变理论模型，揭示了不同转速下叶尖偏移量与裂纹位置、尺寸间的关系，叶尖偏移量随转速呈二次方增长，叶根裂纹引发的偏移量增量显著高于叶中与叶尖裂纹，证实了裂纹位置对叶片刚度的非线性影响。

(2)开展了低转速动叶片动力学有限元仿真分析，仿真结果与理论分析值呈现一致性，验证了所构建理论模型的有效性。

(3)提出了基于叶尖定时的低转速动叶片裂纹在线识别方法，搭建了测试试验平台并开展了 45 组不同叶片缺陷状态的验证试验，3 mm 级及以上尺寸裂纹的识别准确率达到 100%，裂纹长度识别误差小于 5.33%。

本文虽解决了低转速下动叶片裂纹的检出问题，但实际工况下裂纹形态多样，且未考虑离心力等其他因素影响，同时裂纹定位和定量需依赖先验知识，否则精准识别困难，后续研究将围绕上述问题进行深入探讨。

参考文献：

[1] 段发阶，牛广越，刘昊，等. 旋转叶片叶尖定时测量技术研究综述 [J]. 计测技术，2025，45(1)：45-64.
DUAN Fajie，NIU Guangyue，LIU Hao，et al. A review of blade tip timing measurement technologies of rotating blades[J]. Metrology & Measurement Technology，2025，45(1)：45-64.

[2] 张继旺，唐雨，丁克勤，等. 稀疏度自适应匹配追踪的欠采样 BTT 信号重构方法 [J]. 振动与冲击，2023，42(20)：286-292.
ZHANG Jiwang，TANG Yu，DING Keqin，et al. Reconstruction of the blade tip-timing based on a modified sparsity adaptive matching pursuit algorithm[J]. Journal of Vibration and Shock，2023，42(20)：286-292.

[3] 王维民，刘延振，林昱隆，等. 基于叶片振动的航空发动机喘振预警及识别方法 [J]. 机械工程学报，2024，60(21)：122-131.
WANG Weimin，LIU Yanzhen，LIN Yulong，et al. Surge warning and identification method of aero-engine based on blade vibration[J]. Journal of Mechanical Engineering，2024，60(21)：122-131.

[4] 胡明辉，刘少朋，王浩，等. 基于宽频振动的燃气轮机叶片断裂故障识别特征与辨识方法 [J]. 航空学报，2024，45(20)：230098.
HU Minghui，LIU Shaopeng，WANG Hao，et al. Characterization and identification of gas turbine blade fracture faults based on broadband vibration[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2024，45(20)：230098.

[5] CHUNG J P，YOO H H. Blade fault diagnosis using Mahalanobis distance[J]. Journal of Mechanical Science and Technology，2021，35(4)：1377-1385.

[6] DU TOIT R G，DIAMOND D H，HEYNS P S，et al. A stochastic hybrid blade tip timing approach for the identification and classification of turbomachine blade damage[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2019，121：389-411.

[7] 张松林，乔百杰，王亚南，等. 基于非接触测量的高速转子叶片裂纹故障监测 [J/OL]. 航空动力学报，1-12[2025-10-15]. https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.20240726.
ZHANG Songlin，QIAO Baijie，WANG Ya'nan，et al.

Crack fault monitoring of high-speed rotor blades based on non-contact measurement[J]. Journal of Aerospace Power，1-12[2025-10-15]. https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.20240726.

[8] 许敬晖，乔百杰，刘美茹，等. 基于叶端定时的转子叶片裂纹监测与诊断 [J]. 推进技术，2022，43(2)：374-382.
XU Jinghui，QIAO Baijie，LIU Meiru，et al. Crack monitoring and diagnosis of rotor blades using blade tip timing[J]. Journal of Propulsion Technology，2022，43(2)：374-382.

[9] WU S M，WANG Z K，LI H Q，et al. Blade crack detection using blade tip timing[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2021，70：6502813.

[10] XU J H，QIAO B J，LIU M R，et al. Crack propagation monitoring of rotor blades using synchroextracting transform[J]. Journal of Sound and Vibration，2021，509：116253.

[11] XU J H，QIAO B J，LIU M R，et al. Blade tip timing for monitoring crack propagation of rotor blades using Block-AOLS[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2022，181：109498.

[12] FAN Z F，LI H K，CAO H W，et al. Research on running status monitoring and rotating blade crack detection of large-scale centrifugal compressor based on blade tip timing technique[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2022，72：3501011.

[13] 敖春燕，乔百杰，刘美茹，等. 基于非接触式测量的旋转叶片动应变重构方法 [J]. 航空动力学报，2020，35(3)：569-580.
AO Chunyan，QIAO Baijie，LIU Meiru，et al. Dynamic strain reconstruction method of rotating blades based on no-contact measurement[J]. Journal of Aerospace Power，2020，35(3)：569-580.

[14] ZHANG F Y，GUO S P，LI X J，et al. Characterization of crack on the outer edge of the disk based on blade tip timing technology[J]. Measurement Science and Technology，2023，34(9)：095119.

[15] ZHANG F L，YU H T，WANG J J. A novel damage identification method for flue gas turbine blades based on tip timing[J]. ISA Transactions，2023，135：537-550.

[16] DIAMOND D H，HEYNS P S，OBERHOLSTER A J. Improved blade tip timing measurements during transient conditions using a state space model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2019，122：555-579.

[17] 盛昌文，姜永正，黄磊，等. 基于叶尖定时的风机叶片裂纹故障识别研究 [J]. 仪器仪表学报，2024，45(4)：57-65.
SHENG Changwen，JIANG Yongzheng，HUANG Lei，et al. Research on fan blade crack fault identification based on tip timing[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument，2024，45(4)：57-65.

第一作者：杨斯骞（2002—），男，硕士研究生。
E-mail：1583792863@qq.com

通信作者：张继旺（1991—），男，博士，高级工程师。
E-mail：zhangjiwang@csei.org.cn

电动汽车驱动电机轴承碰撞动力学建模及其油膜支承力分析

李学军[1]，肖展宏[1]，石常志[1]，唐虎娇[2]，何国新[3]

（1. 佛山大学机械工业转子振动监测及诊断技术重点实验室，广东 佛山 528225；
2. 瓦房店轴承股份有限公司，辽宁 瓦房店 116399；3. 广汽埃安新能源汽车股份有限公司，广东 广州 511430）

摘要：电动汽车运行过程中，外部激励会导致驱动电机轴承受到复杂振动，使其内部滚动体与滚道产生冲击，引发油膜厚度骤变和轴电流损伤风险增加，加速疲劳磨损并缩短轴承寿命。针对这一问题，建立了非平稳外部激励下轴承内/外圈碰撞动力学分析模型，该模型可有效预测轴承振动特性。基于赫兹接触理论与非线性弹簧模型，提出了一种同时考虑游隙与滚子位置角的轴承径向动刚度计算方法。在此基础上，通过对外圈施加位移激励，分析了接触-碰撞-分离全过程，构建了内/外圈碰撞过程动力学模型，并得到了冲击过程中油膜支承力的变化规律。仿真与试验对比表明，模型与试验相吻合，可为电动汽车轴电流损伤机理研究及寿命预测提供可靠的理论支撑。

关键词：滚动轴承；动刚度；动力学建模；外部激励；电动汽车
中图分类号：TH133.3 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508084

Collision dynamics modelling of electric vehicle drive motor bearing and its oil film supporting force analysis

LI Xuejun[1], XIAO Zhanhong[1], SHI Changzhi[1], TANG Hujiao[2], HE Guoxin[3]

（1.Key Laboratory of Rotor Vibration Monitoring and Diagnosis Technology for Machinery Industry，Foshan University，Foshan 528225，China；2.Wafangdian Bearing Co.，Ltd.，Wafangdian 116399，China；3.GAC AION New Energy Automobile Co.，Ltd.，Guangzhou 511430，China）

Abstract: During the operation of electric vehicles，external excitation induces complex vibrations in the drive motor bearings. This causes impacts between the internal rolling elements and raceways，leading to sudden variations in oil film thickness and an increased risk of shaft current damage. These phenomena accelerate fatigue wear and shorten bearing service life. To address this issue，this paper establishes a dynamic model for analyzing the impact between the inner and outer rings of the bearing under non-stationary external excitation，which enables effective prediction of its vibration characteristics. Based on Hertzian contact theory and a nonlinear spring model，a method for calculating the radial dynamic stiffness of the bearing is proposed，simultaneously considering both clearance and roller position angle. Building upon this foundation，the entire process of contact-impact-separation is analyzed by applying displacement excitation to the outer ring. A dynamic model of the impact process between the inner and outer rings is constructed，revealing the variation patterns of the oil film supporting force during the impact event. Simulation and experimental results demonstrate that the proposed model aligns well with experimental data. This work provides reliable theoretical support for investigating the mechanism of shaft current damage and predicting the service life of bearings in electric vehicles.

Keywords: roller bearing; dynamic stiffness; dynamics modelling; external excitation; electric vehicle

轴承是电动汽车驱动电机的关键承载部件之一，其失效约占驱动电机总体故障的32%[1]。在实际道路条件下，车辆常面临复杂不平路面激励，驱动电机轴承不仅承受电机自重，还会受到经悬架和车身传递的随机冲击，其瞬时加速度可达数倍甚至十几倍重力加速度[2]。由此导致轴承滚子与滚道间产生强烈的振动冲击，使得局部油膜支承力急剧上升，加速轴承的疲劳磨损，同时加剧由变频电机产生的高频共模电压引发的轴承电流损伤，在疲劳磨损与轴电流损伤的交互耦合作用下，轴承寿命急剧衰减[3-5]。

收稿日期：2025-08-15；**修订日期：**2025-09-02
基金项目：广东省基础与应用基础研究基金资助项目（2023A1515140029）；先进制造科学与技术广东省实验室项目（X220941UZ230）；国家重点研发计划项目（2020YFB2007800）

为深入探究失效机理并为轴承设计与可靠性优化提供理论依据, 有必要建立能够准确反映冲击作用下轴承动态响应的模型, 从而获取油膜支承力分布特性。在此建模过程中, 轴承的动刚度计算尤为关键, 其准确性直接决定动力学分析结果的可靠性。目前在轴承动刚度计算方面, 赵联春等[6]提出斜弹簧法计算球轴承刚度, 避免矩阵微分运算, 计算过程简单, 且与多种方法进行对比验证了其准确性。张跃明等[7]建立圆柱滚子轴承径向刚度解析模型, 综合考虑滚子凸度与轴承转速。周仕明等[8]提出在轴承沟道圆心间设置非线性弹簧, 基于 Hertz 接触理论建立力与变形关系, 通过弹簧长度判断接触状态, 该方法可精确模拟接触角变化, 较传统建模方法精度更高且计算更高效。CHEN 等[9]基于赫兹理论建立四点接触球轴承时变刚度模型, 研究表明轴向刚度约为径向刚度的 2.21 倍, 时变特性不显著。TIAN 等[10]基于赫兹理论和热弹流润滑对比分析角接触轴承刚度, 验证两者适用情况。DENG 等[11]研究球轴承动态刚度, 发现可通过引导间隙通过保持架轨迹影响刚度波动。然而, 现有模型未能揭示游隙和高转速下滚子位置角变化所产生的耦合效应与动刚度变化之间的关系, 相关研究仍不完善。

此外, 动刚度模型需与碰撞动力学模型相结合, 才能全面描述受外部激励下轴承的真实运动状态。郝旭等[12]建立了轴承系统热-力耦合有限元模型, 开展了考虑温度、转速、润滑等参数影响圆柱滚子轴承内/外圈位移及滚道应力特性的动力学分析。DEMIRHAN 等[13]考虑钢轴、外保持架、滚子与内/外滚道的相互作用, 采用有限元分析法研究了圆柱滚子轴承内/外圈的应力和位移分布。WU 等[14]提出融合缺陷粗糙度的复合位移激励函数, 构建了综合考虑高速效应、动态径向间隙和传递路径的高速角接触球轴承动力学模型。罗茂林等[15]基于球轴承内圈剥落故障, 提出时变接触刚度动力学模型, 揭示双冲击现象机理并通过时间间隔验证有效性。李鑫斌等[16]针对高速行星轮轴承, 建立接触动力学模型, 发现配合间隙增大会抑制行星轮振动, 但会放大轴承外圈振动。FANG 等[17]通过理论与试验分析, 揭示了载荷力对含间隙平面多体系统动力学特性的关键影响, 表明增大载荷可使系统从混沌转向周期性运动。在轴承碰撞动力学研究中, 对受载区滚动体与内/外圈滚道等效弹簧模型及运动碰撞过程的系统研究仍较少。

本文以深沟球轴承为研究对象, 提出一种改进的动刚度计算方法, 该方法在赫兹接触理论与非线性弹簧模型的框架下, 综合考虑了游隙及轴承高速运行时滚动体位置角变化的耦合效应对动刚度的影响。基于此动刚度模型, 系统分析了轴承在外部激励作用下内、外圈的碰撞过程, 并建立了描述碰撞全过程的动力学方程。最后通过数值仿真与试验对比, 验证了所建模型与仿真结果的准确性与可靠性。研究结果可为电动汽车驱动电机轴承在复杂工况下的可靠性设计, 以及疲劳磨损与电蚀耦合失效问题的机理分析和工程评估提供理论依据与参考。

1　滚动轴承动刚度模型

1.1　赫兹接触力

深沟球轴承滚子与内/外滚道间的接触形式为点接触。依据赫兹接触理论, 滚动体与滚道接触形变与其所受载荷的关系可表示为:

$$Q_j = K_j \delta_j^N \tag{1}$$

式中, Q_j 为接触载荷; K_j 为载荷-形变系数; δ_j 为接触形变量; 下标 j=i, o 分别表示轴承内滚道和外滚道; 指数 N 取决于接触类型, 点接触时通常为 1.5。

载荷-形变系数 K_j 可以表示为:

$$K_j = \left[\frac{32}{9\Sigma\rho (n_\delta)^3 \left(\frac{1-\mu_b^2}{E_b} + \frac{1-\mu_j^2}{E_j} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

式中, E_b 为滚动体弹性模量; E_j 为滚道弹性模量; μ_b 为滚动体泊松比; μ_j 为滚道泊松比; n_δ 为弹性体接触形变系数; $\Sigma\rho$ 为滚道曲率和, 与 $F(\rho)$ 相关, 可表示为:

$$F(\rho) = \frac{(\rho_{1\mathrm{II}} - \rho_{1\mathrm{I}}) + (\rho_{2\mathrm{II}} - \rho_{2\mathrm{I}})}{\Sigma\rho} \tag{3}$$

式中, $\rho_{1\mathrm{I}}$ 为滚动体在第一主平面曲率; $\rho_{1\mathrm{II}}$ 为滚动体第二主平面曲率; $\rho_{2\mathrm{I}}$ 为内/外滚道第一主平面曲率; $\rho_{2\mathrm{II}}$ 为内/外滚道在第二主平面曲率。

1.2　径向位移接触形变量

当对轴承外圈施加强制径向位移时, 内圈的响应具有迟滞特性, 从而产生相对位移并挤压滚动体, 引起接触形变量, 如图 1 所示。设游隙为 h_c, 则总接触形变量可表示为:

$$\delta_c = \delta_i + \delta_o = \delta_r - \frac{1}{2} h_c \tag{4}$$

式中, δ_i 为内圈挤压滚动体产生的接触形变量; δ_o 为

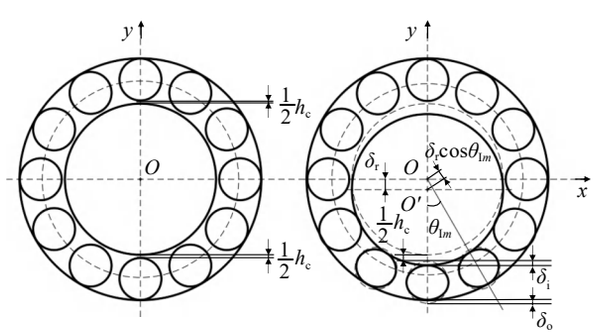


图 1　接触形变量关系图

Fig. 1　Relationship diagram of contact deformation

外圈挤压滚动体产生的接触形变量；δ_c为总接触形变量；δ_r为内/外圈相对位移量。

第 m 个滚动体的形变量δ_m与δ_r的关系为：

$$\delta_m = \delta_r \cos\theta_m - \frac{1}{2}h_c \tag{5}$$

式中，θ_m为第 m 个滚动体位置角。

设轴承共有 Z 个滚动体，以逆时针方向对滚动体进行编号，如图 2 所示。

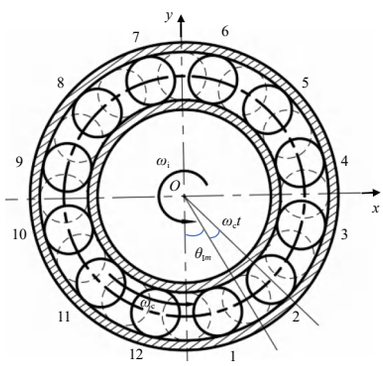


图 2 滚动体位置角变化

Fig. 2 Variation of position angle of rolling element

轴承位置角可由下式计算：

$$\theta_m(t) = \theta_{1m} + \omega_c t = \frac{2(m-1)\pi}{Z} + \omega_c t \tag{6}$$

式中，θ_{1m}为第 m 个滚动体初始角；ω_c为保持架转动角速度，与内圈转动角速度的换算关系为：

$$\omega_c = \frac{\omega_i}{2}\left(1 - \frac{D_w \cos\alpha}{d_m}\right) \tag{7}$$

式中，ω_i为内圈转动角速度；D_w为滚动体直径；d_m为轴承分度圆直径；α为轴承接触角。

轴承高速运转时，滚动体位置角速度变化大，可将其角度归一化至 [0,2π] 区间内：

$$\theta'_m(t) = \theta_m(t) \bmod 2\pi \tag{8}$$

为确定某一时刻受载滚动体是否受载及其所受最大载荷，定义最小角度差函数，离径向形变方向最近滚子角度为：

$$\Delta(\theta) = \min(\theta, 2\pi - \theta) \tag{9}$$

则第 m 个滚子离基准轴最小角度为：

$$\Delta_m(\theta'_m(t)) = \min(\theta'_m(t), 2\pi - \theta'_m(t)) \tag{10}$$

1.3 非线性弹簧模型

本文基于赫兹接触理论建立等效非线性弹簧模型，并作以下假设：(1)忽略润滑油膜及热效应对接触形变的影响；(2)滚动体等距分布，仅发生纯滚动；(3)内圈与转子视为刚性整体。其模型如图 3 所示。

根据刚度定义，可得由赫兹接触理论所等效而成的弹簧的动刚度为：

$$k_j = \frac{\mathrm{d}Q_j}{\mathrm{d}\delta_j} = \frac{3}{2}K_j\delta_j^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

对于单个滚动体，与内/外圈接触后等效弹簧间

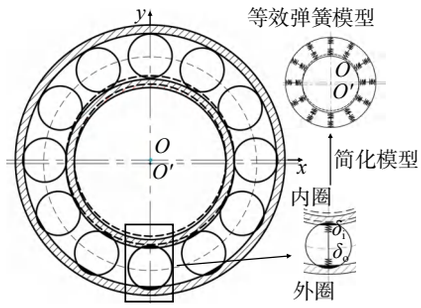


图 3 等效模型示意图

Fig. 3 Schematic diagram of equivalent model

为串联关系，可得第 m 个滚动体等效刚度为：

$$k_m = \frac{\mathrm{d}Q_m}{\mathrm{d}\delta_m} = \frac{3}{2}K'\delta_m^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

式中，Q_m为第m个滚动体所受接触载荷；K'为等效载荷-形变系数，可由下式得出：

$$K' = \left(K_i^{-\frac{2}{3}} + K_o^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{13}$$

不同滚动体之间等效弹簧刚度为并联关系，总径向动刚度 k_t 等于其刚度径向分量之和：

$$k_t = \sum \frac{3}{2}K'\left(\delta_r\cos\theta_m - \frac{1}{2}h_c\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta_m \tag{14}$$

由于根据赫兹接触理论所得等效弹簧刚度仅在接触形变量δ大于零时有值，其余情况均为 0，因此引入接触函数，并定义其为：

$$f(\delta) = \begin{cases} 1, & \delta > 0 \\ 0, & \delta \leqslant 0 \end{cases} \tag{15}$$

轴承总的径向接触载荷为：

$$Q_r = \Sigma K'\left(\delta_r\cos\theta_m - \frac{1}{2}h_c\right)^{\frac{3}{2}}\cos^2\theta_m f(\delta_m) \tag{16}$$

油膜支承力定义为润滑油产生的用以平衡外部载荷的流体压力，在点接触与线接触机构受力所形成的力系中，其与由滚动体形变所产生的赫兹接触力实时相等。因此，通过式 (16) 求出的赫兹接触力即为油膜径向所受总的支承力。

具体求解流程如图 4 所示，通过 fsolve 算法对由力平衡与协调方程所组成的非线性方程组进行求解，获取滚动体当前动刚度以及接触状态，将当前时刻状态值重新代入方程组中，获取下一时刻状态，不断迭代直至完成整个过程。

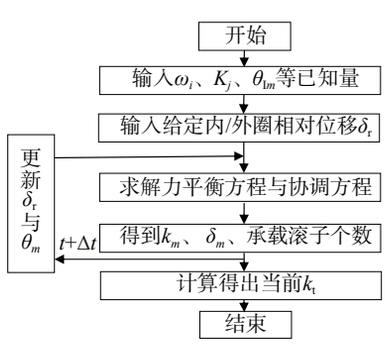


图 4 轴承动刚度求解流程图

Fig. 4 Flow chart for solving bearing dynamic stiffness

综上可知, 滚动体接触量与内圈相对外圈运动位移紧密相关, 而内圈在整个碰撞运动中位移变化又受等效弹簧的动刚度变化所影响。因此将动刚度与内圈动力过程相结合, 可以得到在对外圈施加位移激励下内圈碰撞动力学过程模型。

2　轴承动力学模型

2.1　坐标系建立

电动汽车驱动电机轴承多采用零游隙或微小正游隙, 在受外部激励时轴承内/外圈会通过滚动体产生频繁碰撞, 使得油膜厚度动态变化明显。为分析外圈受外部激励下内圈位移的碰撞运动过程, 建立三种坐标系: (1)固定坐标系, 以轴承中心 O 为原点建立固定坐标系 xOy; (2)内圈移动坐标系, 以轴承内圈圆心为原点建立 xO_iy 移动坐标系; (3)外圈移动坐标系, 以轴承外圈圆心为原点建立 xO_oy 移动坐标系, 如图 5 所示。

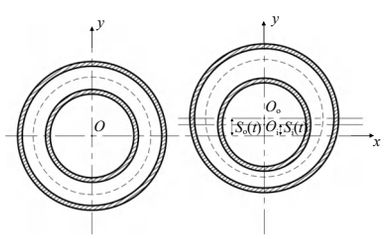


图 5　三坐标系示意图

Fig. 5　Schematic diagram of three-coordinate system

内、外圈位移曲线 $S_i(t)$、$S_o(t)$随时间产生的位移幅值均以固定坐标系作为参考坐标系描述, $S_o(t)$与 $S_i(t)$间的差值即代表内/外圈所产生的相对位移量 δ_r。

2.2　碰撞运动过程建模

在轴承外圈突加外部激励后, 内圈由于惯性, 其位移变化迟滞于外圈, 滚动体产生压缩, 当内/外圈速度一致时, 其形变量达到最大值, 该时刻滚动体所储存的形变能将开始释放, 使得内圈加速大于外圈, 在轴承游隙为正的情况下, 两者逐渐分离。当两者位移差等于 h_c, 两者相撞并压缩滚动体, 至两者速度相同, 此时滚动形变量再次达到最大值, 重复上述过程直至外圈运动过程结束。以外圈受向上位移激励建立内圈碰撞运动过程模型。

2.2.1　下半部分碰撞阶段

轴承外圈突受向上位移激励, 内圈与外圈下半部分相接触, 根据力平衡可得:

$$m_i\ddot{S}_i(t)=\frac{3}{2}\sum_{m=0}^{q}K'\left(\delta_r\cos\theta_m-\frac{1}{2}h_c\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos^2\theta_m f(\delta_m)-m_ig \tag{17}$$

式中, m_i为内圈以及转子质量; q 为载荷接触区滚动体接触个数; g为重力加速度。

当位移激励$S_o(t)$已知, 滚动体压缩至恢复原状运动过程可由该式描述, 将该时刻记为 t_0, 该微分方程初始条件为:

$$S_{i_0}=-\frac{1}{2}h_c,\ \dot{S}_{i_0}=0 \tag{18}$$

式中, S_{i_0}和$\dot{S}_{i_0}$分别表示初始接触时内圈位置和速度。

滚动体压缩形变量达到最大, 即$\dot{S}_o(t)$=$\dot{S}_i(t)$时记为 t_1, 根据微分方程得到该时刻内圈位移$S_i(t_1)$, 滚动体承受最大径向冲击载荷通过联立下式求出:

$$\begin{cases}\int K'\delta^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\delta=\dfrac{1}{2}m_i\Delta v^2\\ Q_{\max}=K'\delta_{\max}^{\frac{3}{2}}\end{cases} \tag{19}$$

式中, $\delta_{\max}$为离径向形变方向最近滚动体所产生的接触形变量, 其位置角可由第 1 节得出; Δv为内圈速度变化量。

后滚动体开始恢复至原状, 其弹性势能将转化为内圈动能及其重力势能, 由于接触形变量的量级远远小于内/外圈实际运动产生的位移, 因此将压缩与回弹过程近似为一个对称的物理过程, 记内圈与外圈分离时刻为 t_2, 此时内圈速度为:

$$\dot{S}_i(t_2)=2\dot{S}_o(t_1) \tag{20}$$

2.2.2　自由运动阶段

内/外圈分离后, 内圈运动只受重力作用, 由力平衡可得:

$$\ddot{S}_i(t)=-g \tag{21}$$

当两者位移差等效于游隙距离时, 内圈与外圈上半部分相接触为:

$$h_c=2\dot{S}_o(t_1)(t_3-t_2)-\frac{1}{2}g(t_3-t_2)^2-(S_o(t_3)-S_o(t_2)) \tag{22}$$

记 t_3 时刻两者接触, 接触时内圈速度初值条件:

$$\dot{S}_i(t_3)=\dot{S}_i(t_2)-g(t_3-t_2)=2\dot{S}_o(t_1)-g(t_3-t_2) \tag{23}$$

2.2.3　上半部分碰撞阶段

当内/外圈相接触, 内圈运动过程再次由式 (17) 控制, 此时初始条件变为:

$$S_{i_1}=S_o(t_3),\ \dot{S}_{i_1}=\dot{S}_i(t_3) \tag{24}$$

由于δ_r以$S_o(t)-S_i(t)$表示, 在负数情况下产生无意义复数解, 为保持实际物理意义并表明力的方向性, 将运动方程改写为如下形式:

$$m_i\ddot{S}_i(t)=-\frac{3}{2}\Sigma K'\left(\left|\delta_r\cos\theta_m-\frac{1}{2}h_c\right|\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos^2\theta_m f(\delta_m)-m_ig \tag{25}$$

滚动体受压缩时速度下降, 当$\dot{S}_o(t)$=$\dot{S}_i(t)$可求出碰撞时间 t_4, 得到该时刻内圈位移$S_i(t_4)$。根据下半部分碰撞阶段亦可求出该时刻滚动体所承受最大径向冲击载荷。记滚动体恢复释放动能结束时间 t_5, 内圈与外圈分离有:

$$\dot{S}_{\mathrm{i}}(t_5)=-\left(\dot{S}_{\mathrm{i}}(t_3)-\dot{S}_{\mathrm{i}}(t_4)\right)+\dot{S}_{\mathrm{i}}(t_4)=$$
$$-2\dot{S}_{\mathrm{o}}(t_1)+g(t_3-t_2)+2\dot{S}_{\mathrm{o}}(t_4) \tag{26}$$

完成自由运动阶段后经过重力减速，t_6时刻重新进入下半部分接触，此时初值条件变为：

$$\ddot{S}_{\mathrm{i}}(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\left[\sum_{m}^{q}K'\left(\left|\delta_{\mathrm{r}}\cos\theta_m-\dfrac{1}{2}h_{\mathrm{c}}\right|\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos^2\theta_m f(\delta_m)\mathrm{sgn}(\Delta)\cdot m_{\mathrm{i}}^{-1}\right]-g, & \text{碰撞}\\ -g, & \text{未碰撞}\end{cases} \tag{28}$$

式中，Δ为$S_{\mathrm{o}}(t)-S_{\mathrm{i}}(t)$。

为将下半部分碰撞阶段与上半部分碰撞阶段统一，引入$\mathrm{sgn}(S_{\mathrm{o}}(t)-S_{\mathrm{i}}(t))$可以表示为：

$$\mathrm{sgn}=\begin{cases}1, & S_{\mathrm{o}}(t)-S_{\mathrm{i}}(t)>0\\ 0, & S_{\mathrm{o}}(t)-S_{\mathrm{i}}(t)=0\\ -1, & S_{\mathrm{o}}(t)-S_{\mathrm{i}}(t)<0\end{cases} \tag{29}$$

微分方程初值条件更新为：

$$S_{\mathrm{i}_n}=S_{\mathrm{o}}(t_{3n}),\ \dot{S}_{\mathrm{i}_n}=\dot{S}_{\mathrm{i}}(t_{3n}) \tag{30}$$

对某一接触时刻归纳后，其微分方程速度初值条件为：

$$\dot{S}_{\mathrm{i}_n}=\dot{S}_{\mathrm{i}}(t_{3n})=2(-1)^{n+1}\sum_{1}^{n}(-1)^{n+1}\dot{S}_{\mathrm{o}}(t_{3n-2})+$$
$$(-1)^{n+1}\sum_{1}^{n}(-1)^{n}g(t_{3n}-t_{3n-1}) \tag{31}$$

式中，n表示第n次接触，n=1,2,3,…。

这表明在无阻尼运动过程中，撞击强度与内/外圈相对速度有关，相对速度越大，撞击程度越剧烈，并且与未碰撞时的滞空时间相关。对于长时间稳定振动而言，该系统在瞬态阶段可能出现暂时加剧，但长期趋向稳态或有限幅度的振荡，撞击程度稳定在有界范围内。

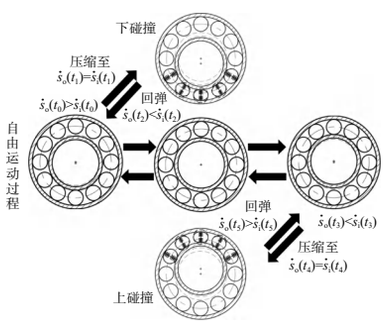


图 6 碰撞运动过程

Fig. 6 Collision motion process

2.3 仿真分析

内/外圈通过滚动体产生的剧烈碰撞，导致瞬时油膜支承力上升，油膜厚度下降，使得轴电流放电概率上升，造成轴承寿命下降。因此，实时计算受冲击时的油膜支承力，获得其载荷分布特性对轴电流损伤的抑制有重要作用。本文基于无阻尼运动下轴承碰撞运动模型进行仿真，采取简化的手段得到油膜支力的实时变化。电动汽车驱动电机轴承以使用6206、6207型深沟球轴承为主，本文数值仿真分析以SKF6206轴承为例进行研究，其参数如表1所示。

$$S_{\mathrm{i}_2}=S_{\mathrm{o}}(t_6),\ \dot{S}_{\mathrm{i}_2}=\dot{S}_{\mathrm{i}}(t_6) \tag{27}$$

而后重复上述过程直至运动结束。以上运动过程如图6所示。

得出考虑滚动体位置碰撞及游隙全过程方程：

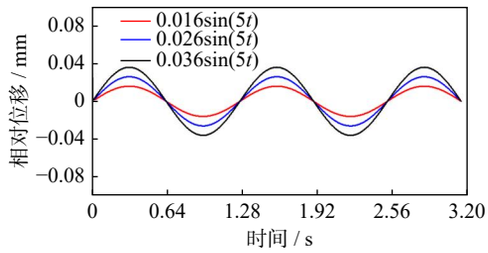
表 1 轴承参数

Tab. 1 Parameters of bearing

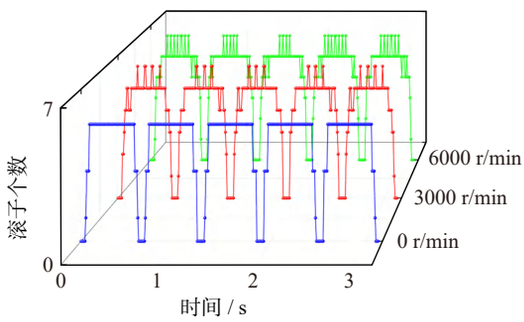
参数	数值
内圈直径/ mm	30
外圈直径/ mm	62
节圆直径/mm	46
滚子直径/mm	9.525
滚子个数	12
接触角/(°)	0
游隙/μm	6
内/外圈弹性模量/(N·m^{-2})	2.07×10^{11}
内/外圈泊松比	0.29
内圈及其转子质量/kg	22

电动汽车巡航速度一般在40~100 km/h，对应电机转速在3000~7000 r/min。其外部激励的主要频率成分在0.5~20 Hz之间。因此驱动电机轴承多处于高速工况，且其受激励时载荷特性表现为低频高幅值。轴承动刚度对其碰撞过程中的动力学行为具有显著影响，因此有必要首先研究其动态刚度的变化特性。仿真基于MATLAB，时间步长设置为0.01 s，保证计算精度。通过结合对应转速，得到每个滚动体在某一时间变化范围内所转动的角度，实时更新其位置角，并结合该时刻下承载滚子个数以及刚度公式得出该时刻轴承的动刚度值。为分析在激励作用下轴承动刚度的变化规律，并突出系统的非线性效应，本研究设置了三种不同的内/外圈相对位移幅值，分别为0.016、0.026和0.036 mm，并在0、3000及6000 r/min三种转速条件下进行仿真分析，研究动刚度受外部激励后的变化曲线，如图7所示。

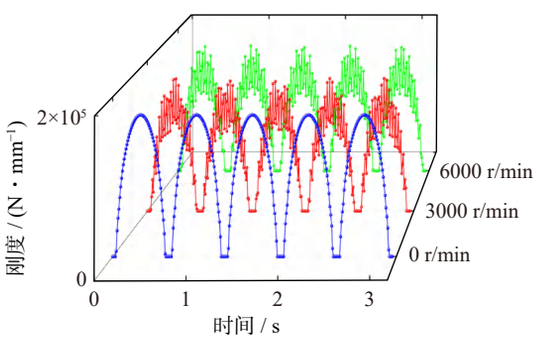
仿真结果图7(b)、(d)和(f)表明，滚动体受载个数与轴承内/外圈相对位移量呈正相关，随着转速的升高，轴承接触滚动体个数将频繁变化。滚动轴承在不同转速下呈现出显著的动力学差异，如图7(c)、(e)和(g)所示，在0转速下动刚度和载荷特性表现相对平稳；然而随着转速的升高，系统的动态特性明显增强。高速旋转导致滚动体与内/外圈之间的接触状态发生快速变化，产生一定的扰动力，使得轴承动刚度呈现出更为动态的波动，因此动刚度曲线变得



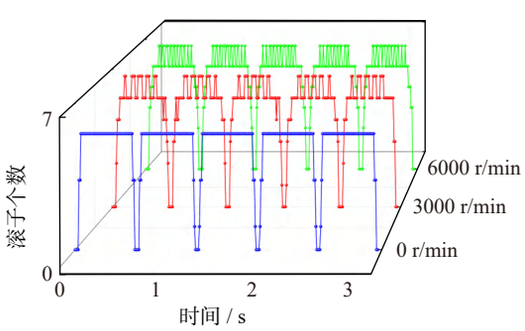
(a) 内/外圈相对位移
(a) Relative displacement of inner ring and outer ring



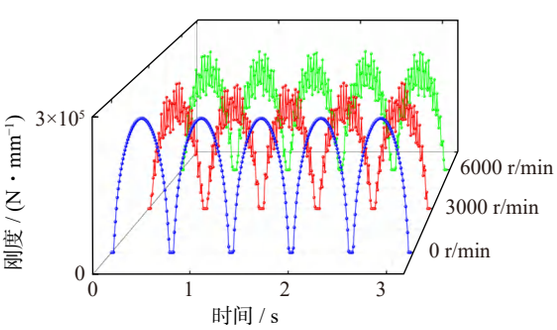
(b) 0.016sin(5*t*)接触量下滚子个数变化
(b) Variation of rollers number at 0.016sin(5*t*)



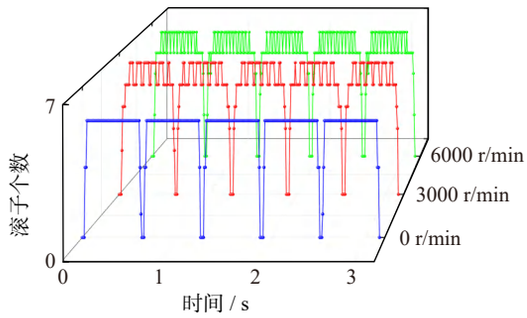
(c) 0.016sin(5*t*)接触量下刚度变化
(c) Variation of stiffness at 0.016sin(5*t*)



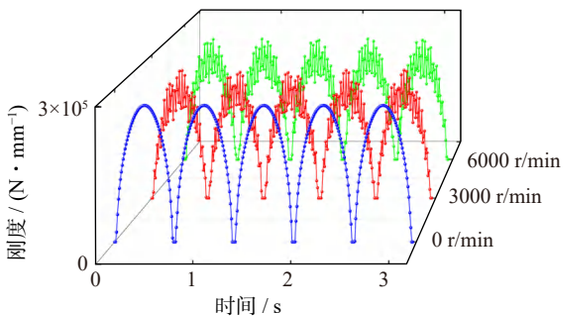
(d) 0.026sin(5*t*)接触量下滚子个数变化
(d) Variation of rollers number at 0.026sin(5*t*)



(e) 0.026sin(5*t*)接触量下刚度变化
(e) Variation of stiffness at 0.026sin(5*t*)



(f) 0.036sin(5*t*)接触量下滚子个数变化
(f) Variation of rollers number at 0.036sin(5*t*)



(g) 0.036sin(5*t*)接触量下刚度变化
(g) Variation of stiffness at 0.036sin(5*t*)

图 7　不同转速下滚子个数及刚度变化

Fig. 7　Variation of rollers number and stiffness at different speeds

更加复杂, 高频振荡现象加剧。高速转动相较于零转速条件, 动刚度均值下降幅度如表 2 所示。

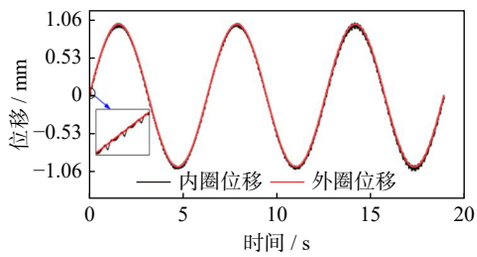
表 2　不同转速下动刚度均值下降幅度

Tab. 2　Decline rate of average dynamic stiffness at different speeds

内/外圈相对位移/mm	转速/ ($r \cdot min^{-1}$)	动刚度均值/ ($N \cdot mm^{-1}$)	动刚度均值下降幅度/%
0.016sin(5*t*)	0	1.1496×10^4	≈23
	3000	8.8147×10^4	
	6000	8.8096×10^4	
0.026sin(5*t*)	0	1.6534×10^5	≈20.5
	3000	1.3143×10^5	
	6000	1.3137×10^5	
0.036sin(5*t*)	0	2.0474×10^5	≈19
	3000	1.6578×10^5	
	6000	1.6577×10^5	

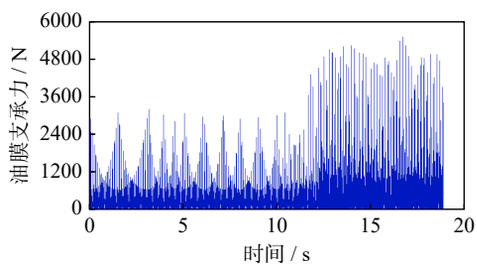
3000 和 6000 r/min 转速下刚度均值较静止工况下降 20% 左右, 而两组转速之间相差不足千分之一, 这说明随着转速的升高, 刚度先快速降低, 后趋于稳定[18]。为了降低仿真计算量、提高仿真效率, 将高速状态运动学动刚度值取 0.8 倍 0 转速下动刚度值。由于 3000~6000 r/min 转速刚度下降幅度极小, 因此设置静止与高转速两组工况进行仿真计算。由于动力学方程中具有非线性项导致无解析解, 因此采用 4 阶 Runge-Kutta 法对其进行数值求解。给外圈施加一个 sin*t* 的外部激励, 得静止状态下的内/外圈位移

如图 8(a) 所示，其油膜所受支承力如图 8(b) 所示；高转速工况下的内/外圈位移如图 8(c) 所示，其油膜所受支承力如图 8(d) 所示。



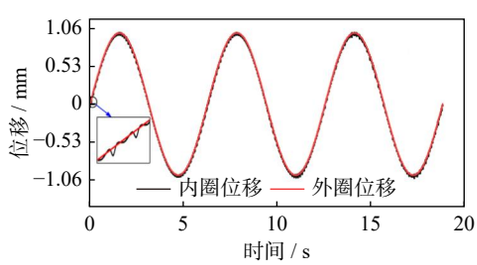
(a) 静止状态下内/外圈位移

(a) Displacement of inner ring and outer ring in static state



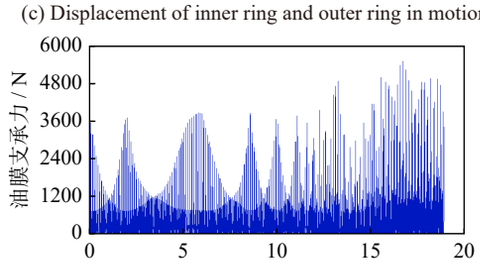
(b) 静止状态下油膜支承力

(b) Oil film supporting force in static state



(c) 运动状态下内/外圈位移

(c) Displacement of inner ring and outer ring in motion state



(d) 运动状态下油膜支承力

(d) Oil film supporting force in motion state

图 8 碰撞动力学仿真

Fig. 8 Collision dynamics simulation

从图 8(a) 和 (c) 中可以看出，外部激励通过外圈传递至轴承系统后，将诱发显著的内圈位移响应与瞬态油膜支承力，静止工况由于动刚度均值更大，其动态响应较高转速工况更剧烈。由图 8(b) 和 (d) 可得，随着高转速工况刚度的下降，内圈动态响应减弱，使得载荷变化趋势变缓，但随时间增加油膜支承力峰值高于静止工况的油膜支承力峰值。

3 试验验证

为了验证本文中针对外部激励所建立的动力学模型的正确性，在电动汽车驱动电机模拟试验台上进行试验验证，如图 9 所示。



图 9 电动汽车驱动电机模拟试验台

Fig. 9 Electric vehicle drive motor test bench

该试验台能模拟电动汽车驱动电机在不同转速及负载下的运行状况，同时通过传感器监测压力变化。所用驱动电机功率额定功率 80 kW，峰值功率为 160 kW，额定转速 4775 r/min，最高转速为 12000 r/min，额定扭矩 160 N·m，最大输出扭矩 310 N·m。设定目标电机转速，在稳定各工况点后，再通过试验台施加外部激励，通过传感器持续监测轴承接触载荷的动态响应，记录了轴承接触载荷随时间的变化数据，得到油膜支承力，如图 10 所示。

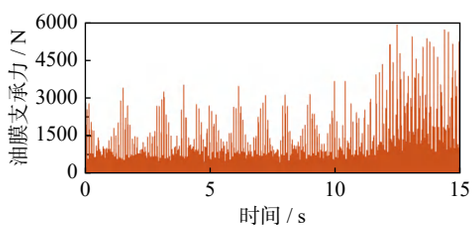


图 10 油膜支承力

Fig. 10 Oil film supporting force

试验结果显示，在外圈受到外部激励时，轴承油膜支承力先显现出较为规律的波峰-波谷循环，随着时间的增加，由于能量累积导致支承力峰值上升，支承力动态特性逐渐明显。该非线性系统受强制位移激励后，内/外圈进行相对运动并产生位移差，输入能量转化为非线性等效弹簧储存的动能与内圈及转子的动能及势能，虽然无阻尼项对输入能量进行耗散，但受限于物理约束，最终支承力幅值收敛于某一固定范围，表现为有限幅值的周期力响应及其高阶谐波。仿真结果与试验结果吻合，验证了所建模型的正确性。

4 结 论

本文以深沟球轴承为研究对象，提出一种改进的动刚度计算方法，该方法基于赫兹接触理论与非线性弹簧模型，并同时考虑游隙与滚动体高速运动位置的变化。在此基础上，对其碰撞运动过程进行分析并建立复杂激励下轴承的完整动力学模型。得出以下结论：

(1)在相同内/外圈相对位移量下，随着转速的升高，等效弹簧动刚度均值先迅速下降，后趋于稳定。

高速状态下轴承动刚度均值较静止状态下降幅度在20%左右。

(2)当轴承外圈受到相同外部激励, 低转速工况内圈振动幅值小, 但动态响应剧烈, 载荷变化趋势更尖锐; 高转速工况由于刚度下降, 振动幅值上升, 动态响应较低速情况放缓, 因此支承力变化较缓。

(3)油膜支承力趋势呈现先增大后放缓态势, 其数值在有界值震荡, 不会随时间累积而发散。在持续振动下, 高转速下油膜支承力最大峰值较低转速上升。

参考文献:

[1] 王朝阳，张涛，吴鑫辉，等. 分布式驱动电动汽车驱动电机轴承故障诊断研究综述 [J]. 机电工程技术，2023，52(6)：36-40.
WANG Zhaoyang，ZHANG Tao，WU Xinhui，et al. Review of fault diagnosis of drive motor bearings for distributed drive electric vehicles[J]. Mechanical & Electrical Engineering Technology，2023，52(6)：36-40.

[2] 刘波，王有志，安俊江，等. 车辆-路面空间耦合振动模型及其动力响应分析 [J]. 山东大学学报(工学版)，2014，44(3)：83-89.
LIU Bo，WANG Youzhi，AN Junjiang，et al. The spatial model of vehicle-pavement coupling vibration and its dynamic responses analysis[J]. Journal of Shandong University (Engineering Science)，2014，44(3)：83-89.

[3] MA J J，XUE Y J，HAN Q K，et al. Motor bearing damage induced by bearing current：a review[J]. Machines，2022，10(12)：1167.

[4] XIAO Z X，HU M H，CHEN S，et al. Bearing electrical-erosion damage in electrical drive systems：a review[J]. IEEE Transactions on Transportation Electrification，2024，10(2)：3428-3442.

[5] WEI X Q，LI X M. Early failure analysis of automobile generator bearing[J]. Engineering Failure Analysis，2024，159：108124.

[6] 赵联春，赵纪辉，晏丽明，等. 球轴承刚度斜弹簧计算方法 [J]. 轴承，2025(1)：69-75.
ZHAO Lianchun，ZHAO Jihui，YAN Liming，et al. Stiffness of ball bearings calculated by inclined spring method[J]. Bearing，2025(1)：69-75.

[7] 张跃明，贾迎帅，纪姝婷. 圆柱滚子轴承的径向刚度分析 [J]. 航空动力学报，2024，39(2)：20210474.
ZHANG Yueming，JIA Yingshuai，JI Shuting. Radial stiffness analysis of cylindrical roller bearing[J]. Journal of Aerospace Power，2024，39(2)：20210474.

[8] 周仕明，李道奎，唐国金. 一种基于非线性弹簧新的球轴承接触有限元模型 [J]. 应用力学学报，2010，27(4)：817-822.
ZHOU Shiming，LI Daokui，TANG Guojin. A new contact finite element model of ball bearing based on nonlinear springs[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics，2010，27(4)：817-822.

[9] CHEN R L，LI J K，WANG Y M，et al. Study on the time-varying stiffness characteristics of four-point contact ball bearings[J]. Lubricants，2025，13(3)：118.

[10] TIAN J Y，SU H，WANG Z J，et al. Comparative analysis of angular contact bearing stiffness calculated by Hertz contact and thermo-elastohydrodynamic lubrication[J]. Tribology International，2024，192：109251.

[11] DENG S，SHEN J S，YANG C. A nonlinear dynamic approach for analyzing dynamic stiffness of ball bearings at different raceway diameters and guiding clearances[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics，2024，160：104632.

[12] 郝旭，于长鑫，刘军，等. 热致轴承刚度与游隙变化特性及其对转子振动响应的影响 [J]. 机械工程学报，2022，58(13)：147-165.
HAO Xu，YU Changxin，LIU Jun，et al. Thermal-induced bearing stiffness and clearance variation characteristics and its effect on vibration response of rotor system[J]. Journal of Mechanical Engineering，2022，58(13)：147-165.

[13] DEMIRHAN N，KANBER B. Stress and displacement distributions on cylindrical roller bearing rings using FEM[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines，2008，36(1)：86-102.

[14] WU X G，QIN Y，LUO J，et al. Fault dynamic model of high-speed rolling bearing by a compound displacement excitation function considering the effect of defect roughness[J]. Mechanism and Machine Theory，2022，177：105061.

[15] 罗茂林，郭瑜，伍星. 基于时变接触刚度的球轴承双冲击现象动力学建模 [J]. 振动工程学报，2018，31(5)：875-882.
LUO Maolin，GUO Yu，WU Xing. Dynamic modeling for double impulses behavior of a spalled ball bearing based on time-varying contact stiffness[J]. Journal of Vibration Engineering，2018，31(5)：875-882.

[16] 李鑫斌，刘建昱，刘静，等. 高速行星轮轴承接触动力学建模与振动特性分析 [J]. 西安工业大学学报，2025，45(4)：505-515.
LI Xinbin，LIU Jianyu，LIU Jing，et al. Contact dynamics modeling and vibration characteristics analysis of high-speed planetary gear bearings[J]. Journal of Xi'an Technological University，2025，45(4)：505-515.

[17] FANG X，WU J H，DU F. Load force effect on the dynamic characteristics of planar multibody systems with clearances[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics，2025，178：105202.

[18] SHENG X，LI B ，WU Z P，et al. Calculation of ball bearing speed-varying stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory，2014，81：166-180.

第一作者: 李学军(1969—), 男, 博士, 教授。
E-mail: hnkjdxlxj@163.com

通信作者: 石常志(1994—), 男, 博士研究生。
E-mail: lhscz0110@163.com

水声吸声超材料拓扑优化设计

郑周甫[1,2]，杨海滨[1,2]，王 洋[1,2]，钟 杰[1,2]，马炜彤[1,2]，梁才琼[1,2]，徐胜森[1,2]，温激鸿[1,2]

（1. 国防科技大学智能科学学院，湖南 长沙 410073；
2. 国防科技大学装备状态感知与敏捷保障全国重点实验室，湖南 长沙 410073）

摘要：针对水声吸声超材料“低密度、高刚度、高效吸声”等多目标需求，建立了一个基于流固耦合传递方程的拓扑优化框架，旨在开展超材料结构按需逆向设计。构建了“橡胶-超结构-橡胶”的超材料数学模型，其中超结构由周期阵列的各向异性微结构单元构成。为了开展理论分析，基于渐进均质化等效方法获取的等效参数构建传递矩阵关系，表征超材料中弹性波传播特性，并结合流固耦合关系发展超材料声学性能计算的理论方法。开展结构设计时，建立的拓扑优化框架以高效吸声为优化目标，结构等效刚度和体积分数为约束条件，实现满足低密度、高刚度需求的声学性能最优化微结构。对优化结果的分析表明，高效的吸声性能源于超结构层对入射声波的操纵，通过其调控可在两侧橡胶层内形成横波，进而基于橡胶材料对横波的高效损耗能力实现声能的大幅吸收，达到有效抑制反射的效果。本研究为水声吸声超材料分析提供了一种准确高效的理论计算方法，并为快速开展超材料逆向设计提供了有效的拓扑优化框架，有望为破解超材料工程化应用中的需求矛盾提供解决方案。

关键词：水声超材料；低频宽带吸声；流固耦合传递方程；拓扑优化
中图分类号：O429 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202507064

Topology optimization design of hydroacoustic metamaterials for sound absorption

ZHENG Zhoufu[1,2], YANG Haibin[1,2], WANG Yang[1,2], ZHONG Jie[1,2], MA Weitong[1,2],
LIANG Caiqiong[1,2], XU Shengsen[1,2], WEN Jihong[1,2]

（1.College of Intelligence Science and Technology，National University of Defense Technology，Changsha 410073，China；
2.National Key Laboratory of Equipment State Sensing and Smart Support，National University of Defense Technology，
Changsha 410073，China）

Abstract: To address the multi-objective requirements for hydroacoustic absorption metamaterials，such as ‘low density，high stiffness，and high-efficiency sound absorption’ a topology optimization framework based on the transfer equations for fluid-structure interaction is proposed to achieve on-demand inverse design of the metamaterial structures. A mathematical model of the metamaterial structured as ‘rubber-metastructure-rubber’ is established. Within this model，the metastructure consists of periodically arranged anisotropic microstructural units. Based on the effective parameters obtained via the asymptotic homogenization method，a transfer matrix relationship is constructed to analyze the propagation characteristics of elastic waves within the metamaterial，and a theoretical method for calculating the acoustic performance of the metamaterial is developed by combining the fluid-structure coupling relationships. A topological optimization framework is constructed for structural design. With high-efficiency sound absorption as the optimization objective, and structural equivalent stiffness and volume fraction as the constraints，some optimized microstructures with acoustic performance that meet the requirements of low density and high stiffness are achieved. The analysis of the optimization results reveals that efficient acoustic performance stems from the manipulation of incident longitudinal waves by the metastructure layer，and through its regulation，transverse waves can be formed in the rubber layers on both sides. Based on the high loss capability of rubber materials for transverse waves，significant absorption of acoustic energy is achieved，ultimately leading to effective suppression of reflection. This research presents an accurate and efficient theoretical method for analyzing hydroacoustic absorption metamaterials，along with an effective topology optimization framework for rapid inverse design of metamaterials. This approach offers a promising solution to resolve conflicting requirements in the engineering application of metamaterials.

Keywords: hydroacoustic metamaterials; low-frequency and broadband sound absorption; transfer equations for fluid-structure interaction; topology optimization

近年来超材料发展迅速，作为一种通过人工巧妙设计的微结构复合材料，其包括声学超材料[1]、力学超材料[2]、光学超材料[3]等范畴，可实现负折射[4]、超隐身[5]、传播调控[6]、极端可调各向异性[7]、波模调控[8-10]等超常物理特性，突破了天然材料固有的物理限制，能够按需调控物质与场（声场、力场等）的相

收稿日期：2025-07-28；**修订日期：**2025-08-12
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52201386，52401396）；国家重点实验室基金资助项目（WDZC20245250305）

互作用。其在声波波动、载荷传递、光波传输等行为调控上展现出广阔的应用前景。超材料“结构决定功能”的设计理念，为传统功能材料的性能突破提供了一种思路。

在水下声学领域，吸声材料的核心需求同样是对声波的高效吸收与调控[11]，这与超材料通过微观结构设计实现物理场操控的本质高度契合。水声吸声材料在降低噪声污染、提升水下探测精度与降低通信信号干扰等方面展现出显著效用。水声吸声材料以“吸收声波能量、抑制反射信号、衰减噪声强度”为核心作用机制，不仅为生态保护、科学探测等领域提供了关键的技术支撑，更成为现代水下工程与声学技术体系中不可或缺的功能性材料[12]。

水下吸声材料依赖于表面阻抗匹配和阻尼耗散的基本吸声机理。其中，阻抗匹配条件能够保证声波可以充分进入材料内部，防止吸声材料的界面上直接发生强烈发射；阻尼耗散则使得进入吸声材料内的声波被充分耗散衰减，最终减少反射能量。由于橡胶、聚氨酯等黏弹性高分子材料与水的特性阻抗接近且具有较高的损耗因子，因此常被用作吸声材料的基体材料。传统水下吸声材料主要通过在黏弹性高分子材料内部设计孔隙结构实现对声波的高效吸收，典型代表就是 20 世纪 90 年代提出的“Alberich”水声吸声材料[13]，其由橡胶材料内嵌圆柱形空腔构成。为进一步改善空腔结构导致的阻抗失配问题，多孔梯度结构设计也得到了广泛发展[14-16]。除此之外，一些微粒[17-18]、质量体[19-20]等内嵌物也被提出用于提升低频吸声性能。

基于超材料思想，水下吸声材料设计中也逐渐引入复杂的几何微结构设计来调控声波，以实现良好的声学性能。例如，将局域共振结构（由硅橡胶包覆金属芯体形成）引入水声吸声材料设计中，可以实现与共振频率相关的低频高效声吸收[21-23]。通过内嵌多尺度组合的局域共振单元，则可以利用不同共振频率的耦合效应一定程度地提升吸声带宽[24-25]。而通过微结构设计实现的超结构，可以在橡胶材料中将入射纵波转换为横波，发挥橡胶材料对横波高效吸收的特点以实现高效吸声[26-28]。

尽管当前水下吸声材料的设计已从传统单一空腔内嵌，向多材料复合、多尺寸组合、多结构杂化等方向发展，但这类设计仍高度依赖研究者的经验积累与试错迭代，难以在设计过程中系统性地平衡“轻质、耐压、高效吸声”等多目标需求。例如，为追求吸声效果而设计的大量内嵌空腔可能导致结构刚度过低，无法承受深海高压[29]；为提升低频吸声性能而增加的质量体则会显著增加材料密度，难以满足轻量化要求[30]；依赖单一局域共振单元的设计往往受限于窄频响应，难以覆盖水下复杂噪声的频谱范围[31]。

为深入探究人工精细化设计的弹性超材料在水下吸声材料中的应用潜力，从而针对性提升水下吸声材料在低密度、高刚度与高效吸声等方面的综合性能，本文首先基于数学模型构建理论分析框架，进而引入拓扑优化算法开展声学超材料结构的自动寻优设计。该优化设计方法突破传统设计方式中对人工经验的依赖，实现吸声结构的按需演化生成；通过多目标协同优化策略平衡各项性能间的矛盾关系，最终实现宽频带内的高效吸声效果。这种“结构-功能”一体化设计思路，有望为破解水下超材料的工程实用性难题提供系统性解决方案。

1　水声吸声超材料声学特性分析

本文设计的水声吸声超材料包含黏弹性阻尼材料和超结构，如图 1 所示。超材料 y 方向（上下边界）为周期边界，超结构密封在左右两侧的橡胶层内。水域中的入射声波依次经过超材料的第一层橡胶、超结构层和第二层橡胶，最后到达钢背衬。其中，橡胶层为黏弹性阻尼材料，具有声波耗散能力，而超结构具有对传播声波进行调控的特性。本文中超结构基材选用复合材料，并认为其损耗因子为零。水声吸声超材料一侧与水域耦合，另一侧贴敷在钢背衬上，钢背衬与空气域耦合。

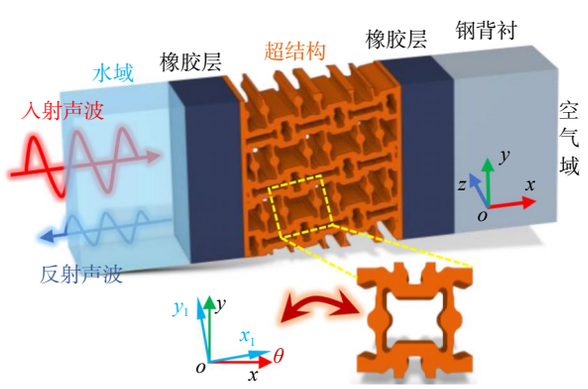


图 1　水声吸声超材料示意图

Fig. 1　Schematic diagram of hydroacoustic metamaterials for sound absorption

本文所研究的超材料主要用于吸收水下环境内的声波。由于水的特性阻抗（1.48×10^6 N·s/m^3）是空气特性阻抗（4.15×10^2 N·s/m^3）的近 3600 倍，很多在空气声学中可以视为刚性壁的物体，在水域中仍然可以轻松穿透。为实现水域内的良好吸声，抑制反射回波，本文开展了相关研究。由于水和空气在特性上的这种巨大差异，本文所研究的吸声材料仅能够用于水下环境，并不能直接运用于空气声环境。

在水声吸声超材料中，弹性波调控的核心组件

是超结构，其由周期排布的元胞结构与隔离板构成，隔离板使得超结构与橡胶材料形成良好的连接表面。其中，元胞结构如图 1 下方的放大示意图所示。该元胞结构沿局部坐标系 x_1、y_1 方向周期延拓，然后整体逆时针旋转从而与全局坐标系 x、y 形成夹角 θ，沿 z 方向为无限拉伸的厚度方向，因此该超材料可等效为二维平面应变问题，简化计算和分析。

1.1 弹性介质中的弹性波传播特性

在超结构、橡胶等弹性介质中，弹性波沿着 $+x$ 方向传播时，位移场由 x 方向分量 u_x 和 y 方向分量 u_y 组成，即

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx} \tag{1}$$

式中，u_1 和 u_2 分别为 x 和 y 方向的位移幅值；j 为虚数单位；k 为波数。

为使得表达式更加简洁，文中省略时谐项 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$。根据运动学方程有：

$$\sigma_{pq,q}=-\omega^2\rho u_p \tag{2}$$

式中，ω 为角频率；ρ 为基体材料密度；σ 为应力，下标“p”和“q”取值为 1 或 2，表示 x 或 y 方向分量，$\sigma_{pq,q}$ 表示应力分量 σ_{pq} 关于 q 的微分。

进一步可以整理得到本征值问题：

$$\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix}C_{11}&C_{16}\\C_{16}&C_{66}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\frac{\omega^2}{k^2}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \tag{3}$$

式中，$C_{n_1n_2}$（n_1,n_2=1,2,6）为基于 Voigt 缩减标记表示的基体材料或者元胞结构等效弹性矩阵常数。

通过求解非平庸解，可得弹性介质中的（准）纵波波数 k_{qL} 和（准）横波波数 k_{qT} 分别为：

$$\begin{aligned}k_{\mathrm{qL}}^2&=\frac{\rho\omega^2\left(C_{11}+C_{66}-\sqrt{\Lambda}\right)}{2(C_{11}C_{66}-C_{16}^2)},\\k_{\mathrm{qT}}^2&=\frac{\rho\omega^2\left(C_{11}+C_{66}+\sqrt{\Lambda}\right)}{2(C_{11}C_{66}-C_{16}^2)}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\mathrm{j}\omega P_x&\mathrm{j}\omega P_x&\mathrm{j}\omega Q_x&\mathrm{j}\omega Q_x\\\mathrm{j}\omega P_y&\mathrm{j}\omega P_y&\mathrm{j}\omega Q_y&\mathrm{j}\omega Q_y\\-\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}(C_{11}P_x+C_{16}P_y)&\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}(C_{11}P_x+C_{16}P_y)&-\mathrm{j}k_{\mathrm{qT}}(C_{11}Q_x+C_{16}Q_y)&\mathrm{j}k_{\mathrm{qT}}(C_{11}Q_x+C_{16}Q_y)\\-\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}(C_{16}P_x+C_{66}P_y)&\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}(C_{16}P_x+C_{66}P_y)&-\mathrm{j}k_{\mathrm{qT}}(C_{16}Q_x+C_{66}Q_y)&\mathrm{j}k_{\mathrm{qT}}(C_{16}Q_x+C_{66}Q_y)\end{bmatrix} \tag{11}$$

对于相同弹性介质，任意 x 和 $x+d$ 位置，场量 $\boldsymbol{f}_x$ 满足传递关系：

$$\boldsymbol{f}_{x+d}=\boldsymbol{T}_d\boldsymbol{f}_x,\quad \boldsymbol{T}_d=\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}_d\boldsymbol{L}^{-1} \tag{12}$$

式中，$\boldsymbol{T}_d$ 为长度为 d 的弹性介质层中的传递矩阵；$\boldsymbol{N}_d$ 为式 (9) 中 $x=d$ 时的矩阵。

当弹性波在不同的介质中传播时，两种弹性介质的界面上满足连续性条件，即速度连续和应力连续，此时界面两侧的场量 $\boldsymbol{f}_x$ 相等。因此，可以根据多层弹性介质中最左侧的场量，通过传递关系进一步获得最右侧界面对应的场量，该传递关系可以写为：

式中，$\Lambda=(C_{11}-C_{66})^2+4C_{16}^2$，以及对应的特征向量分别为：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}_{\mathrm{qL}}&=\begin{pmatrix}P_x\\P_y\end{pmatrix}=\sqrt{\overline{P_x^2}+\overline{P_y^2}}\begin{pmatrix}\overline{P_x}\\\overline{P_y}\end{pmatrix},\\\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}_{\mathrm{qT}}&=\begin{pmatrix}Q_x\\Q_y\end{pmatrix}=\sqrt{\overline{Q_x^2}+\overline{Q_y^2}}\begin{pmatrix}\overline{Q_x}\\\overline{Q_y}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

式中，P_x、P_y、Q_x、Q_y 为归一化极化分量；$\overline{P_x}$、$\overline{P_y}$、$\overline{Q_x}$ 和 $\overline{Q_y}$ 分别为：

$$\begin{aligned}\overline{P_x}&=2C_{16}+(C_{11}-C_{66})+\sqrt{\Lambda},\\\overline{P_y}&=2C_{16}-(C_{11}-C_{66})+\sqrt{\Lambda},\\\overline{Q_x}&=2C_{16}+(C_{11}-C_{66})-\sqrt{\Lambda},\\\overline{Q_y}&=2C_{16}-(C_{11}-C_{66})-\sqrt{\Lambda}\end{aligned} \tag{6}$$

在有限长度的多层弹性介质中，如图 2 所示（图中 n 表示第 n 个界面），弹性波传播时会在介质内形成反射波，某一层弹性介质中的位移场可以表示为：

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}_x\boldsymbol{A} \tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1&A_2&A_3&A_4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，其元素分别表示沿 $\pm x$ 方向传播的 (准) 纵波和 (准) 横波模式的位移幅值。$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{N}_x$ 矩阵分别为：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P_x&P_x&Q_x&Q_x\\P_y&P_y&Q_y&Q_y\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{N}_x=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}x}&0&0&0\\0&\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}x}&0&0\\0&0&\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{qT}}x}&0\\0&0&0&\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{\mathrm{qT}}x}\end{bmatrix} \tag{9}$$

为描述不同弹性介质层中弹性波传播关系，定义场量 $\boldsymbol{f}_x=\begin{pmatrix}v_x&v_y&\sigma_{xx}&\sigma_{xy}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 描述弹性介质中的速度分量 v_x、v_y 和应力分量 σ_{xx}、σ_{xy}，该场量可根据位移场表示为：

$$\boldsymbol{f}_x=\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}_x\boldsymbol{A} \tag{10}$$

其中：

$$\boldsymbol{f}_n=\boldsymbol{T}_{\mathrm{t}0}\boldsymbol{f}_0,\quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{t}0}=\boldsymbol{T}_{dn}\cdots\boldsymbol{T}_{d2}\boldsymbol{T}_{d1} \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{T}_{\mathrm{t}0}$ 为总传递矩阵；$\boldsymbol{f}_0$ 和 $\boldsymbol{f}_n$ 分别为第 0 个（起始）

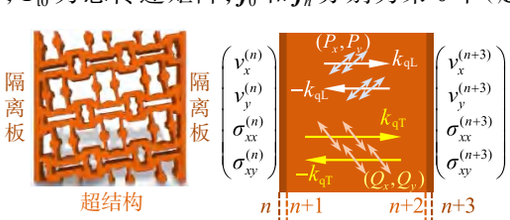


图 2 弹性介质中的波传播行为示意图

Fig. 2 Schematic diagram of wave propagation behavior in elastic media

和第 n 个（末端）界面的场量；$\boldsymbol{T}_{d1}$~$\boldsymbol{T}_{dn}$ 为长度为 $d1$~dn 的弹性介质层传递矩阵。

1.2　流固耦合关系与声学性能评估

开展超材料吸声性能计算时，假设在水域中存在声压幅值为 P_i 的沿+x 方向传播的平面波，如图 3 所示。在该声波的激励下，水声吸声超材料将产生声压幅值为 P_r 的反射声波，并在空气域中产生声压幅值为 P_t 的透射声波。

根据流固耦合边界条件，弹性体与流体界面上满足法向应力连续、法向质点速度连续以及切向应力为 0，即

$$\begin{cases} v_x = (p^+ - p^-)/Z \\ \sigma_{xx} = -(p^+ + p^-) \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

其中，在流体与超材料耦合界面，$p^+ = P_\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_\mathrm{w}x}$，表示沿+$x$ 方向传播的平面波，k_w 为流体域中波数；$p^- = P_\mathrm{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_\mathrm{w}x}$，表示沿−$x$ 方向传播的平面波（反射声波）；Z 对应流体域特性阻抗，在水域中对应为 Z_w，在空气域中对应为 Z_a。

定义向量 $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p^+ & p^- & v_y & \sigma_{xy} \end{pmatrix}^\mathrm{T}$，式 (14) 可整理为矩阵形式：

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1/Z & -1/Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

因此，对于如图 3 所示的水声吸声超材料，可以建立入射端（s−界面）与透射端（s+界面）的传递关系：

$$\boldsymbol{p}_{s+} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{p}_{s-}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}_{s+}^{-1}\boldsymbol{T}_{d6}\boldsymbol{T}_{d5}\boldsymbol{T}_{d4}\boldsymbol{T}_{d3}\boldsymbol{T}_{d2}\boldsymbol{T}_{d1}\boldsymbol{G}_{s-} \tag{16}$$

式中，$\boldsymbol{T}_{d1}$~$\boldsymbol{T}_{d6}$ 分别表示左侧橡胶层 1 到钢背衬的传递矩阵，根据式 (12) 获得。其中图 3 所示超材料的等效弹性常数 $\boldsymbol{C}_\mathrm{e}$ 将在后文进一步讨论。

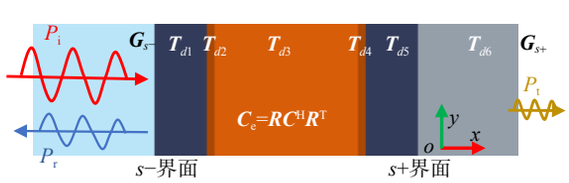


图 3　声学超材料的流固耦合传递关系示意图

Fig. 3　Schematic diagram of fluid-structure coupling transfer relation in hydroacoustic metamaterials

当入射声波幅值为 p_i =1 Pa 时，由于水域和空气域为半无限大，在界面 s−和 s+上有边界条件向量：

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_{s-} = \begin{pmatrix} p_\mathrm{i} & p_\mathrm{w}^- & v_{y,s-} & 0 \end{pmatrix}^\mathrm{T} \\ \boldsymbol{p}_{s+} = \begin{pmatrix} p_\mathrm{a}^+ & 0 & v_{y,s+} & 0 \end{pmatrix}^\mathrm{T} \end{cases} \tag{17}$$

将式 (17) 代入 (16)，可以计算得到水域中的反射系数：

$$R = \left|p_\mathrm{w}^-\right|^2, \quad p_\mathrm{w}^- = \frac{H_{23}H_{41} - H_{21}H_{43}}{H_{22}H_{43} - H_{23}H_{42}} \tag{18}$$

式中，H_{lm}（l, m=1,2,3,4）为矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中的元素。将计算结果代入式 (16)，可进一步求得透射声波 p_a^+。

由于空气域特性阻抗与钢背衬特性阻抗差距巨大，透射声波声压幅值极小，在计算吸声系数过程中可以忽略不计，因此吸声系数为：

$$\alpha = 1 - \left|p_\mathrm{w}^-\right|^2 - \frac{Z_\mathrm{w}}{Z_\mathrm{a}}\left|p_\mathrm{a}^+\right|^2 \approx 1 - R \tag{19}$$

1.3　理论方法验证

所建立的水声吸声超材料中，从水域传播的声波依次经过橡胶层 1（厚度 h_{r1}=10 mm）、隔离板 1（厚度 h_{c1}=1 mm）、周期元胞结构（厚度 h_l=28 mm）、隔离板 2（厚度 h_{c2}=1 mm）、橡胶层 2（厚度 h_{r2}=10 mm）以及钢背衬（厚度 h_s=20 mm）。超结构基体材料、钢背衬以及水域、空气等材料参数如表 1 和 2 所示。

表 1　固体材料参数

Tab. 1　Solid material parameters

材料	密度/(kg·m^{-3})	杨氏模量/Pa	泊松比
钢	7890	2.086×10^{11}	0.274
复合材料	1260	5.5×10^{9}	0.380
橡胶	1160	$E(f)$	0.495

注：$E(f) = E_\mathrm{r}(f)\times(1+\mathrm{j}\delta(f))$，其中，$E_\mathrm{r}$ 为储能模量，δ 为损耗因子，f 为频率。

表 2　流体材料参数

Tab. 2　Fluid material parameters

材料	密度/(kg·m^{-3})	声速/(m·s^{-1})
水	1000	1480
空气	1.21	343

由于橡胶材料是动态频变材料，材料特性通过动态力学参数测试仪（TA 公司 Q800）测得，其在参考温度为 15 ℃ 环境条件下的储能模量 E_r 以及损耗因子 δ 如图 4 所示，可以发现，橡胶材料的储能模量和损耗因子均随频率的增大而增大。

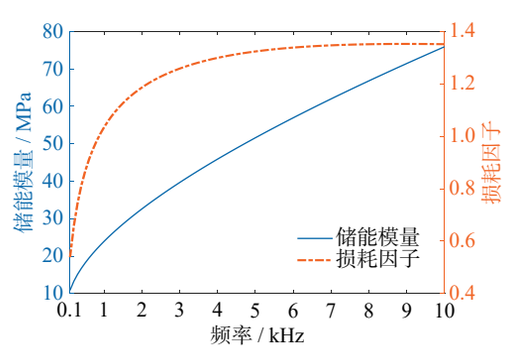


图 4　橡胶材料频变参数曲线

Fig. 4　Frequency-varying parameter curves of rubber material

为了验证水声吸声超材料理论分析的准确性，基于商业有限元软件 COMSOL 仿真计算吸声系数后进行对比分析。开展有限元计算时，其模型如图 5(a) 右侧所示，水域左侧设置完美匹配层吸收反

射声波，上下边界均设置周期边界条件，网格划分基于 COMSOL 自适应物理场控制网格。计算过程中，超结构内部周期元胞等效密度为$\rho_e = 567\ \mathrm{kg/m^3}$，等效弹性常数为：

$$\boldsymbol{C}_e = \begin{bmatrix} 759.56 & -296.26 & 179.58 \\ -296.26 & 397.37 & -117.01 \\ 179.58 & -117.01 & 59.37 \end{bmatrix} \mathrm{MPa} \quad (20)$$

有限元方法计算吸声系数结果与基于式 (19) 的理论方法计算结果如图 5(b) 所示，平均吸声系数相对误差为 0.6%，所建立的理论分析方法与有限元计算结果具有良好的一致性。

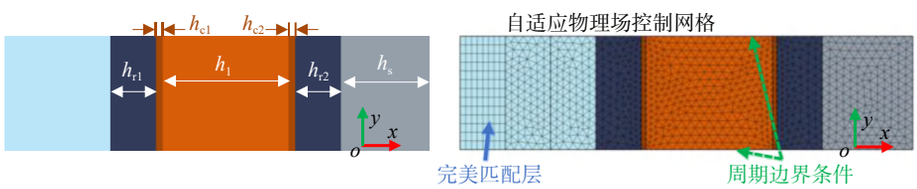
此外，也可以基于理论分析方法计算超材料的波动响应，定义其位移幅值为：

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\Re^2(u_x) + \Re^2(u_y)} \quad (21)$$

式中，$\Re$表示取实部。

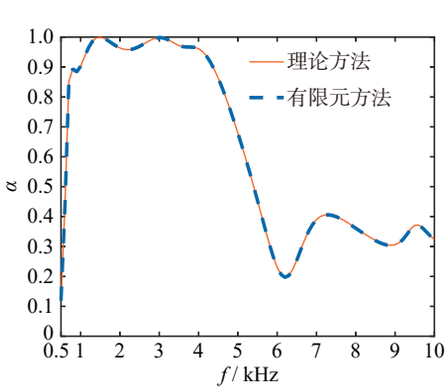
超材料在 3 kHz 和 5 kHz 处位移幅值分布如图 5(c) 所示，位移场如图 5(c) 中插图所示。为了与有限元方法进行对比，在有限元软件中沿着结构下侧边界提取位移幅值，而理论分析方法中则基于式 (7) 和 (21) 进行计算。结果表明，两种计算方法所得到的位移幅值分布同样具有很好的一致性，这些结果共同表明理论计算方法能够有效揭示超材料的波动行为。

计算吸声系数的过程中，理论方法时间仅为 0.017 s，而有限元方法为 15 s，理论方法极大提高了计算效率。因此，理论分析方法具备高效计算性能和准确性。这将为后续开展拓扑优化设计以及耗能机理分析提供良好的理论基础。



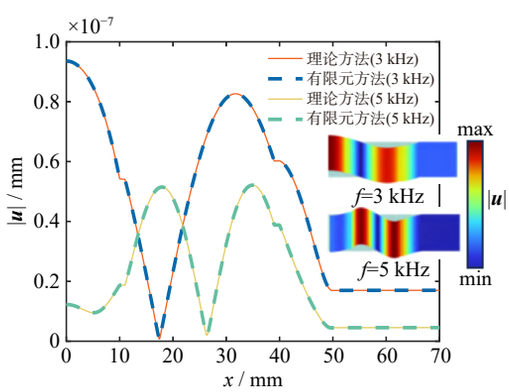
(a) 水声超材料理论模型和有限元模型

(a) Theoretical model and finite element model of hydroacoustic metamaterials



(b) 吸声系数计算结果

(b) Calculation results of sound absorption coefficients



(c) 位移响应计算结果

(c) Calculation results of displacement response

图 5 流固耦合传递方程与有限元方法计算结果对比

Fig. 5 Comparison of calculation results of transfer equations for fluid-structure interaction and finite element method

1.4 周期元胞均质化方法

水声吸声超材料中，超结构由元胞周期阵列形成。本文中所设计的超结构在低频范围表现为非局域模态，即在低频区域，波动行为中支配地位的波长远大于微结构的长度尺寸。因此，基于长波长假设，超结构中波传播受到准静态的平均材料特性控制，可由平均效应表征其行为。

进行周期元胞均质化时，其等效密度为平均密度，而其等效弹性常数则由渐进等效方法获取[32-34]：

$$\rho_e = \frac{1}{|V|}\int_V \rho \mathrm{d}V \quad (22)$$

$$C^{\mathrm{H}}_{ijkl} = \frac{1}{|V|}\int_V C_{pqrs}(\varepsilon^{0(ij)}_{pq} - \varepsilon^{(ij)}_{pq})(\varepsilon^{0(kl)}_{rs} - \varepsilon^{(kl)}_{rs})\mathrm{d}V \quad (23)$$

式中，$|V|$为元胞结构的体积；C_{pqrs}为基体材料弹性常数张量；$\varepsilon^{0(ij)}_{pq}$和$\varepsilon^{0(kl)}_{rs}$为预先指定的单位测试宏观应变场；$\varepsilon^{(ij)}_{pq}$和$\varepsilon^{(kl)}_{rs}$为测试宏观应变场作用下的响应应变场；对于二维结构，i、j、k、l、p、q、r、s的取值为 1 或 2。

基于有限元方法求解超材料内部的响应应变场时，由单位测试宏观应变场引入的载荷向量为：

$$\boldsymbol{f}^{(m)} = \sum_{t=1}^{N}\int_{V_t} \boldsymbol{B}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_t\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}\mathrm{d}V_t \quad (24)$$

式中，$\boldsymbol{B}_t$为第 t 个单元网格应变位移矩阵；$\boldsymbol{C}_t$为第 t 个单元网格基材的弹性矩阵；N为单元网格数量；$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$为单位测试应变向量；$V_t$为第 t 个单元网格结构区域。

对于二维结构，单位测试应变向量分别为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(6)}=(0,0,1)^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

进而，响应应变场$\boldsymbol{\chi}^{(m)}$可以根据下式求解得到：

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\chi}^{(m)}=\boldsymbol{f}^{(m)} \tag{26}$$

式中，$\boldsymbol{K}$为元胞结构的全局刚度矩阵，$\boldsymbol{K}=\sum_{t=1}^{N}\int_{V_t}\boldsymbol{B}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_t\boldsymbol{B}_t\mathrm{d}V_t$。计算式 (26) 时，需要对元胞结构的边界施加周期性边界条件。

因此，式 (23) 可进一步写为有限元形式：

$$C_{m_1m_2}^{\mathrm{H}}=\frac{1}{|V|}\sum_{t=1}^{N}\int_{V_t}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_t\boldsymbol{\chi}_t^{(m_1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_t(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_t\boldsymbol{\chi}_t^{(m_2)})\mathrm{d}V_t \tag{27}$$

式中，$C_{m_1m_2}^{\mathrm{H}}$即为所求等效弹性常数，上标“H”表示均质化等效；$\boldsymbol{I}$为 3×3 的单位向量。

为验证元胞结构通过均匀化方法获取的等效参数是否能够有效表征低频范围内的声波波动行为，可基于商业有限元软件 COMSOL 仿真计算实际物理结构的声学性能，并将仿真结果与基于等效参数的理论计算结果对比。有限元仿真中，元胞结构 UC0 如图 6 中模型所示，其等效参数如表 3 所示。由于元胞结构设置为正交各向异性，C_{16}^{H}和C_{26}^{H}值为 0。元胞结构的晶格常数 a = 7 mm，此时超结构内部 x 方向包含 4 个元胞结构，计算吸声系数如图 6 中曲线所示。其中 1~8 kHz 吻合程度较高，而 8~10 kHz 误差有所增大，这是由于中高频逐渐偏离长波长假设造成的。但是，两种方法的平均吸声系数分别为 0.264 和 0.259，误差为 1.89%。整体上，表现出较好的一致性，能够有效满足分析需求。

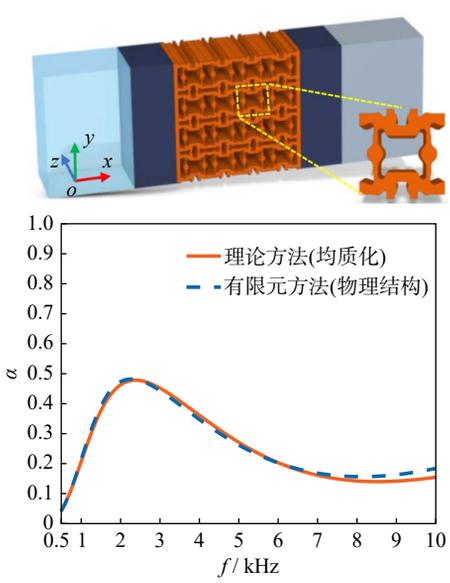


图 6　实际物理结构的 COMSOL 仿真与理论方法计算结果对比

Fig. 6　Comparison of calculation results of COMSOL simulations and theoretical method for actual physical structure

表 3　元胞结构 UC0 等效参数

Tab. 3　Equivalent parameters of unit cell structure UC0

ρ_e/(kg·m^{-3})	C_{11}^{H}/MPa	C_{12}^{H}/MPa	C_{22}^{H}/MPa	C_{66}^{H}/MPa
567	821.3	−347.5	438.1	8.137

进一步，可以通过旋转元胞结构形成更丰富的设计。当各项异性晶格旋转角度 θ 后，基于 Voigt 缩减标记的弹性矩阵$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}$变化为：

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

式中，$\boldsymbol{R}$ 为变换矩阵，可表示为：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix} \tag{29}$$

由于元胞结构的动态特性是由准静态均匀化方法进行评估的，因此，可基于此进一步评估其静态行为，x、y 方向的等效杨氏模量可以表示为：

$$E_x=1/\boldsymbol{S}(1,1),\quad E_y=1/\boldsymbol{S}(2,2),\quad \boldsymbol{S}=(\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}})^{-1} \tag{30}$$

式中，$\boldsymbol{S}$ 为等效柔度矩阵；$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}$为式 (28) 中旋转变换后的弹性矩阵。

通过元胞结构的静态刚度信息，可以粗略估计超结构受载荷时的变形量，从而反映超结构的耐压性能。

2　水声吸声超材料逆向设计方法

基于所提出的水声吸声超材料声学特性理论分析方法，本节将建立拓扑优化框架开展超结构优化。在给定结构等效刚度、体积分数约束条件下，通过拓扑优化求解元胞结构基材的最优分布，从而实现约束条件下的吸声性能最大化。元胞结构通过式 (22) 和 (23) 计算等效参数时，离散为线性 4 节点矩形单元。

2.1　理论设计模型

拓扑优化过程中，超材料的声学性能通过建立的流固耦合传递方程计算。该过程中设计域为元胞结构，将其设置为正方形晶格，开展结构拓扑优化时均匀离散为 N_{d} 个线性单元，第 i 个单元指派设计变量ξ_i($\xi_i\in[\ 0,\ \ 1\ ]$)描述基体材料分布情况。当元胞设置为正交对称时，设计区域将被进一步缩减为元胞的四分之一，则全局设计变量矢量$\overline{\boldsymbol{\xi}}$和缩减设计变量矢量$\boldsymbol{\xi}$之间满足映射关系：

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{\xi} \tag{31}$$

式中，$\boldsymbol{L}$ 为映射矩阵，根据元胞结构的对称关系，$\boldsymbol{L}$ 将缩减设计变量矢量映射到全局设计变量矢量。

为提升优化过程中的数值稳定性，本文对全局设计变量中的第 i 个元素$\overline{\xi}_i$进行密度过滤和 Heaviside

投影[35]：

$$\overline{\overline{\xi}}_i=\frac{\sum_{j\in N_{\mathrm{d}}}H_{i,j}\overline{\xi}_i}{\sum_{j\in N_{\mathrm{d}}}H_{i,j}},\quad H_{i,j}=\max\left(0,r-\left\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j\right\|\right) \tag{32}$$

$$\hat{\xi}_i=\frac{\tanh(\beta\eta)+\tanh(\beta(\overline{\overline{\xi}}_i-\eta))}{\tanh(\beta\eta)+\tanh(\beta(1-\eta))} \tag{33}$$

式中，$\boldsymbol{x}_i$表示第 i 个单元网格的中心位置；$H_{i,j}$表示根据指定的过滤半径 r 决定的权重函数；η 和 β 分别表示投影阈值和投影强度。

通过式 (32) 的密度过滤后获得的中间变量$\overline{\overline{\xi}}_i$通常为灰度单元，即其值在 0~1 之间。为推动设计变量转变为 0 或 1 以形成明确的物理结构，需要通过式 (33) 中的 Heaviside 投影操作进一步将中间变量$\overline{\overline{\xi}}_i$投影为物理变量$\hat{\xi}_i$。

为保证优化过程的稳健性，本文优化过程中使用了鲁棒性公式，即

$$\boldsymbol{\xi}\xrightarrow[\boldsymbol{L}]{\text{式(31)}}\overline{\boldsymbol{\xi}}\xrightarrow[r]{\text{式(32)}}\overline{\overline{\boldsymbol{\xi}}}\xrightarrow[\beta,(\eta_{\mathrm{e}},\eta_{\mathrm{b}},\eta_{\mathrm{d}})]{\text{式(33)}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{e}},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{b}},\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{d}}) \tag{34}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{e}}$、$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{b}}$、$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{d}}$分别表示侵蚀设计、蓝图设计和膨胀设计；$(\eta_{\mathrm{e}},\eta_{\mathrm{b}},\eta_{\mathrm{d}})=(\eta_{\mathrm{b}}+\Delta\eta,\eta_{\mathrm{b}},\eta_{\mathrm{b}}-\Delta\eta)$，$\Delta\eta$为侵蚀设计或者膨胀设计与蓝图设计的投影阈值差值。

侵蚀设计倾向于“消除”小尺寸特征，使结构更保守、材料分布更集中，从而抑制数值不稳定；膨胀设计倾向于“扩展”材料区域，使结构更健壮、对不确定性更不敏感；蓝图设计则介于两者之间，反映优化过程中得到的理论最优拓扑结构形态，因此最终元胞形态结构使用蓝图设计。该过程元胞结构投影示意图如图 7 所示。通过鲁棒性公式，可以提高拓扑优化设计过程中的结构稳定性。

基于各向同性材料罚函数模型，每个网格单元内的杨氏模量 E 和密度 ρ 描述为物理变量$\hat{\xi}_i$的插值函数，即

$$\begin{cases}\rho(\hat{\xi}_i)=\rho_0+\hat{\xi}_i^{p_1}(\rho_1-\rho_0)\\ E(\hat{\xi}_i)=E_0+\hat{\xi}_i^{p_2}(E_1-E_0)\end{cases} \tag{35}$$

式中，ρ_1 和 E_1 分别为基体材料的杨氏模量和密度；$\rho_0=10^{-6}\rho_1$ 和 $E_0=10^{-6}E_1$ 为人工变量参数；p_1 和 p_2 分别为密度和杨氏模量插值函数的惩罚因子。

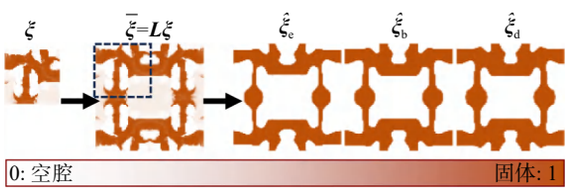


图 7 设计变量投影到物理变量的处理过程

Fig. 7 Projection process of mapping design variables to physical variables

2.2 拓扑优化方法

定义目标频段内的超材料的平均反射系数为 $\overline{R}=\mathrm{mean}(R(f))$，为使得优化结果的吸声系数尽可能大，目标函数设置为最小化平均反射系数。由于鲁棒性公式会使得优化过程中产生三个不同的设计实现。因此，该优化问题的目标函数可转换为关于设计变量 $\boldsymbol{\xi}$ 和旋转角 θ 的最大值最小化问题（min-max），即

$$\min_{\boldsymbol{\xi},\theta}\quad\max(\overline{R}_{\mathrm{e}},\overline{R}_{\mathrm{b}},\overline{R}_{\mathrm{d}}) \tag{36}$$

将该最大值最小化问题转换为约束公式，同时在拓扑优化过程中加入刚度约束和密度约束，可以得到如下的优化公式：

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{\xi},\theta} & \Psi\\ \text{s.t.} & \overline{R}_{\mathrm{e}}-\Psi\leqslant 0,\ \overline{R}_{\mathrm{b}}-\Psi\leqslant 0,\ \overline{R}_{\mathrm{d}}-\Psi\leqslant 0\\ & -E_{x,\hat{\xi}_{\mathrm{b}}}/E_{\mathrm{t}}+1\leqslant 0\\ & -E_{y,\hat{\xi}_{\mathrm{b}}}/E_{\mathrm{t}}+1\leqslant 0\\ & V_{\hat{\xi}_{\mathrm{b}}}/V_{\mathrm{t}}-1\leqslant 0\\ & 0\leqslant\Psi\leqslant 1,\ 0\leqslant\boldsymbol{\xi}\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\end{cases} \tag{37}$$

式中，$E_{x,\hat{\xi}_{\mathrm{b}}}$表示蓝图设计实现的 x 方向等效刚度；$E_{y,\hat{\xi}_{\mathrm{b}}}$表示 y 方向等效刚度；E_{t}为指定的刚度约束阈值，通过结构刚度约束，可以确保实现的结构在静水压下具有小变形量，从而展现出良好的耐压性能；$V_{\hat{\xi}_{\mathrm{b}}}$表示蓝图设计实现的结构体积分数；$V_{\mathrm{t}}$为指定的体积分数上限，通过体积分数约束可确保较小的结构等效密度，实现轻质的超材料。由于反射系数取值范围为 [0 1]，目标值 Ψ 取值范围与其相同。通过该目标值可以有效约束三个不同设计的反射系数值。

2.3 逆向设计过程

为设计具有高刚度以及轻质特性的宽频带吸声超材料，本文开展了结构拓扑优化设计，流程图如图 8 所示。

首先，预设优化参数，元胞结构离散为 N_{d}=100×100 个四边形网格单元。式 (34) 中，r=0.08a，η_{e}=0.55，η_{b}=0.50，η_{d}=0.45；式 (35) 中，惩罚因子 p_1=1，p_2=3.5。约束阈值中，设置 E_{t}=150 MPa，V_{t}=0.55。随后，元胞结构设置为正交各向异性，将设计域基于式 (34) 进行处理为物理变量后，计算目标函数和约束条件以及对应的敏度信息，最后通过移动渐进线法的全局求解器（GCMMA）进行迭代求解[36]。GCMMA 求解中设计变量的变化幅值不超过 0.1，初始投影强度 $\beta=1$，每经过 30 次外部迭代时，投影强度 β 变为原来的 1.587 倍，直到 β 达到 64 时停止优化迭代过程，此时一共经历 300 代。

图 8 中右侧示意图展现了拓扑优化的计算过程，首先基于流固耦合传递矩阵法进行声学性能计算，然后基于拓扑优化算法在刚度、密度约束条件

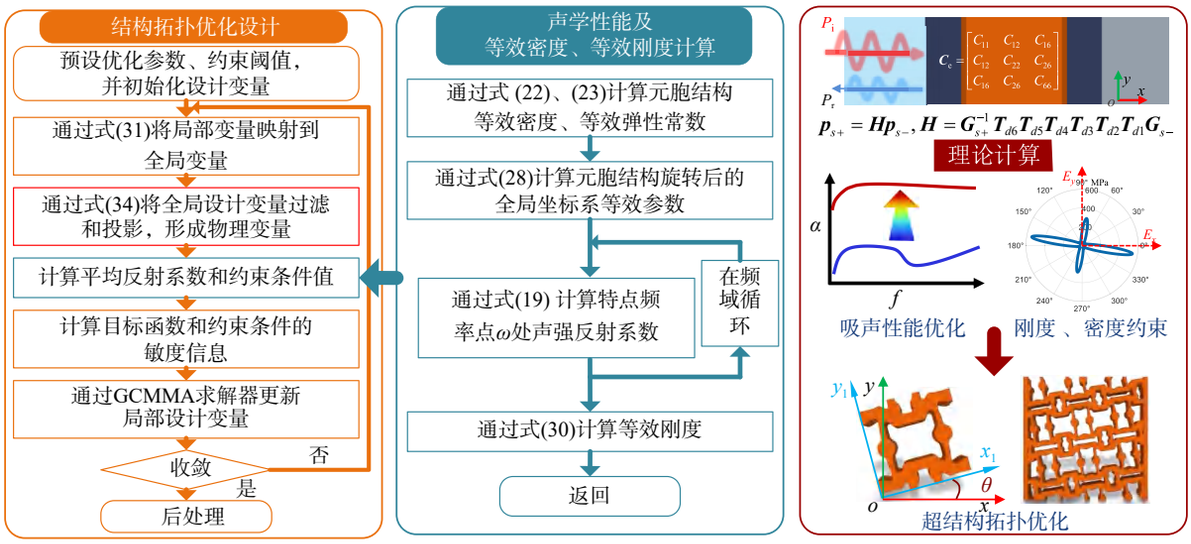


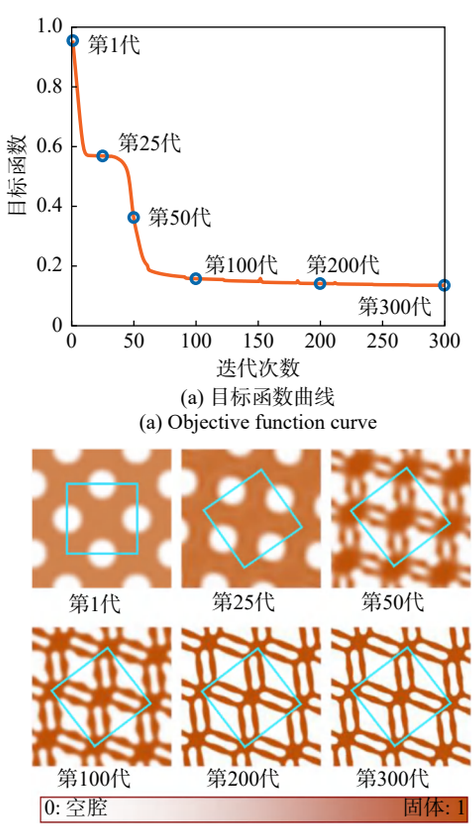
图 8　结构拓扑优化设计流程图

Fig. 8　Flowchart of structural topology optimization design

下开展吸声性能优化，最后获得满足条件的超结构设计。优化过程中使用的基体材料参数以及橡胶层、结构层、钢背衬层厚度与第 1.3 节相同。

图 9 为一次拓扑优化求解过程，其目标频段为 0.5~5 kHz，频率间隔为 0.5 kHz。初始解为四边中心处内嵌半径为 0.2a 的半圆柱形穿孔。

图 9(b) 展现了第 1 代至第 300 代物理变量，其分别对应图 9(a) 中蓝色圆圈处。从求解过程中可以发现，随着迭代的发展，元胞结构逐渐从初始形态转变为具有清晰边界的物理结构，目标函数值也逐渐变小。最终，获得的超材料平均反射系数为 0.136，体积分数为 0.40(对应的超材料等效密度为 798 kg/m^3)，等效刚度 E_x=213 MPa, E_y=674 MPa。这表明，所优化结果具有轻质、高刚度的特点，尽管其密度低于水，但是通过刚度模量粗略估算其在 4 MPa 压力下变形量约为 2%，具备良好的承载性能。



(a) 目标函数曲线
(a) Objective function curve

(b) 物理变量迭代过程
(b) Iterative process of physical variables

图 9　拓扑优化设计迭代过程

Fig. 9　Iterative process of topology optimization design

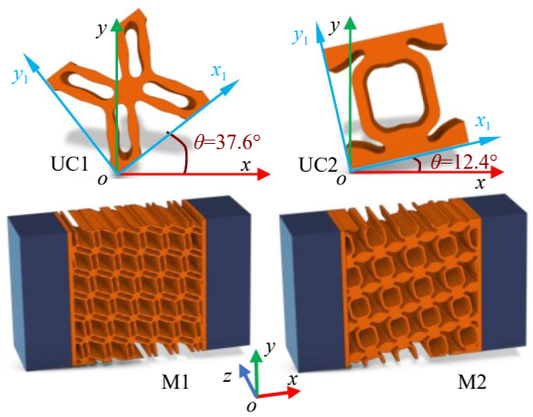
优化过程中，每次迭代时间为 3~5 s。代码全部基于 MATLAB 实现，运行平台为 13th Gen Intel(R) Core(TM) i9-13900H, RAM 32.0 GB。

3　水声吸声超材料设计结果与讨论

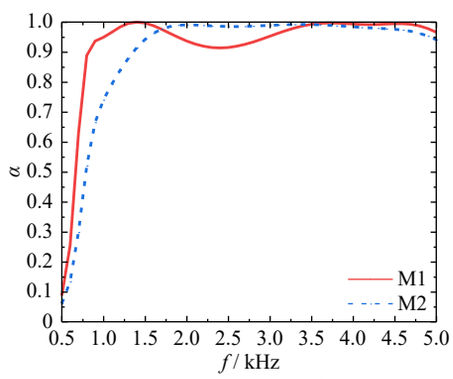
3.1　超材料构型优化结果

设置相同的优化参数，但是给予不同的初始解下，图 10(a) 给出了两种典型的优化结果，其中单元结构 UC1 初始解如图 9(b) 所示，单元结构 UC2 初始解为中心内嵌半径为 0.2a 的圆柱形穿孔。两种单元结构周期阵列以后形成的水声吸声超材料分别为 M1 和 M2，旋转角度分别为 37.6°和 12.4°。单元结构 UC1 和 UC2 在实际结构上具有明显的几何特征差异，其中单元结构 UC1 为八根变截面韧带连接于中心杆处；而 UC2 中心为通孔，两根变截面韧带连接上下侧的平行变截面杆。同时，两种元胞在等效弹性参数上也具有很大的不同，不考虑旋转角时的等效参数如表 4 所示。可以发现，元胞结构 UC1 为正泊松比结构，而元胞结构 UC2 为负泊松比结构。

UC2 优化结果对应的超材料等效密度为 831 kg/m^3，等效刚度分别为 E_x=249.2 MPa 和 E_y=150.0 MPa。因此，超材料 M1 和 M2 均具有低密度、高刚度特点。



(a)不同初始解下的优化结果
(a) Optimization results under different initial solutions



(b)优化结果的吸声系数曲线
(b) Sound absorption coefficient curves of optimization results

图 10 拓扑优化设计得到的结果

Fig. 10 The results obtained from topology optimization design

表 4 元胞结构 UC1 和 UC2 的等效参数

Tab. 4 Equivalent parameters of unit cell structures UC1 and UC2

元胞结构	ρ_e/(kg·m^{-3})	C_{11}^{H}/MPa	C_{12}^{H}/MPa	C_{22}^{H}/MPa	C_{66}^{H}/MPa
UC1	504	485.1	772.0	1374.2	196.7
UC2	566	1289.9	−4.3	270.4	13.4

进一步，计算超材料 M1 和 M2 吸声系数曲线如图 10(b) 所示。超材料 M1 在 1.7 kHz 以下吸声系数优于超材料 M2，但是 1.7~3.5 kHz 吸声系数低于超材料 M2。从 0.5~5 kHz 间隔 100 Hz，分别计算得到超材料 M1 平均吸声系数为 0.924 和超材料 M2 为 0.895，因此超材料 M1 整体吸声性能略优于超材料 M2。

为对比拓扑优化设计超材料的声学性能，将优化结果 M1 与 20 mm 纯橡胶结构（S1）、50 mm 纯橡胶结构（S2）、两层 10 mm 纯橡胶夹芯同密度的圆形空腔结构（S3）进行对比，S1~S3 结构以及吸声系数如图 11 所示。

通过图 11 可以发现，超材料 M1 展现了优异的声学性能，对于 20 mm 厚的橡胶层 S1，M1 平均吸声系数是其 2.2 倍；对于橡胶层厚度为 50 mm 的 S2，M1 平均吸声系数是其 1.3 倍；对于夹芯圆形空腔结构的 S3，M1 平均吸声系数是其 2.1 倍。通过拓扑优化设计，在保证低密度（吸声超材料等效密度小于水）、高刚度（大于 150 MPa）的前提下，实现了高效的吸声效果，有效体现了拓扑优化设计的优越性。

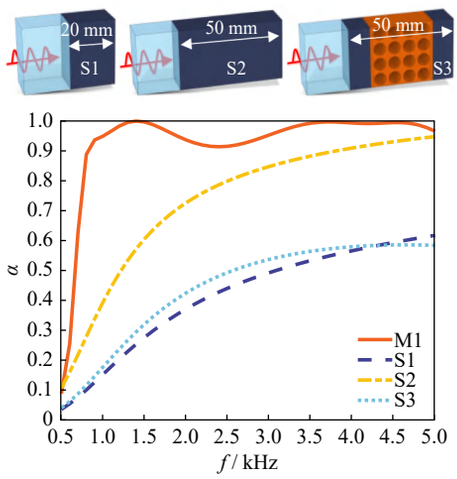


图 11 水声吸声超材料 M1 声学性能与材料 S1、S2、S3 的对比

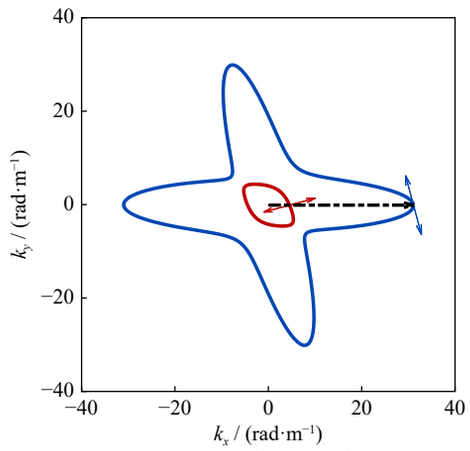
Fig. 11 Comparison of acoustic performance between hydroacoustic absorption metamaterial M1 and materials S1, S2, S3

3.2 吸声机理分析

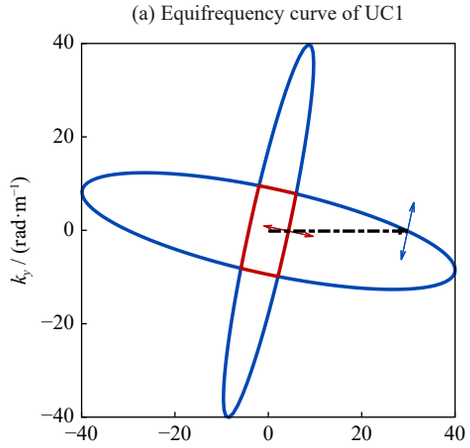
为深入揭示优化结构的吸声机理，首先分析其动态特性。分析时 UC1 的旋转角为 37.6°，UC2 的旋转角为 12.4°。通过式 (3) 和 (4) 可计算得到两种元胞 1 kHz 处的等频曲线如图 12 所示，其中，黑色虚线为波矢方向，红色封闭实线为快波等频面，红色箭头为快波沿 x 方向传播时的极化方向，蓝色封闭实线为慢波等频面，蓝色箭头为慢波沿 x 方向传播时的极化方向。可以发现，快波和慢波极化方向不是完全平行或者垂直于波传播方向，而是存在一定的极化角，因此两者也可以分别称之为准纵波和准横波。对于 UC1，慢波波数为 31.1 rad/m，极化角为 74.9°；快波波数为 4.5 rad/m，极化角为 15.1°。对于 UC2，慢波波数为 29.8 rad/m，极化角为 77.7°；快波波数为 4.3 rad/m，极化角为 12.3°。可以发现，两种元胞的最优旋转角下，沿 x 方向传播时（k_y=0）展现出相近的波数和极化角，这为两种元胞实现相似的声学性能提供了波动调控基础。

各向异性介质中准纵波和准横波在波模调控上具有重要的意义。为推导超结构引起的橡胶层内纵波横波转换，设置如图 13 所示的结构模型，其中两侧的橡胶层为半无限大，不存在回波，等价于在橡胶的一端设置完美匹配层，根据式 (13)，界面 R1、R2 处的位移响应存在如下关系：

$$\begin{pmatrix} A_{\mathrm{L,t2}} \\ 0 \\ A_{\mathrm{T,t2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{t0}} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_{\mathrm{L,r1}} \\ 0 \\ A_{\mathrm{T,r1}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{t0}} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{r}}^{-1}\boldsymbol{T}_{d4}\boldsymbol{T}_{d3}\boldsymbol{T}_{d2}\boldsymbol{L}_{\mathrm{r}} \tag{38}$$



(a) UC1的等频曲线
(a) Equifrequency curve of UC1



(b) UC2的等频曲线
(b) Equifrequency curve of UC2

图 12　等频曲线和快波、慢波极化方向

Fig. 12　Equifrequency curves and polarization directions of fast waves and slow waves

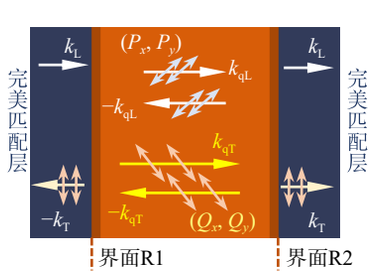


图 13　超材料波调控分析模型

Fig. 13　Analysis model of metamaterial wave control

式中, $A_{\mathrm{L,r1}}$ 表示左侧橡胶层(第 1 层橡胶)的反射纵波, 其中, 下标“L”表示纵波, “r”表示反射, “1”表示第一层橡胶, 左侧橡胶给恒定幅值为 A_0 的纵波激励。类似地, $A_{\mathrm{T,r1}}$ 表示左侧橡胶层的反射横波, $A_{\mathrm{L,t2}}$ 表示右侧橡胶层(第 2 层橡胶)的透射纵波, $A_{\mathrm{T,t2}}$ 表示右侧橡胶层的透射横波。$\boldsymbol{S}_{\mathrm{t0}}$ 表示散射矩阵; $\boldsymbol{L}_{\mathrm{r}}$ 表示橡胶层的 $\boldsymbol{L}$ 矩阵; $\boldsymbol{T}_{d2}$~$\boldsymbol{T}_{d4}$ 分别为左侧隔离板、超结构、右侧隔离板的 $\boldsymbol{T}$ 矩阵。

定义纵波、横波的反射系数、透射系数为对应弹性波幅值与入射纵波幅值的比值, 即

$$R_{\mathrm{L}} = |A_{\mathrm{L,r1}}|/A_0,\quad R_{\mathrm{T}} = |A_{\mathrm{T,r1}}|/A_0,$$
$$T_{\mathrm{L}} = |A_{\mathrm{L,t2}}|/A_0,\quad T_{\mathrm{T}} = |A_{\mathrm{T,t2}}|/A_0 \tag{39}$$

在元胞结构 UC1 对应的分析模型中, 基于式 (39) 计算不同波模位移反射系数和透射系数分别如图 14(a) 和 (b) 所示。可以发现, 尽管激励为纵波, 但是通过超结构的波动调控作用, 在两侧的橡胶层中均形成了强烈的横波响应。其中, 左侧橡胶层(橡胶层 1)的反射横波幅值始终大于反射纵波, 右侧橡胶层(橡胶层 2)的透射横波幅值在 0.78~5 kHz 之间, 大于纵波。因此, 在元胞结构 UC1 的调控下, 橡胶层内出现了高效的纵波-横波的转换。需要强调的是, 橡胶层中的弹性系数曲线仅为不同类型波的幅值对比, 并不是能量角度比较, 因此其值存在大于 1 的情形。

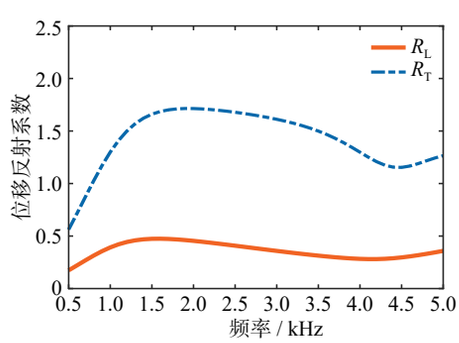
由于横波相速度小, 在橡胶材料中, 横波耗能远大于纵波。通过耗能计算可以定量分析这一特点, 橡胶耗能由单位体积的瞬时应变能功率密度表示, 即应力与应变率的点积:

$$\widehat{I}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \tag{40}$$

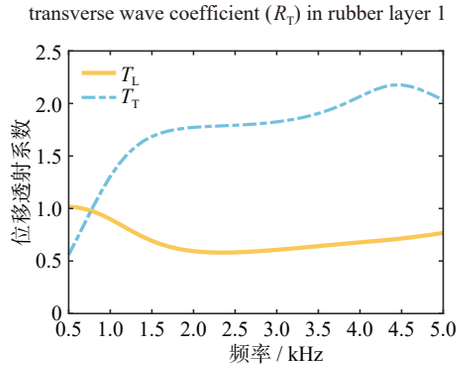
式中, $\boldsymbol{\sigma}(t)$为应力张量; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$为应变张量关于时间的微分。

简谐波激励条件下, 平均功率密度为应变能功率在时间周期 T 内的平均值:

$$I = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi/\omega} \boldsymbol{\sigma}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Re(\boldsymbol{\sigma}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+}(t)) \tag{41}$$



(a) 橡胶层1中的反射纵波(R_{L})和反射横波(R_{T})系数
(a) Reflected longitudinal wave coefficient (R_{L}) and reflected transverse wave coefficient (R_{T}) in rubber layer 1



(b) 橡胶层2中的透射纵波(T_{L})和透射横波(T_{T})系数
(b) Transmitted longitudinal wave coefficient (T_{L}) and transmitted transverse wave coefficient (T_{T}) in rubber layer 2

图 14　元胞结构 UC1 调控下橡胶层内的弹性波系数曲线

Fig. 14　Elastic wave coefficient curves within the rubber layers under the regulation of unit cell structure UC1

式中，上标“†”表示复共轭。

橡胶材料复弹性张量为：

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}(1+\mathrm{j}\delta) \tag{42}$$

式中，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}$为橡胶材料弹性张量实部。

进而，可以将式 (41) 化解为如下形式：

$$I=\frac{\omega}{2}\delta\Re(\boldsymbol{\varepsilon}(t):\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\dagger}(t)) \tag{43}$$

纵波的正应变ε和工程剪切应变γ为：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathrm{L},xx}&=-\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}P_xA_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}x}+\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}P_xA_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}x},\\ \gamma_{\mathrm{L},xy}&=-\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}P_yA_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}x}+\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}P_yA_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{\mathrm{qL}}x}\end{aligned} \tag{44}$$

式中，A_1和A_2为式 (7) 中纵波的幅值。

纵波的正应力和剪切应力为：

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{L},xx}&=\widetilde{C}_{\mathrm{r}(11)}\varepsilon_{\mathrm{L},xx}+\widetilde{C}_{\mathrm{r}(16)}\gamma_{\mathrm{L},xy},\\ \sigma_{\mathrm{L},xy}&=\widetilde{C}_{\mathrm{r}(16)}\varepsilon_{\mathrm{L},xx}+\widetilde{C}_{\mathrm{r}(66)}\gamma_{\mathrm{L},xy}\end{aligned} \tag{45}$$

同理可计算横波应力和应变。由于橡胶材料为各向同性，$\widetilde{C}_{\mathrm{r}(16)}=0$，并且在纵波中$P_y=0$和横波中$Q_x=0$，因此$\gamma_{\mathrm{L},xy}=0$，$\sigma_{\mathrm{L},xy}=0$，$\varepsilon_{\mathrm{T},xx}=0$，$\sigma_{\mathrm{T},xx}=0$。式(43)可展开为：

$$I=\frac{\omega}{2}\delta(C_{\mathrm{r}(11)}\varepsilon_{\mathrm{L},xx}\varepsilon^{\dagger}_{\mathrm{L},xx}+C_{\mathrm{r}(66)}\gamma_{\mathrm{T},xy}\gamma^{\dagger}_{\mathrm{T},xy}) \tag{46}$$

其中，等式右侧第一项为纵波耗能I_{L}，第二项为横波耗能I_{T}。

定义橡胶层耗能系数为橡胶层厚度方向总耗能与输入能量的比值：

$$Q=\frac{\int I(x)\mathrm{d}x}{p_{\mathrm{i}}^2/(2Z_{\mathrm{w}})} \tag{47}$$

针对超材料 M1，分别计算两个橡胶层的耗能系数$Q_{\mathrm{L,r1}}$、$Q_{\mathrm{L,r2}}$、$Q_{\mathrm{T,r1}}$、$Q_{\mathrm{T,r2}}$（其中，下标“L”表示纵波，“T”表示横波，“r1”表示第一层橡胶层，“r2”表示第二层橡胶层），如图 15 所示。两层橡胶总耗能为$Q_{\mathrm{total}}=Q_{\mathrm{L,r1}}+Q_{\mathrm{L,r2}}+Q_{\mathrm{T,r1}}+Q_{\mathrm{T,r2}}$。从中可以发现，耗能以横波损耗为主，两个橡胶层横波耗能之和占整体耗能的 75%。其中，第 2 层橡胶在 0.5~3.2 kHz 处的横波耗能极大地提升了超材料整体的吸声性能，对于实现高效的低频声波吸收发挥了关键的作用。而第 1 层橡胶在 3.2~4.3 kHz 处出现耗能峰，此时为第 2 层橡胶耗能谷值，第 1 层橡胶为维持稳定高效的声学性能发挥了作用。纵波耗能系数整体在 0.1 以下，表明纵波在橡胶内的声学损耗较少，尽管其随频率的增大不断提升，但是占比始终不大。

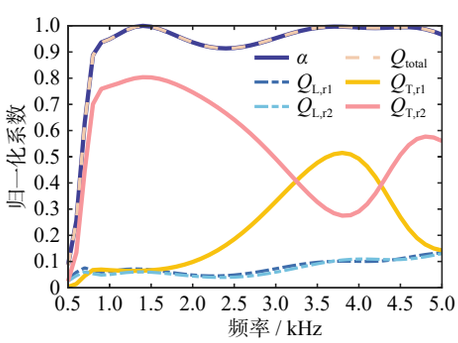


图 15 超材料 M1 中两个橡胶层内的耗能曲线

Fig. 15 Energy dissipation curves in the two rubber layers of metamaterial M1

针对超材料 M2，同样计算橡胶层的耗能系数如图 16 所示。可以看到，其展现出类似于超材料 M1 的变化趋势：低频段耗能以第 2 层橡胶横波效应为主，第 1 层橡胶横波波动导致的能量损耗在 3.2~4.5 kHz 处贡献较大。纵波耗能均小于 0.2，随频率增大而略有所提升。

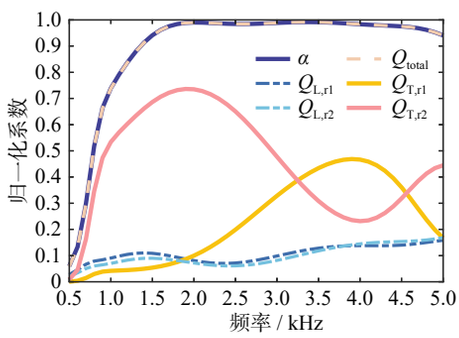
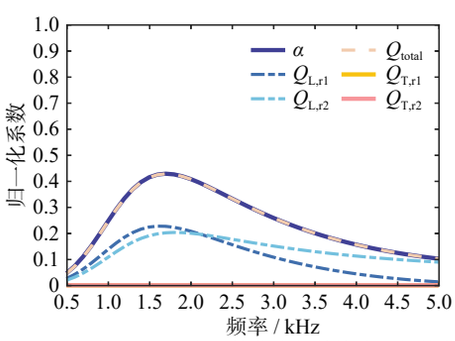


图 16 超材料 M2 中两个橡胶层内的耗能曲线

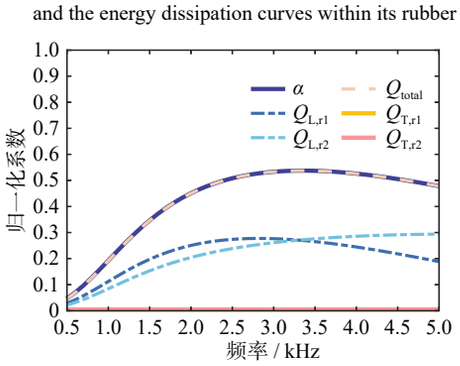
Fig. 16 Energy dissipation curves in the two rubber layers of metamaterial M2

作为对比，取元胞 UC1 和 UC2 旋转角度为 0°，对应超材料为 M3、M4，分别给出其声学性能如图 17



(a) 超材料M3的吸声系数曲线与其橡胶层耗能曲线

(a) Sound absorption coefficient curve of metamaterial M3 and the energy dissipation curves within its rubber layers



(b) 超材料M4的吸声系数曲线与其橡胶层耗能曲线

(b) Sound absorption coefficient curve of metamaterial M4 and the energy dissipation curves within its rubber layers

图 17 超材料 M3、M4 的吸声系数曲线与耗能曲线

Fig. 17 Sound absorption coefficient curve and energy dissipation curves of metamaterials M3 and M4

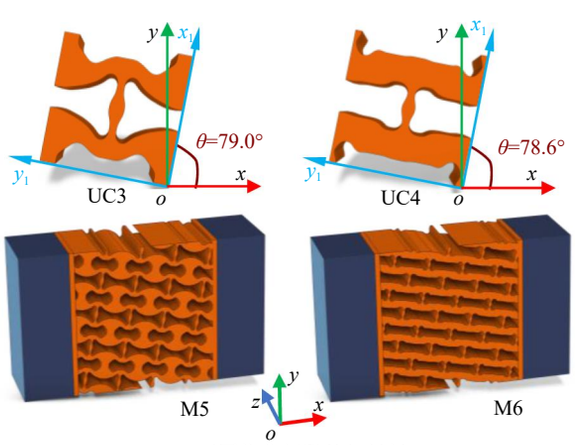
所示。此时, 通过式 (5) 可以分别计算得到两种元胞的纵波极化角均为 0°, 表明其受到纵波激励时将不会产生 y 方向的质点偏振, 也就不可能在反射或者透射的各向同性介质中形成横波。因此, 此时的超材料吸声全是纵波损耗贡献的, 而横波损耗为 0。超材料 M3 在 1.7 kHz 处形成吸声峰, 而超材料 M4 在 3.3 kHz 处形成吸声峰, 均是由于超材料整体驻波共振而产生的大幅纵波损耗。

综上所示, 优化超材料的吸声机理主要依赖于各向异性结构对弹性波传播模式的调控。由于各项异性介质中波传播时存在一定的极化角, 当橡胶内的纵波传播到各向异性超结构后, 被操控形成反射横波和透射横波, 这些横波在能量耗散上发挥了关键作用, 是大幅提升橡胶内耗能的主要途径。

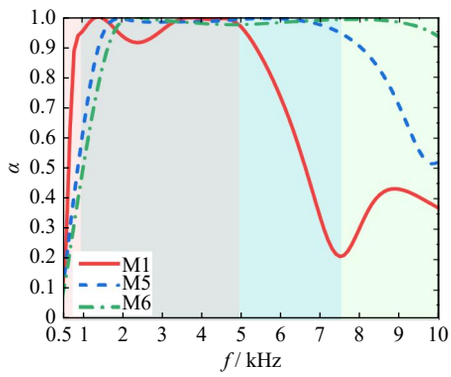
3.3　不同频段优化分析

通过拓扑优化框架可以进一步设计满足不同需求的结构设计, 实现面向实际工程应用的快速设计响应。在 3.1 节中, 优化频段集中在低频, 本节进一步拓展吸声带宽, 分别以 1~7.5 kHz 和 1~10 kHz 频段为优化目标, 设置优化频率间隔为 0.5 kHz, 开展宽频带吸声超材料优化设计。并且, 在优化设计的过程中, 将橡胶层厚度、超结构层厚度均设置为变量, 进一步扩展优化设计的空间, 但是保持设计的总厚度 50 mm 不变。其余优化设置则保持不变。

优化结果如图 18(a) 所示, 对应元胞结构的等效参数如表 5 所示。对于超材料 M5, 优化所得的橡胶层 1 厚度 h_{r1}=14.6 mm、晶格结构厚度 h_l=18.4 mm、橡胶层 2 厚度 h_{r2}=15.0 mm。元胞结构旋转角度为 79.0°, 此时等效刚度分别为 E_x=266.1 MPa 和 E_y=150.0 MPa。对于超材料 M6, 优化所得的橡胶层 1 厚度 h_{r1}=14.4 mm、晶格结构厚度 h_l=18.6 mm、橡胶层 2 厚度 h_{r2}=15.0 mm。元胞结构旋转角度为 78.6°, 此时等效刚度分别为 E_x= 349.7 MPa 和 E_y= 150.0 MPa。通过优化设计的超材料均满足低密度、高刚度需求。



(a) 不同优化频段的超材料
(a) Optimized metamaterials under different frequency ranges



(b) 优化结果的吸声系数曲线
(b) Sound absorption coefficient curves of optimization results

图 18　不同频段超材料拓扑优化结果

Fig. 18　Topology optimization results of metamaterials under different frequency regimes

表 5　元胞结构 UC3 和 UC4 的等效参数

Tab. 5　Equivalent parameters of unit cell structures UC3 and UC4

元胞结构	ρ_e/(kg·m^{-3})	C_{11}^H/MPa	C_{12}^H/MPa	C_{22}^H/MPa	C_{66}^H/MPa
UC3	649	238.9	−195.3	1495.4	11.5
UC4	566	223.9	−96.1	2460.2	15.3

超材料 M5 和 M6 的吸声系数如图 18(b) 所示, 图中红、蓝、绿底色表示优化的目标频段, 所有超材料在所优化的频率区间均实现优异的声学的性能。对比超材料 M1 吸声系数可以看出, 为实现宽带的声学性能, 超材料 M5 和 M6 在小于 2 kHz 频率的低频范围声学性能有所下降, 但是在大于 5 kHz 的中高频声学性能提升明显。在 0.5~10 kHz 频段, 以 0.1 kHz 频率为间隔, 超材料 M1 平均吸声系数为 0.70, 超材料 M5 和 M6 分别为 0.87 和 0.92, 表明通过设置不同的优化频带, 有效实现了宽带高效吸声效果。

4　结　论

为实现水声吸声超材料的“低密度、高刚度、高效吸声”多目标性能协同优化, 突破传统方法在构型设计中对人工经验的依赖以及广泛试错的局限, 本文首先建立了流固耦合传递方程, 以高效精准地计算超材料的声学响应特性; 在此基础上建立拓扑优化理论框架, 用于快速按需实现水声吸声超材料结构的构型设计。得出如下结论:

(1) 采用均质化等效方法获取周期微结构等效参数后, 将其代入建立的流固耦合传递方程, 可精准预报超材料的动态响应特性, 快速计算其声学性能, 为超材料分析提供了可靠的理论方法。

(2) 基于拓扑优化框架开展“结构-功能”一体化设计, 可实现满足不同需求约束的微结构设计, 达成

低密度(整体等效密度小于 1000 kg/m^3)、高刚度(大于 150 MPa)、高效吸声的目标(目标频段平均吸声系数可大于 0.9)。优化所得超材料吸声性能分别为 20 mm 和 50 mm 厚度橡胶材料的 2.2 倍和 1.3 倍。相较于未优化的夹芯圆形空腔结构,声学性能是其 2.1 倍。优化框架解决了传统材料中“轻量化与耐压性”和“吸声效率与结构稳定性”难以兼顾的需求矛盾,为水下超材料设计提供了可行方案。即便针对不同目标频段范围,优化框架也可快速按需实现超材料的微结构设计,有效加速超材料的设计过程。

(3)吸声机理分析表明,所设计超材料的吸声性能取决于橡胶对横波的高效耗散作用,而横波源于微结构对入射纵波的精准调控。该声能耗散机理可为其他类型的超材料的设计提供技术借鉴。

参考文献:

[1] 李澔翔，梁彬，程建春. 声人工结构的声场调控研究进展[J]. 中国科学：物理学 力学 天文学，2022，52(4)：6-33.
LI Haoxiang，LIANG Bin，CHENG Jianchun. Recent advances in the artificial structure-based manipulation of the acoustic field[J]. Scientia Sinica：Physica，Mechanica & Astronomica，2022，52(4)：6-33.

[2] 尹剑飞，蔡力，方鑫，等. 力学超材料研究进展与减振降噪应用 [J]. 力学进展，2022，52(3)：508-586.
YIN Jianfei，CAI Li，FANG Xin，et al. Review on research progress of mechanical metamaterials and their applications in vibration and noise control[J]. Advances in Mechanics，2022，52(3)：508-586.

[3] 曹暾，刘宽，李阳，等. 可调谐光学超构材料及其应用 [J]. 中国光学，2021，14(4)：968-985.
CAO Tun，LIU Kuan，LI Yang，et al. Tunable optical metamaterials and their applications[J]. Chinese Optics，2021，14(4)：968-985.

[4] SMITH D R，PENDRY J B，WILTSHIRE M C K. Metamaterials and negative refractive index[J]. Science，2004，305(5685)：788-792.

[5] CHEN Y，ZHENG M Y，LIU X N，et al. Broadband solid cloak for underwater acoustics[J]. Physical Review B，2017，95(18)：180104.

[6] WEI Y，HU G K. Wave characteristics of extremal elastic materials[J]. Extreme Mechanics Letters，2022，55：101789.

[7] HU Z，WEI Z B，WANG K，et al. Engineering zero modes in transformable mechanical metamaterials[J]. Nature Communications，2023，14(1)：1266.

[8] LEE J，KWEUN M J，LEE W，et al. Perfect circular polarization of elastic waves in solid media[J]. Nature Communications，2024，15(1)：992.

[9] LEE J，KWEUN M J，LEE W，et al. Perfect transmission of elastic waves obliquely incident at solid-solid interfaces[J]. Extreme Mechanics Letters，2022，51：101606.

[10] KWEUN J M，LEE H J，OH J H，et al. Transmodal fabry-Pérot resonance：theory and realization with elastic metamaterials[J]. Physical Review Letters，2017，118(20)：205901.

[11] FU Y F，KABIR I I，YEOH G H，et al. A review on polymer-based materials for underwater sound absorption[J]. Polymer Testing，2021，96：107115.

[12] 王育人，缪旭弘，姜恒，等. 水下吸声机理与吸声材料 [J]. 力学进展，2017，47：92-121.
WANG Yuren，MIAO Xuhong，JIANG Heng，et al. Review on underwater sound absorption materials and mechanisms[J]. Advances in Mechanics，2017，47：92-121.

[13] LANE R. Absorption mechanisms for waterborne sound in Alberich anechoic layers[J]. Ultrasonics，1981，19(1)：28-30.

[14] FANG X S，YIN X W，WU J，et al. Underwater metagratings for sub-kilohertz low frequency and broadband sound absorption[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2023，260：108630.

[15] WANG S B，HU B，DU Y M. Sound absorption of periodically cavities with gradient changes of radii and distances between cavities in a soft elastic medium[J]. Applied Acoustics，2020，170：107501.

[16] IVANSSON S M. Numerical design of Alberich anechoic coatings with superellipsoidal cavities of mixed sizes[J]. The Journal of the Acoustical Society of America，2008，124(4)：1974-1984.

[17] HINDERS M K，RHODES B A，FANG T M. Particle-loaded composites for acoustic anechoic coatings[J]. Journal of Sound and Vibration，1995，185(2)：219-246.

[18] 马黎黎，王仁乾. 基材含微粒的空腔结构吸声器吸声性能预报的研究 [J]. 声学技术，2006，25(3)：175-181.
MA Lili，WANG Renqian. Absorption capability of absorbers with cavity and made of material containing particles[J]. Technical Acoustics，2006，25(3)：175-181.

[19] ZOU H，SU L L，ZHANG Y M，et al. A novel broadband underwater sound absorption metastructure with multi-oscillators[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2024，271：109137.

[20] ZHANG Y N，TONG M L，RUI X T，et al. Ultrathin and pressure-resistant meta-coating with embedded tree-shaped acoustic black hole for broadband low-frequency underwater sound absorption[J]. Applied Acoustics，2024，225：110171.

[21] ZHAO H G，WEN J H，YU D L，et al. Low-frequency acoustic absorption of localized resonances：experiment and theory[J]. Journal of Applied Physics，2010，107(2)：023519.

[22] WEN J H，ZHAO H G，LYU L M，et al. Effects of locally resonant modes on underwater sound absorption in viscoelas-

tic materials[J]. The Journal of the Acoustical Society of America，2011，130(3)：1201-1208.

[23] GU Y H，ZHONG H B，BAO B，et al. Experimental investigation of underwater locally multi-resonant metamaterials under high hydrostatic pressure for low frequency sound absorption[J]. Applied Acoustics，2021，172：107605.

[24] LIU B T，HUANG S B，ZHENG B，et al. Tunable composite lattice structure for low-frequency and ultra-broadband underwater sound absorption[J]. The Journal of the Acoustical Society of America，2023，153(1)：415-422.

[25] SHI K K，JIN G Y，YE T G，et al. Underwater sound absorption characteristics of metamaterials with steel plate backing[J]. Applied Acoustics，2019，153：147-156.

[26] ZHENG Z F，YANG H B，WANG M G，et al. Realization of lightweight and pressure-resistant sandwich metasurfaces for underwater sound absorption through topology optimization[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2025，224：112205.

[27] DONG H W，ZHAO S D，XIANG P，et al. Porous-solid metaconverters for broadband underwater sound absorption and insulation[J]. Physical Review Applied，2023，19(4)：044074.

[28] DONG H W，ZHAO S D，OUDICH M，et al. Reflective metasurfaces with multiple elastic mode conversions for broadband underwater sound absorption[J]. Physical Review Applied，2022，17(4)：044013.

[29] YANG H B，ZHAO H G，WEN J H. Theory and numerical method for the effects of hydrostatic pressure on sound absorption of underwater acoustic coatings with air cavities[J]. Journal of Sound and Vibration，2022，533：116985.

[30] ZHANG Y N，CHENG L. Ultra-thin and broadband low-frequency underwater acoustic meta-absorber[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2021，210：106732.

[31] YANG H B，ZHAO H G，YIN J F，et al. Hybrid metastructure for broadband waterborne sound absorption[J]. AIP Advances，2019，9(12)：125226.

[32] ANDREASSEN E，ANDREASEN C S. How to determine composite material properties using numerical homogenization[J]. Computational Materials Science，2014，83：488-495.

[33] HASSANI B，HINTON E. A review of homogenization and topology optimization I：homogenization theory for media with periodic structure[J]. Computers & Structures，1998，69(6)：707-717.

[34] XIA L，BREITKOPF P. Design of materials using topology optimization and energy-based homogenization approach in MATLAB[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization，2015，52(6)：1229-1241.

[35] WANG F W，LAZAROV B S，SIGMUND O. On projection methods，convergence and robust formulations in topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization，2011，43(6)：767-784.

[36] SVANBERG K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations[J]. SIAM Journal on Optimization，2002，12(2)：555-573.

第一作者：郑周甫(1994—)，男，博士研究生。
E-mail：zhengzhoufu@sina.com

通信作者：杨海滨(1986—)，男，博士，副研究员。
E-mail：haibinyangsn@sina.com

面向大型结构振动抑制的小型轻质低功耗压电半主动实时控制系统

何军峰，袁 权，吴义鹏，季宏丽，裘进浩

（南京航空航天大学航空航天结构力学及控制全国重点实验室，江苏 南京 210016）

摘要：基于压电纤维复合材料（macro fiber composite, MFC）的大型挠性结构半主动控制系统一般存在压电材料集成度低、振动收敛慢、功耗大等问题，难以满足结构振动抑制的实际需求。为此，本文提出一种基于能量注入同步开关阻尼的自适应注能算法及实时控制系统。该系统通过 STM32 微控制器实时感知传感 MFC 电压变化，在开关信号翻转前自动调节注能时间，并将能量非线性高效注入到驱动 MFC 中，具备轻质、低功耗、小型化等特征，最终提升了控制能效。该系统已在大展弦比无人机平台上进行了试验验证：在自由衰减对比试验中，该实时控制系统实现了机翼振动在 10 s 内的完全抑制，收敛时间提升了 200%；在襟翼分别用 10°和 15°摆动角度起振的情况下，对单侧机翼施加控制，振幅衰减率分别达到 59.0% 和 30.6%。

关键词：振动抑制；同步开关阻尼；大型挠性结构；压电纤维复合材料；STM32 微控制器

中图分类号：TB535 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508048

Compact and low-power piezoelectric semi-active real-time control system for vibration suppression in large-scale structures

HE Junfeng, YUAN Quan, WU Yipeng, JI Hongli, QIU Jinhao

（State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China）

Abstract: Semi-active control systems for large flexible structures based on macro fiber composite (MFC) generally suffer from low integration of piezoelectric materials，slow vibration convergence，and high power consumption，which limit their applicability in practical structural vibration suppression. To address these limitations，this paper proposes an adaptive energy injection algorithm based on synchronized switch damping (SSD)，together with its real-time control system. The system employs an STM32 microcontroller to sense the voltage variation of the sensing MFC in real time，automatically adjust the energy injection timing before the switching signal reverses，and nonlinearly and efficiently inject energy into the driving MFC. With features of lightweight construction，low power consumption，and compact design，the proposed system significantly improves control efficiency. Experimental validation was carried out on a high-aspect-ratio UAV platform. In the free decay comparison test，the real-time control system completely suppressed wing vibration within 10 seconds，achieving a 200% improvement in convergence rate. Moreover，when the flap was excited at deflection angles of 10° and 15°，single-wing control achieved amplitude attenuation rates of 59.0% and 30.6%，respectively.

Keywords: vibration suppression; synchronized switch damping; large flexible structure; macro fiber composite; STM32 microcontroller

随着中国航空航天事业的快速发展，设备大型化与轻质化已成为重要的发展趋势，针对大型轻质挠性结构的振动抑制也已成为制约大型空间结构性能提升的关键技术之一[1-2]。在复杂载荷耦合作用下，当结构振动幅度超过一定阈值时，容易引发关键部件的疲劳损伤。在高分辨率遥感探测、卫星精密载荷运行、电力电网系统等高精度应用场景中，结构振动的影响更是不容忽视[3-5]。因此，如何实现有效的振动抑振，成为当前学术界和工程界关注的研究重点。

压电材料依托其正、逆压电效应，能够实现机械能与电能之间的双向转换[6]，其结构集成性强、工作频带宽等优势，使其在振动抑制与能量采集等领域具有广阔的应用前景[7-8]，例如，LI 等[9] 设计了线性二

收稿日期：2025-08-14；**修订日期：**2025-09-01

基金项目：国家自然科学基金资助项目 (U2436204, 52241103, 52572410)；中央高校基本科研业务费专项资金项目 (NE2024002, NP2024112)

次最优控制器（linear quadratic regulator, LQR），利用压电纤维复合材料（marco fiber composite, MFC）作为执行器，在柔性梁上实现了良好的振动抑制效果。ZOU 等[10]构建了基于压电叠堆的智能多向隔振平台，采用弹性结构施加预应力，并通过优化控制增益，使平台在 0~3000 Hz 范围内实现多方向有效隔振。BENDINE 等[11]通过在 3D 打印的航空发动机叶片模型中集成 MFC，并结合 PID 控制器，实现了对发动机叶片振动的显著抑制。

基于压电材料的半主动控制方法最早由 RICHARD 等[12]提出，其核心为同步开关阻尼（synchronized switch damping, SSD）电路，通过在位移达到极值时切换电路状态，使压电元件电压反向，产生与结构位移方向相反的抑制力以抑制振动。随后，学者们又提出多种增强型电路形式，如串联电感的 SSDI（SSD based on inductor）电路[13]，在 SSDI 回路中串联电压源的 SSDV（SSD based on voltage）电路[14]以及为了解决控制力与激励力相匹配问题，用自适应的可调电压源代替恒定电压源的 $SSDV_{enh}$ 电路[15]，这些电路利用 LC 振荡以及外加电压源提升了压电材料的开路电压以达到最优控制效果。为了解决电路品质因子较低的问题，JI 等[16]提出了基于负电容的 SSDNC(SSD based on negative capacitor) 电路。

为进一步覆盖压电材料非对称的工作电压区间，JI 等[17-18]提出了一种附加旁路电容的非对称同步开关阻尼电路。张锦[19]在此基础上设计了非对称高压同步开关阻尼电路，但其高压源复杂、能效偏低。于是，基于 WU 等[20-21]提出的优化型同步+电荷提取（optimized synchronous electric charge extraction, OSECE）电路，刘轩等[22]设计了一种能量注入型 SSD（SSD based on energy injection, SSDEI）电路，采用反激式变压器向回路注能，具有结构简单、抗干扰能力强、能效高等优势。然而，这些电路均未实现一体化设计，控制系统仍依赖 dSPACE 或 Speedgoat 等平台，体积大、功耗高[23]，难以满足实际工程需求。为此，部分学者尝试将控制系统与 STM32 微控制器结合，石博文[24]基于 STM32F407 构建高压 SSDV 控制系统，并在 uC/OS-Ⅲ RTOS 的基础上重写了软件系统。ZHANG 等[25]设计了基于 STM32G431 的并联高压电压源的同步开关阻尼电路。裴万鹏等[26]开发了一套基于 STM32F103C8T6 最小系统板的注能取能双向控制电路，然而这些方案在实现自适应控制方面仍存在不足，算法部署流程繁琐，尚未完全突破小型化与低功耗瓶颈。

在大型轻质挠性结构的振动抑制中，为了最大化利用 MFC 的有效工作电压范围，提升抑振效果，电压应在−500~1500 V 之间进行非对称翻转，在理论上可以通过控制 SSDEI 电路注能周期频率与电感参数实现所需控制力，进一步通过调节注能时间调控作用力大小。鉴于 SSDEI 电路结构简单、能效高，采用 STM32 微控制器作为主控平台，可以真正实现控制系统的小型化与低功耗化。基于该思路，本文设计了一种基于 STM32/Simulink 注能时间自适应调整的开关式压电分流支路抑振技术，该系统利用反激式变压器产生非对称的控制电压，主要控制算法由 Simulink 搭建，且支持 Simulink 中控制算法的一键编译下载以及硬件在环控制，并在大展弦比无人机机翼上验证了该方法的有效性和鲁棒性。

1　SSDEI 压电半主动控制方法

1.1　SSDEI 工作原理

外部激励输入的能量主要转化为结构动能、弹性势能、机械损耗及机电转换能。其中，机电转换能指机械能转化为电能并通过电路耗散的能量分量。提高机电转换能是增强振动抑制效果的关键途径，而增加压电元件的工作电压是提升机电转换能的最直接方法之一。SSDEI 技术通过反激式变压器向压电元件注入能量，有效提高了其开路电压，进而提升振动抑制效果。

SSDEI 的核心电路结构如图 1 所示，主要包括 4 个部分：传感 MFC、STM32 微控制器、串联压电元件的 SSDI 开关阻尼电路以及带恒定电压源的注能电路。图中 V 为 MFC 产生的电压信号，L_0 为反激式变压器的原边，L_1 与 L_2 为副边，D_1 与 D_2 为开关二极管，S_1 与 S_2 为控制开关阻尼电路中 MOS 管的开关信号，S_3 为控制注能电路中 MOS 管的脉冲信号。当结构在一阶固有频率下振动时，传感 MFC 感知根部应变，产生与位移同相的电压信号。STM32 微控制器采集此信号并生成 S_1、S_2 和 S_3 三个驱动信号分别控制三个 MOS 管通断。具体工作如下：在同步开关 Q_1 或 Q_2 导通前，Q_3 会提前导通一段时间，注能电路形成回路，电压源 V_{DC} 的部分能量存储于反激式变压器的初级绕组 L_0 中；当位移到达极值，同步开关闭

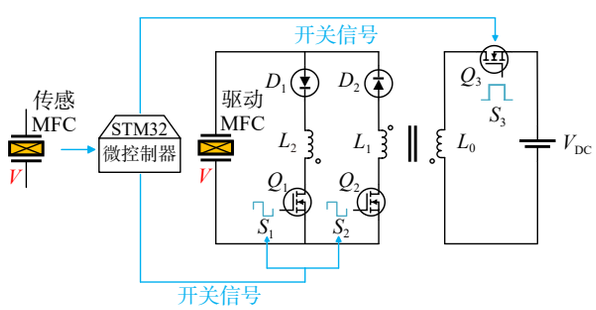


图 1　SSDEI 小型化系统电路示意图

Fig. 1　Circuit schematic of the miniaturized SSDEI system

合，电压开始切换时，存储在初级绕组 L_0 中的能量通过变压器次级绕组 L_1 与 L_2 注入进压电元件，从而增大其开路电压，提升振动抑振效果。

1.2 注能自适应控制策略

控制算法在 Simulink 中搭建，主要包含 ADS8688 信号采集子系统、滤波模块、极值判断模块、注能时间调整子系统、生成注能脉冲信号子系统以及模拟信号输出模块。

为了满足 MFC 的非对称工作电压要求，本文设计了单周期单次注能的控制程序，其逻辑如图 2 所示。图中，t_n 为注能脉冲的高电平时间，T 为位移信号的周期。该程序基于开关信号的上升沿触发：每当检测到开关信号产生上升沿时启动定时器，当计时长度 t 满足 $T-t_n \leqslant t \leqslant T$ 时，输出高电平脉冲。该控制策略可在不影响 MFC 翻转相位的前提下，精确控制注能脉冲在每个周期的特定时刻提前触发单次注能动作，从而有效避免相位延迟，最终实现 MFC 电压的非对称翻转。

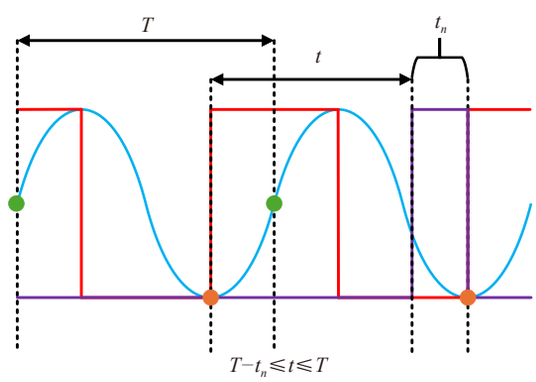


图 2 注能逻辑图

Fig. 2 Energy injection logic diagram

为抑制外部激振力变化引起的非稳态振动，本文设计了一种注能时间自适应调整策略并与 PID 控制器相结合。其核心逻辑为：启动定时器，实时检测信号周期，并持续检测一个周期内自由端位移幅值 U 与期望位移幅值 U_d 并进行比较，根据位移幅值误差 e（$e=U-U_\mathrm{d}$）的持续时间 Δt 计算占空比调节量 D，当检测到的位移幅值大于期望幅值则增加占空比，小于期望幅值则减小占空比，该策略最终使结构振幅稳定在较小范围内，并维持持续注能控制。仿真与试验结果表明，该控制算法具有良好的结构适应性。

为验证该自适应调整模块的有效性，在 Simulink 环境中搭建了相应模型，仿真结果如图 3 所示。图中，蓝色曲线表示注能脉冲高电平占空比，黄色曲线为未施加控制时的自由端位移响应，橙色曲线则为施加所提自适应控制算法后的位移响应。由图 3 可知，注能时间能够根据振动幅值的大小自适应调整，并且通过该控制算法实现了对该仿真模型位移的稳定控制。

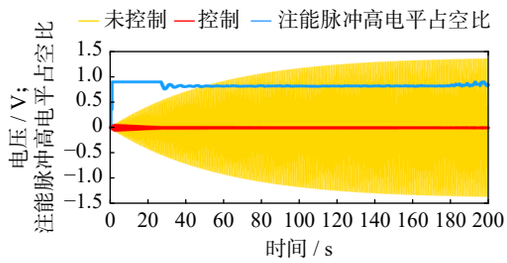


图 3 自适应调整注能脉冲占空比仿真结果

Fig. 3 Simulation results of adaptive adjustment of energy injection pulse duty cycle

2 半主动实时控制系统

2.1 控制系统硬件设计

本次开发的半主动控制系统采用模块化架构，由能源供给（5 V 锂电池与稳压模块）、信号感知（ADS8688）、实时控制（STM32F407ZGT6 微控制器）、信号输出（DAC80508）及功率执行（电压翻转电路+反激式变压器）五大核心单元构成，如图 4 所示。该架构通过功能解耦实现信号-决策-执行的闭环控制。

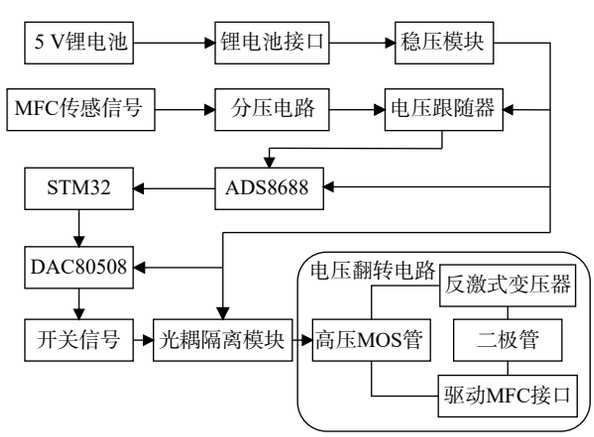


图 4 电路模块连接图

Fig. 4 Circuit module connection diagram

其中，锂电池作为实时控制系统的主供电源，升压模块将其电压提升至控制器内部各芯片所需的工作电压水平。信号感知单元采用 1∶10 分压电路与电压跟随器组合，将 MFC 传感器约±90 V 输出衰减至±10 V 以内适配 ADS8688 量程，并利用电压跟随器低输出阻抗消除负载效应；控制单元以 168 MHz 主频的 STM32F407ZGT6 为核心，通过 SPI1 接口实现 ADS8688 的 500 kSPS 高速采集，SPI2 接口控制 DAC80508 输出驱动信号，TIM1 定时器（0.1 μs 精度）

精准调控注能脉冲时序。

微控制器(microcontroller unit, MCU)选用STM32F407ZGT6芯片, 该芯片搭载ARM Cortex-M4内核, 该芯片集成了丰富的通信接口与外设资源, 包括SPI、I2C、USART、CAN等, 便于实现与外部设备的高效通信。

由于STM32F407ZGT6内置ADC仅支持正电压采集, 且为满足高精度、高采样率的模拟信号采集需求, 本文设计了一种基于ADS8688与STM32F407微控制器的负电压采集方案。该ADC提供8个输入通道, 支持5档可编程输入范围, 采样率可达500 kSPS, 分辨率为16位。ADS8688采用双电源供电: 模拟电源(5 V)和数字电源(3.3 V)。该芯片与STM32微控制器之间通过SPI接口进行数据传输, 设计中, 为ADS8688配置使用内部基准电压源。

为生成高精度MOSFET栅极控制信号, 本设计选用DAC80508作为模拟信号输出模块。该器件是一款独立的高分辨率16位数模转换器, 其积分非线性和差分非线性误差显著低于STM32F407内置DAC。DAC80508能够提供超低噪声、高分辨率且驱动能力强的模拟输出电压基准。结合优化的电源与接地隔离设计, 该方案显著提升了MOSFET开关过程的精确性、效率及抗干扰能力。相较于基于微控制器GPIO直接输出或内置DAC的方案, 本设计展现出更优越的综合性能。

试验中使用的MFC传感器, 其开路电压可达±90 V。为确保ADS8688的采样精度, 需利用分压电路将MFC输出电压衰减至±10 V范围内, 并采用电压跟随器进行缓冲。电压跟随器利用其低输出阻抗和高驱动能力, 有效隔离分压电路与ADC输入。

最终集成的半主动控制系统结构如图5所示, 质量约659.32 g, 其中变压器与电感质量为477.19 g, 锂电池质量为107.80 g, 电路板质量为74.33 g。变压器体积为94.2 cm^3, 电感体积为25 cm^3, 锂电池体积为57.68 cm^3, PCB板大小为8.4 cm×7.4 cm。

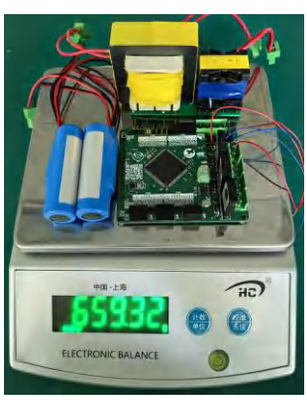


图5　半主动控制系统

Fig. 5　Semi-active control system

2.2　控制系统软件设计

半主动控制系统软件设计的两个关键部分为: 通过ADS8688采集传感MFC信号并判断极值点以及通过DAC80508输出控制信号。本系统的控制算法在Simulink环境中设计、编译并下载至硬件。因此, 实现Simulink与STM32微控制器的联合编译是关键环节。

为提高开发效率并分离底层驱动、Simulink自动生成的代码及MATLAB环境程序, 本设计采用STM32CubeMX与MATLAB硬件支持包协同配置底层驱动。若MATLAB硬件支持包未提供特定外设驱动, 可通过S-Function Builder编写自定义模块。此方法亦支持通过串口实现硬件在环(hardware-in-the-loop, HIL)实时监控算法各个环节所产生的信号。

为在Simulink模型中调用ADS8688, 需对其底层驱动代码与Simulink进行适配与集成。首先要确保ADS8688驱动时开始控制序正确。为此, 利用STM32CubeMX生成底层配置代码, 并在Keil MDK-ARM环境中进行编译、下载与调试, 以验证ADS8688的基本功能。STM32CubeMX的具体配置过程在此省略, 仅强调两个关键配置点:

(1)在Code Generator设置中, 选择MDK-ARM作为工具链;

(2)在Pinout & Configuration中配置SPI1接口时, 需将MOSI引脚手动指定为GPIOB_PIN_5。

完成CubeMX配置并生成代码后, 需在Keil MDK-ARM环境中对生成的工程代码进行修改。具体修改细节在此不赘述, 但需重点注意ADS8688驱动代码应严格添加在USER CODE BEGIN与USER CODE END注释块之间; 若置于他处, 在CubeMX重新生成代码时驱动代码会丢失。

ADS8688驱动程序主要包含以下功能模块: SPI数据读写、命令寄存器操作、软件复位、工作模式配置、程序寄存器读写、自动扫描序列通道设置、指定通道量程设置、自动/手动模式数据读取、引脚初始化及初始化函数。

完成ADS8688底层驱动的验证后, 即可构建STM32CubeMX与Simulink的联合编译工程。该联合编译流程如图6所示。

相较于仅依赖MATLAB硬件支持包的工程, 基于S-Function Builder模块建立的STM32-Simulink联合编译工程存在两处关键差异:

(1)需通过STM32CubeMX生成底层嵌入式代码, 并基于前述已验证的ADS8688驱动工程, 对该自动生成的代码进行适配修改;

(2)需将ADS8688所用SPI1接口的Driver Selector

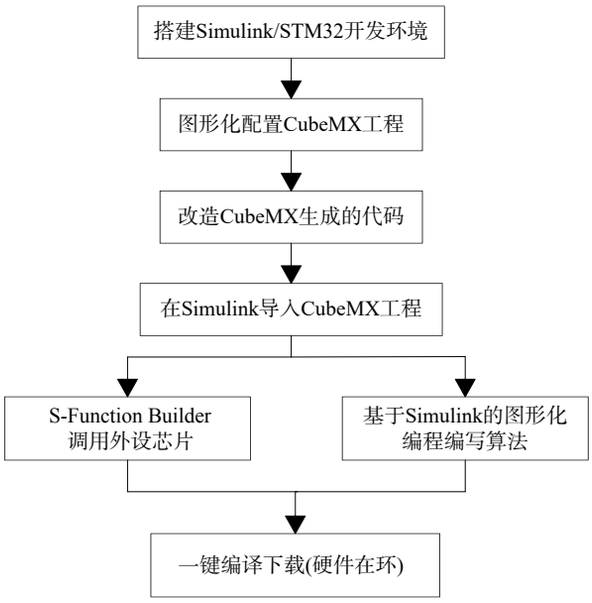


图 6 STM32CubeMX 与 Simulink 的联合编译流程

Fig. 6 Workflow of integrated code generation using STM32CubeMX and Simulink

配置为 HAL 库，其他外设则可配置为效率更高的 LL 库。

完成上述步骤后，在 Simulink 中对 S-Function Builder 模块的代码进行相应修改后即可调用 ADS8688 模块进行模拟信号采集。

在运行模型仿真时，MATLAB 自动定义 MATLAB_MEX_FILE 宏，条件编译块内的硬件相关代码被预处理器排除，避免在仿真环境中引发错误。在生成嵌入式代码时，MATLAB_MEX_FILE 宏未被定义，条件编译块内的代码被包含。此时，必须确保目标硬件所需的头文件（如 main.h）和驱动函数参与编译，以生成可在目标 STM32 微控制器上正确运行的可执行文件。

完成上述步骤后，用于在 Simulink 模型中调用 ADS8688 的 S-Function Builder 模块封装完成。

将 ADS8688 模块与微控制器内置 ADC 在相同幅值和频率的正弦信号采集任务中进行对比测试。在线监控的采集结果如图 7 所示，表明 ADS8688 模块采集的信号波形更平滑、噪声干扰更小、精度更高。

DAC80508 模块经 S-Function Builder 封装后，可实现 8 通道 0~5 V 模拟信号的输出，除驱动代码部分不同以外，封装原理及步骤都与 ADS8688 相同。

基于 S-Function Builder 构建的 ADS8688 模块能可靠地采集电压信号，并将数据无缝传递至后续控制算法。DAC80508 模块亦可稳定输出三通道模拟信号，精确控制回路中 MOSFET 的通断状态。二者协同工作，能有效适配 Simulink 的模型化开发环境。将这二者与半主动控制算法结合搭建的完整 Simulink 程序如图 8 所示。

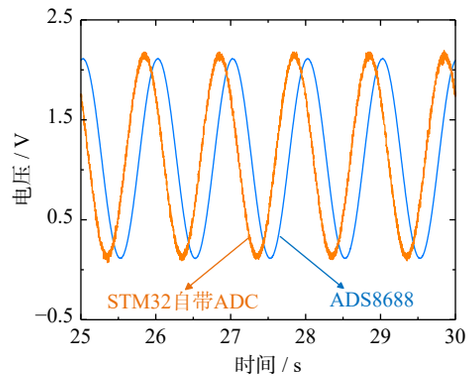


图 7 ADS8688 与内置 ADC 在环监控波形对比图

Fig. 7 Comparison of in-loop monitoring waveforms between ADS8688 and built-in ADC

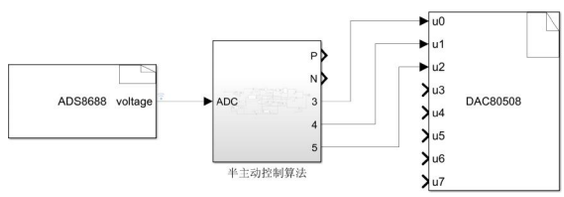


图 8 Simulink 完整程序图

Fig. 8 Complete Simulink program diagram

图 9 展示了在 Simulink 中通过串口进行硬件在环监控的结果，包括 ADS8688 采集的电压信号，以及 DAC80508 输出的开关控制信号与注能脉冲信号。

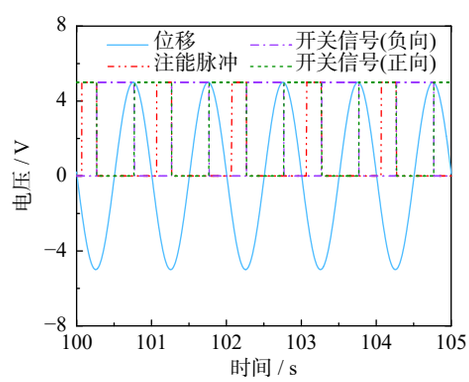


图 9 硬件在环监控输入、输出信号

Fig. 9 Hardware-in-the-loop monitoring of input and output signals

STM32 与 Simulink 联合开发方法的优势在于：

（1）灵活扩展性，结合 MATLAB 硬件支持包与 S-Function Builder 构建的自定义外设模型，可便捷扩展平台支持的外设类型；

（2）高效开发流程，支持 Simulink 内的一键式编译与硬件在环仿真，加速算法验证与迭代；

（3）图形化配置，利用 STM32CubeMX 对 STM32 各类外设进行图形化初始化配置，显著减少了手动编写底层初始化代码的工作量。

3　试验结果分析及讨论

3.1　大展弦比无人机机翼受控结构

为验证所提半主动控制系统的有效性，试验在一架大展弦比无人机机翼上进行，试验平台示意图及装置图如图 10 所示。

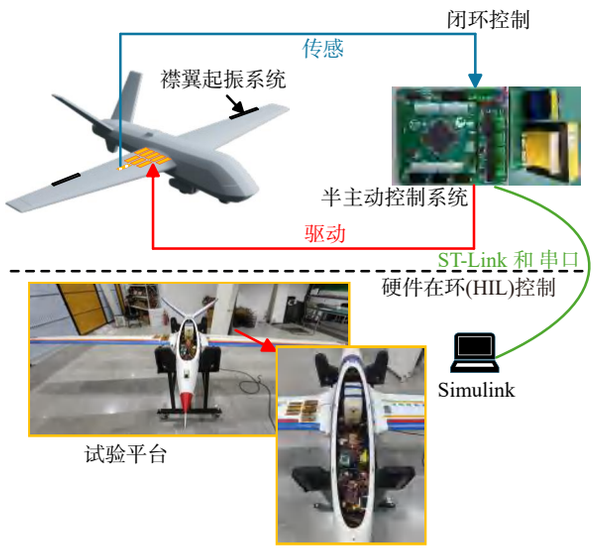


图 10　试验平台示意图及装置图

Fig. 10　Schematic and physical diagram of the experimental platform

试验配置如下：在单侧机翼上表面粘贴 8 片 MFC，其中 7 片作为驱动器使用，并在同一侧机翼的下表面粘贴 1 片 MFC 作为传感器。

半主动控制系统放置在机身内部，MFC 通过导线引至机身内部与控制系统相连接。无人机两侧襟翼构成的起振系统用于产生不同振幅的机翼振动。

控制模式可以选择闭环控制或者在硬件与 PC 端通过 ST-Link 和串口连接后，在 Simulink 中进行硬件在环控制。

3.2　结果及讨论

为系统验证振动抑制性能，试验设置两类典型工况：

（1）自由衰减试验：评估系统对结构本征阻尼特性的增强效果，反映基础抑振能力；

（2）襟翼起振后的非稳态激励试验：模拟实际飞行中持续气动扰动（如湍流），验证系统在动态载荷下的鲁棒性。

首先在初始传感电压约为 1.5 V 的条件下进行自由衰减试验。通过硬件在环实时采集传感 MFC 的信号后，对比控制施加前后的振动抑制效果（如图 11 所示）。数据分析表明：

（1）阻尼比提升：控制前阻尼比为 0.01871，控制后阻尼比为 0.03572，提升约 1.91 倍。阻尼比提升源于 SSDEI 技术的高效机电能量转换。当压电元件开路电压增大时，其产生的反向阻尼力距同步增强，从而加速振动能量耗散；

（2）振动衰减时间缩短：在控制系统作用下，振动在 10 s 内被有效抑制。相比之下，未施加控制时，机翼需约 20 s 才能达到稳定状态，时间缩短进一步证明控制力与结构运动的相位匹配精度。

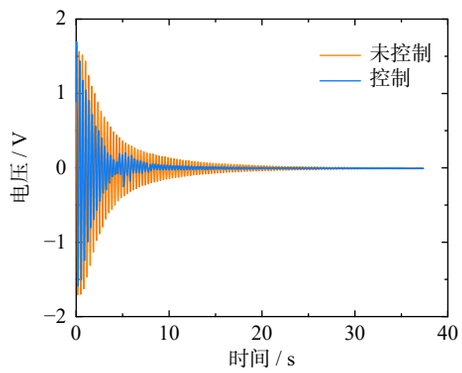


图 11　自由衰减下控制前后传感电压对比波形图

Fig. 11　Comparison of sensed voltage waveforms before and after control under free decay

为评估系统在动态扰动下的控制性能，利用机翼襟翼起振系统施加非稳态振动激励，分别在襟翼摆角为 10°和 15°工况下进行控制试验。通过硬件在环实时监测的传感 MFC 电压响应如图 12、13 所示。试验中存在传感器噪声、作动器布置位置与数量、安装误差、边界条件不同等实际因素，控制效果与仿真结果有一定差距。

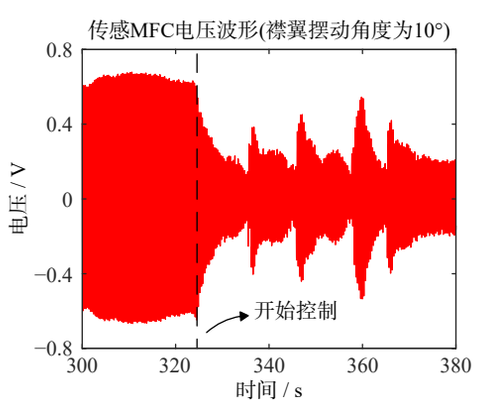


图 12　襟翼非稳态激励控制结果（襟翼摆动角度为 10°）

Fig. 12　Control results under unsteady flap excitation (flap deflection angle: 10°)

计算控制前后传感电压信号的均方根 RMS 值可得：

（1）当襟翼摆动角度为 10°时，控制前 RMS 值为 0.4651 V，控制后 RMS 值为 0.1871 V，从 RMS 的角度计算振动抑制效果约为 59.78%；

（2）当襟翼摆动角度为 15°时，控制前 RMS 值为

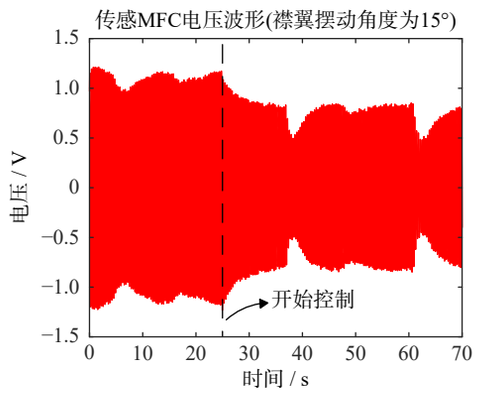


图 13 襟翼非稳态激励控制结果(襟翼摆动角度为 15°)

Fig. 13 Control results under unsteady flap excitation (flap deflection angle: 15°)

0.7845 V, 控制后 RMS 值为 0.5415 V, 振动抑制效果约为 30.98%。

由于襟翼起振系统稳定性限制及机身缺乏刚性约束, 试验中出现了拍振现象。为此, 对控制前后的传感 MFC 信号进行快速傅里叶变换, 分析一阶固有频率处的幅值变化, 结果如图 14、15 所示。通过分析可得:

(1)当襟翼摆动角度为 10°时, 控制前一阶固有频率处的信号幅值为 0.656 V, 控制后为 0.158 V, 对

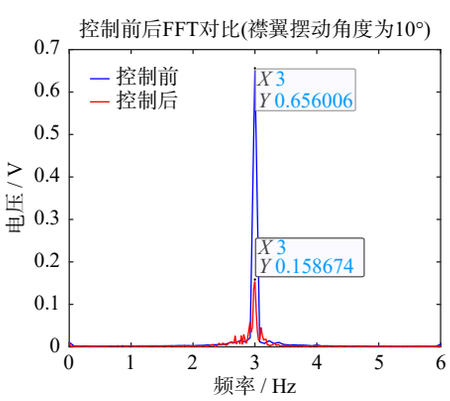


图 14 控制结果频域图(襟翼摆动角度为 10°)

Fig. 14 Frequency-domain control results (flap deflection angle: 10°)

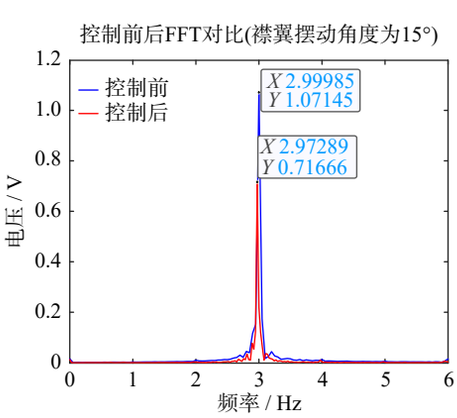


图 15 控制结果频域图(襟翼摆动角度为 15°)

Fig. 15 Frequency-domain control results (flap deflection angle: 15°)

于一阶固有频率处的振动抑制效果约为 75.9%;

(2)当襟翼摆动角度为 15°时, 控制前一阶固有频率处的信号幅值为 1.071 V, 控制后为 0.717 V, 振动抑制效果约为 33.1%。

通过频域分析可得控制系统对一阶模态主导能量的靶向抑制效果更优。即便存在拍振, 系统仍有效实现了一阶模态的振动抑制, 证明控制算法对复杂频谱的适应性。

为评估该半主动控制系统的功耗特性, 采用高精度电流探头与示波器分别监测系统中两块锂电池(5 V 与 7.4 V)的输出电压和电流波形。基于采集得到的电压-电流时序数据, 采用梯形数值积分法计算系统实时功耗。该方法通过逐点计算瞬时功率, 再对时域积分获得总消耗能量, 最后除以总时长得到平均功耗, 有效避免了简单平均法可能引入的误差。

图 16 为 5 V 锂电池的电压、电流波形, 以及据此计算得到的功率曲线与功率分布直方图; 图 17 为 7.4 V 锂电池的相关波形与功率分布结果。经精确计算, 该系统的平均功耗为 187.87 mW。

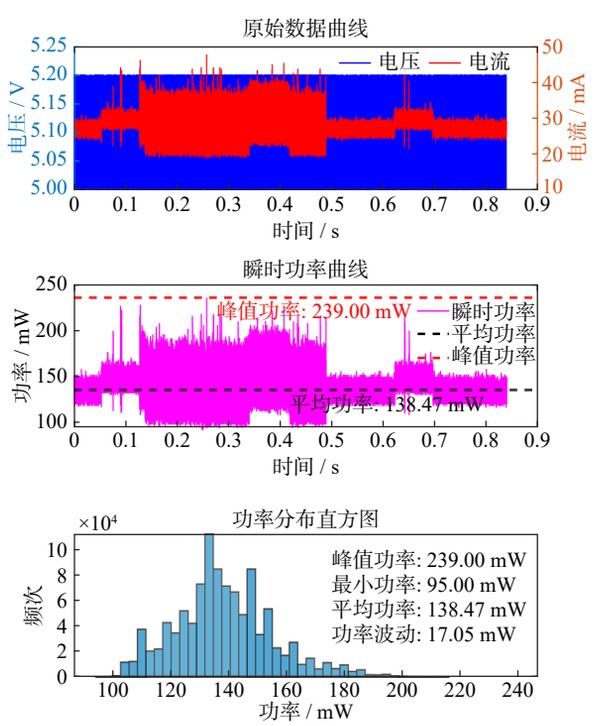
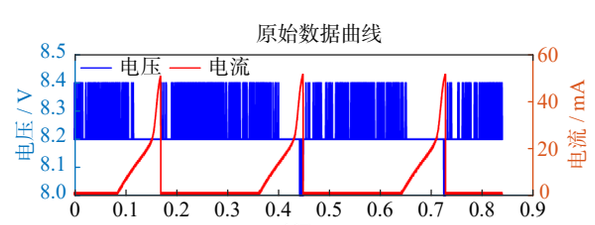


图 16 5 V 锂电池的电压电流、功率曲线与功率分布图

Fig. 16 Voltage and current waveforms, power curves, and power distribution diagram of a 5 V lithium battery



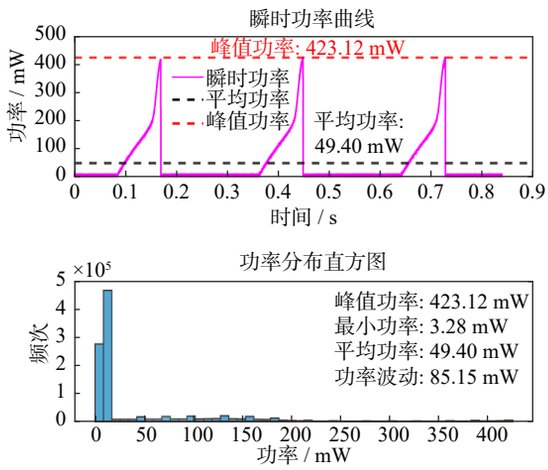


图 17　7.4 V 锂电池的电压电流、功率曲线与功率分布图

Fig. 17　Voltage and current waveforms, power curves, and power distribution diagram of a 7.4 V lithium battery

4　结　论

本文针对大型挠性结构的低频振动抑制需求，设计了一种基于 SSDEI 技术的小型化半主动控制系统，并通过 STM32 微控制器编写了自适应注能算法，通过实时感知 MFC 电压变化动态调节注能时间，解决了传统 SSD 电路依赖外部平台（如 dSPACE）导致的体积大、功耗高问题。通过电流探头与示波器采集锂电池工作时的电压电流，计算可得该控制系统的平均功耗为 187.87 mW。构建了基于 S-Function Builder 的硬件驱动封装模块（ADS8688、DAC80508），支持一键编译下载与硬件在环监控。结合 STM32CubeMX 图形化配置，减少底层代码开发量，显著提升算法部署效率。仿真结果表明系统在理想条件下具有优异的控制性能；试验结果表明系统在实际环境下仍能实现最大 59.78% 的振幅抑制率，显示出良好的工程应用潜力。未来针对驱动电压衰减问题，可以增加电荷补偿电路或采用高绝缘材料变压器，以维持非对称电压稳定性。针对当前反激式变压器重量占比较大的问题，后续可以采用高频磁性材料并且通过改变原副边的线径与匝数比还有气隙大小，以显著降低系统重量与体积，进一步提升工程适用性。也可部署分布式 MFC 传感网络与多机通信模块，实现大型结构全域振动协同抑制。

参考文献：

[1] 李诗岚. 大型柔性天线结构的振动主动控制研究 [D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2024.
LI Shilan. Research of active vibration control of large flexible antenna structure[D]. Harbin：Harbin Institute of Technology，2024.

[2] 张磊，任辉，樊伟，等. 大型柔性空间结构动力学与姿态振动混合控制 [C]//第十九届全国非线性振动暨第十六届全国非线性动力学和运动稳定性学术会议摘要集. 2023：216.

[3] 方昱斌，朱晓锦，高志远，等. 多输入多输出微振动系统的混合鲁棒自适应控制 [J]. 控制理论与应用，2024，41(9)：1559-1568.
FANG Yubin，ZHU Xiaojin，GAO Zhiyuan，et al. Hybrid robust adaptive control for multiple-input multiple-output micro-vibration system[J]. Control Theory & Applications，2024，41(9)：1559-1568.

[4] 曹登庆，白坤朝，丁虎，等. 大型柔性航天器动力学与振动控制研究进展 [J]. 力学学报，2019，51(1)：1-13.
CAO Dengqing，BAI Kunchao，DING Hu，et al. Advances in dynamics and vibration control of large-scale flexible spacecraft[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2019，51(1)：1-13.

[5] 谢丽蓉，严侣，吐松江·卡日，等. 基于特征判定系数的电力变压器振动信号故障诊断 [J]. 电力工程技术，2024，43(3)：217-225.
XIE Lirong，YAN Lyu，TUSONGJIANG·Kari，et al. Power transformer vibration signal fault diagnosis based on feature determination coefficient[J]. Electric Power Engineering Technology，2024，43(3)：217-225.

[6] 林晔，张晓鹏，胡骏，等. 压电智能结构拓扑优化研究进展 [J]. 固体力学学报，2020，41(5)：391-408.
LIN Ye，ZHANG Xiaopeng，HU Jun，et al. Advances in topology optimization of piezoelectric smart structures[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics，2020，41(5)：391-408.

[7] WU Y P，YUAN Q，REN K B，et al. Bidirectional energy-controlled piezoelectric shunt damping technology and its vibration attenuation performance[J]. International Journal of Mechanical System Dynamics，2024，4(1)：63-76.

[8] 张琛，熊庆，汲胜昌，等. 基于压电材料的变压器振动能量收集装置研究 [J]. 电力工程技术，2021，40(6)：173-178.
ZHANG Chen，XIONG Qing，JI Shengchang，et al. Vibration energy harvesting device for transformer based on piezoelectric material[J]. Electric Power Engineering Technology，2021，40(6)：173-178.

[9] LI C，SHEN L，SHAO J，et al. Simulation and experiment of active vibration control based on flexible piezoelectric MFC composed of PZT and PI layer[J]. Polymers，2023，15(8)：1819.

[10] ZOU W T，HU N D，YANG X，et al. Low-frequency broadband multidirectional vibration isolation by piezoelectric smart platform with active control[J]. Journal of Low Frequency Noise，Vibration and Active Control，2023，42(3)：1451-1465.

[11] BENDINE K，WEI Y J，WANG X，et al. An improved active damping of fan blade using piezoelectric MFC actua-

tors and PSO optimization[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures，2024，31(28)：10614-10623.

[12] RICHARD C，GUYOMAR D，AUDIGIER D，et al. Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device[J]. Smart Structures and Materials 1999：Passive Damping and Isolation，1999，3672：104-111.

[13] RICHARD C，GUYOMAR D，AUDIGIER D，et al. Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor[J]. Smart Structures and Materials 2000：Damping and Isolation，2000，3989：288-299.

[14] LEFEUVRE E，BADEL A，PETIT L，et al. Semi-passive piezoelectric structural damping by synchronized switching on voltage sources[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures，2006，17(8-9)：653-660.

[15] BADEL A，SEBALD G，GUYOMAR D，et al. Piezoelectric vibration control by synchronized switching on adaptive voltage sources：towards wideband semi-active damping[J]. The Journal of the Acoustical Society of America，2006，119(5)：2815-2825.

[16] JI H L，QIU J H，CHENG J，et al. Application of a negative capacitance circuit in synchronized switch damping techniques for vibration suppression[J]. Journal of Vibration and Acoustics，2011，133(4)：041015.

[17] JI H L，QIU J H，ZHANG J，et al. Semi-active vibration control based on unsymmetrical synchronized switching damping：circuit design[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures，2016，27(8)：1106-1120.

[18] JI H L，QIU J H，CHENG L，et al. Semi-active vibration control based on unsymmetrical synchronized switch damping：analysis and experimental validation of control performance[J]. Journal of Sound and Vibration，2016，370：1-22.

[19] 张锦. 基于压电纤维复合材料的柔性结构振动半主动控制研究 [D]. 南京：南京航空航天大学，2015.
ZHANG Jin. Semi active vibration control of flexible structures based on piezoelectric fiber composites[D]. Nanjing：Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，2015.

[20] WU Y P，BADEL A，FORMOSA F，et al. Piezoelectric vibration energy harvesting by optimized synchronous electric charge extraction[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures，2013，24(12)：1445-1458.

[21] WU Y P，BADEL A，FORMOSA F，et al. Self-powered optimized synchronous electric charge extraction circuit for piezoelectric energy harvesting[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures，2014，25(17)：2165-2176.

[22] 刘轩，吴义鹏，裘进浩，等. 基于反激变压器的压电振动能量双向操控技术 [J]. 力学学报，2021，53(11)：3045-3055.
LIU Xuan，WU Yipeng，QIU Jinhao，et al. Bidirectional piezoelectric vibration energy control technology based on flyback transformer[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2021，53(11)：3045-3055.

[23] 程启明，孙英豪，程尹曼，等. 电网故障时基于 MMC-PET 接口风力发电系统的建模与控制 [J]. 电力工程技术，2024，43(6)：64-77.
CHENG Qiming，SUN Yinghao，CHENG Yinman，et al. Modeling and control of wind power generation system based on MMC-PET interface during grid faults[J]. Electric Power Engineering Technology，2024，43(6)：64-77.

[24] 石博文. 基于压电驱动器的同步开关阻尼控制系统的集成优化 [D]. 南京：南京航空航天大学，2018.
SHI Bowen. Integrated optimization of synchronized switch damping control system based on piezoelectric actuator[D]. Nanjing：Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，2018.

[25] ZHANG R，JI H L，TAO C C，et al. A Novel approach for synchronized switch damping control based on voltage sources in parallel[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，205：110856.

[26] 裴万鹏，刘轩，马少飞，等. 能量操控式压电分流支路对结构振动的影响研究 [J]. 振动工程学报，2025，38(1)：1-7.
PEI Wanpeng，LIU Xuan，MA Shaofei，et al. Research on the influence of structural vibration of energy-manipulated piezoelectric shunt branch[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(1)：1-7.

第一作者：何军峰(2001—)，男，硕士研究生。
E-mail：sx2301142@nuaa.edu.cn
通信作者：吴义鹏(1986—)，男，博士，副教授。
E-mail：yipeng.wu@nuaa.edu.cn

核主泵磁流变半主动隔振及试验验证

张家明[1,2], 邹冬林[1,2], 廖国江[3], 余永丰[4], 张志谊[1,2], 饶柱石[1,2]

(1. 上海交通大学振动、冲击、噪声研究所, 上海 200240; 2. 上海交通大学机械系统与振动全国重点实验室, 上海 200240;
3. 中国核动力研究设计院核反应堆系统设计技术重点实验室, 四川 成都 610213; 4. 汉江国家实验室, 湖北 武汉 430061)

摘要: 针对核主泵(RCP)在变工况下因传统被动隔振系统动力学参数固定导致的隔振性能不足问题, 本文开展了基于磁流变阻尼器(MRD)的 RCP 半主动控制研究。建立了考虑 RCP 集中质量特性和 MRD 非线性滞回特性的耦合系统动力学模型。设计了基于天棚阻尼原理的半主动控制律, 通过实时调节 MRD 输入电流动态匹配激励特性, 实现系统动力学参数的自适应调节。通过仿真对比了 10~60 Hz 内无控制、传统被动控制、MRD 被动控制及 MRD 天棚半主动控制的隔振效果。以传统被动控制为参考, MRD 天棚半主动控制策略在系统固有频率处加速度级降低 22.34 dB, 对数传递率积分降低 3.61 dB, 均方根传递率积分降低 5.07 dB。仿真结果表明, MRD 天棚半主动控制策略可动态适配 RCP 变工况特性。搭建了 RCP-MRD 试验台架, 评价指标实测值与仿真值的平均相对误差为 8.45%, 验证了 MRD 天棚半主动控制策略在变频激励下抑制 RCP 宽频振动的有效性。

关键词: 核主泵; 磁流变阻尼器; 半主动隔振; 天棚控制
中图分类号: U469.72; U463.33 **文献标志码:** A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508024

Magnetorheological semi-active vibration isolation and experimental verification for reactor coolant pump

ZHANG Jiaming[1,2], ZOU Donglin[1,2], LIAO Guojiang[3], YU Yongfeng[4], ZHANG Zhiyi[1,2], RAO Zhushi[1,2]

(1.Institute of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China; 2.State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China; 3.Science and Technology on Reactor System Design Technology Laboratory, Nuclear Power Institute of China, Chengdu 610213, China; 4.Hanjiang National Laboratory, Wuhan 430061, China)

Abstract: To overcome the limited broadband vibration isolation of the reactor coolant pump (RCP) under variable operating conditions, this paper proposes a semi-active control strategy using magnetorheological dampers (MRD). First, a coupled system dynamics model was established considering the lumped-mass properties of RCP and the nonlinear hysteretic behavior of MRD. Then, a semi-active control law based on the skyhook damping principle was synthesized to generate the command current for MRD, thereby enabling real-time damping adaptation to excitation characteristics. Furthermore, this paper compares the vibration isolation performance of four cases within the 10~60 Hz range via numerical simulation: uncontrolled, traditional passive control, MRD passive control, and MRD skyhook semi-active control. Simulations demonstrate that relative to traditional passive control, the MRD skyhook strategy reduces acceleration response at resonance by 22.34 dB, decreases logarithmic transmissibility integral by 3.61 dB, and lowers root mean square transmissibility integral by 5.07 dB. Subsequently, an RCP-MRD experimental bench was constructed to experimentally validate the control strategy. Experimental validation confirmed that the average relative error between measured and simulated metrics is 8.45%, confirming the effectiveness of the MRD skyhook strategy for suppressing RCP broadband vibration under variable operating conditions and demonstrating close agreement between simulation and experiment. The findings demonstrate that the MRD skyhook semi-active strategy dynamically adapts to RCP variable operating conditions, thereby offering an experimentally validated solution for adaptive vibration suppression in RCPs under variable operations.

Keywords: reactor coolant pump; magnetorheological damper; semi-active vibration isolation; skyhook control

核主泵(reactor coolant pump, RCP)作为反应堆冷却剂系统的核心动力源, 其运行可靠性直接关系核动力装置的放射性安全与运行效率。然而, RCP 内部存在的复杂转子-流体-结构耦合动力学行为, 也是系统振动的主要激励源。剧烈的机械振动不仅会诱发自身及相连管路等关键部件的疲劳损伤[1-2], 还可

收稿日期: 2025-08-11; **修订日期:** 2025-09-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12372055, 52375110); 汉江国家实验室联培基金项目(LP2024013)

能破坏系统边界完整性,导致放射性泄露。因此,开发高可靠性的RCP减振设计策略对保障核动力装置的长周期安全与可靠运行至关重要。

现有RCP振动研究主要聚焦于流致振动机理,对振动控制策略关注不足。ZHENG等[3]应用小波变换揭示了RCP内部压力脉动主频能量向低频迁移,进而诱发流致振动的机理。ZHOU等[4]探明了不同运行条件下的非定常压力脉动与振动特性的关系,发现了RCP的出口方向振动最大。LAI等[5]通过3D非定常流动模拟,明确指出了运行流量是压力脉动振幅的主要影响因素。蔡坤等[6]证实了流体宽频压力脉动是引发主泵和试验台架整体振动的主要原因,并通过增加被动阻尼器的方法有效降低了主泵的振动。

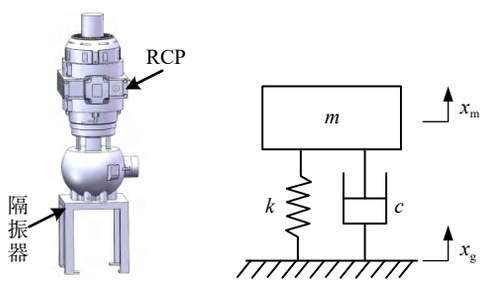
尽管RCP振动机理逐渐明晰,但缺乏能适应激励动态变化的半主动振动控制策略。由于反应堆冷却剂系统的高可靠性要求,结构简单的被动隔振仍是当前的主要策略。然而,被动隔振固定的动力学参数难以适应流量、转速等因素导致的激励频率变化,隔振效果受限。基于磁流变液阻尼器(magnetorheological damper, MRD)的半主动控制策略可根据激励特性,实时调节系统的刚度和阻尼特性[7],且在控制失效时可自动退化为被动阻尼器,兼顾了可靠性和性能提升。然而,RCP激励动态变化的特性对半主动控制策略的动态适应能力也提出了严格要求。王俊等[8]引入MRD有效抑制了机动飞行过程中转子系统瞬态及稳态响应,证明了MRD对瞬态激励和旋转机械振动的控制能力。冯钰琦等[9]开发的单杆式MRD,在往复压缩机管路振动试验平台中实现了80.70%的振动位移降幅,展示了MRD在管道类结构的振动控制中的高效性。ZHAO等[10]和ZHANG等[11]分别将MRD应用于第二长江大桥风力自支撑缆索和抽水蓄能电站系统厂房结构的振动控制,体现了MRD处理复杂系统振动问题的强大能力。

综上所述,尽管MRD半主动控制在其他工程领域中的应用日趋成熟,但是在RCP振动控制中的研究还相对较少,理论建模与试验验证体系尚待发展。当前研究主要面临两个挑战:一是亟需建立能够描述变频激励下RCP与MRD非线性力耦合作用的动力学模型,以预测集成MRD后系统的动态响应;二是耦合模型及半主动控制策略在变频激励下的有效性与适应性需通过仿真与试验进行充分验证。因此,本文针对上述问题进行深入探索,建立考虑RCP集中质量特性与MRD非线性滞回特性的耦合模型,开展变频激励下天棚控制策略研究,并搭建试验平台,对建立的模型及控制策略进行有效验证与评估,以期为核动力装置的隔振设计提供理论依据与试验支撑。

1 RCP-MRD系统耦合模型

1.1 RCP动力学模型

RCP通过隔振器与基础结构连接,典型反应堆RCP的结构如图1 (a)所示。实际运行条件下,隔振器通过弹性支承使得振动在设备与基础之间的传递显著衰减。RCP内部复杂的流固耦合与旋转动力学行为与基础振动间的耦合作用被大幅减弱。此外,由于隔振器的刚度与质量远小于RCP的结构刚度和质量,系统的振动传递特性主要由RCP的等效集中质量和隔振器刚度主导。因此,在工程隔振设计中,忽略隔振器质量与RCP结构刚度的影响,仅考虑RCP的等效集中质量与隔振器刚度,即可满足精度要求。



(a) RCP结构示意图 (a) RCP schematic　　(b) RCP动力学模型 (b) RCP dynamic model

图1 RCP结构示意图与动力学模型

Fig. 1 Schematic and dynamic model of RCP

基于上述机理简化,为验证半主动隔振策略用于抑制宽频基础振动向RCP传递的有效性,本文采用图1 (b)所示单自由度动力学模型描述RCP在竖直方向的振动响应。图中,m为RCP的等效集中质量;k为隔振器等效刚度;c为隔振器等效阻尼;x_m为RCP的绝对位移;x_g为基础的绝对位移。

根据图1 (b)可建立基础激励下RCP的振动方程:

$$m\ddot{x}_m + c\left(\dot{x}_m - \dot{x}_g\right) + k\left(x_m - x_g\right) = 0 \qquad (1)$$

式中,$\dot{x}_m$和$\ddot{x}_m$分别为RCP的绝对速度和绝对加速度;$\dot{x}_g$为基础的绝对速度。

定义RCP与基础的相对位移为$x = x_m - x_g$,则相对速度和相对加速度可分别表示为$\dot{x} = \dot{x}_m - \dot{x}_g$和$\ddot{x} = \ddot{x}_m - \ddot{x}_g$。代入式(1)可得到:

$$m\left(\ddot{x} + \ddot{x}_g\right) + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (2)$$

进一步,可以将整个系统看成是一个受迫振动的单自由度系统。系统的位移为RCP和基础之间的相对位移x,系统的激励为基础运动引起的惯性

力$-m\ddot{x}_g$, 可以表示为:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{x}_g \tag{3}$$

1.2 MRD 现象模型

Bouc-Wen 模型利用非线性微分方程来描述 MRD 的非线性及滞回特性, 在捕捉低速预屈服区的非线性过渡行为和高速饱和区特性方面具有明显优势[12]。因此, 本文基于 Bouc-Wen 模型建立 MRD 现象模型表征其动态特性。Bouc-Wen 模型的基本动力学方程可表示为:

$$\begin{aligned} &F_d=c_0\dot{x}+k_0x+az,\\ &\dot{z}=-\gamma|\dot{x}||z|^{n-1}-\beta\dot{x}|z|^n+A\dot{x} \end{aligned} \tag{4}$$

式中, F_d 为 MRD 的输出力; x 和 $\dot{x}$分别为 MRD 两端的相对位移和相对速度; c_0 为黏滞阻尼系数; k_0 为弹性刚度系数; a 为滞回位移系数; z 和$\dot{z}$分别为滞回位移和滞回速度; γ为滞回环宽度参数; n 为曲线圆滑系数; β为滞回环高度参数; A 为最大阻尼力比例系数。

1.3 RCP-MRD 系统耦合模型

在实际应用中, RCP 的振动信息作为 MRD 的输入, 而 MRD 的输出力反作用于 RCP, 形成闭环动力学关系。为了定量分析 MRD 对 RCP 振动的控制效果, 并为后续半主动控制算法设计奠定完整的系统模型基础, 需要将 RCP 与 MRD 耦合为一个整体系统进行分析。因此, 建立如图 2 所示 RCP-MRD 系统耦合模型。

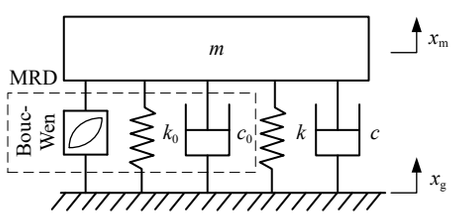


图 2　RCP-MRD 系统耦合模型

Fig. 2　RCP-MRD coupled model

在图 2 所示的模型中, RCP 核心结构(包含泵体、电机及管道系统的惯性特性)被等效为集中质量 m, 其竖直方向位移响应直接关联设备运行稳定性与管道疲劳寿命。RCP 固有的被动隔振特性由线性弹簧(刚度 k)和阻尼器(阻尼 c)组成并联单元表征。MRD 采用 Bouc-Wen 模型描述其非线性力学行为。

将 MRD 的输出力作为可控力项引入 RCP 振动系统, 得到如下闭环系统动力学方程:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx+F_d=-m\ddot{x}_g \tag{5}$$

结合式 (4), 由式 (5) 进一步得到:

$$m\ddot{x}+(c+c_0)\dot{x}+(k+k_0)x+az=-m\ddot{x}_g \tag{6}$$

式中, 左侧包含 RCP 的惯性力、系统总阻尼力(固有阻尼+MRD 黏滞阻尼)、系统总刚度力(隔振器刚度+MRD 刚度)及 MRD 滞回力项, 右侧为基础激励引起的等效惯性力(外部扰动)。

2 半主动控制策略设计

2.1 天棚控制策略

天棚控制策略[13]源于一个理想化的物理模型。该模型假想将系统的质量块通过阻尼器连接到绝对静止的天空上(即天棚), 旨在抑制系统在外部激励下的振动。在这个理想模型中, 当质量块相对于静止天棚运动时, 阻尼器会产生始终与质量块运动速度方向相反的阻尼力, 总是阻碍质量的运动。理想的天棚控制律可表示为:

$$c_{sky}=\begin{cases} \infty, & \dot{x}_m\left(\dot{x}_m-\dot{x}_g\right)\geqslant 0\\ 0, & \dot{x}_m\left(\dot{x}_m-\dot{x}_g\right)<0 \end{cases} \tag{7}$$

式中, c_{sky} 为理想天棚阻尼系数。

现实中无法实现绝对静止的“天棚”。因此, 通过在质量块与系统基础之间安装可控阻尼器来近似达到理想天棚的控制效果。在基于 MRD 的半主动控制中, 天棚控制律通常表示为:

$$c_{sky}=\begin{cases} c_{max}, & \dot{x}_m\left(\dot{x}_m-\dot{x}_g\right)\geqslant 0\\ c_{min}, & \dot{x}_m\left(\dot{x}_m-\dot{x}_g\right)<0 \end{cases} \tag{8}$$

式中, c_{max} 和 c_{min} 分别为 MRD 所能提供的最大阻尼系数和最小阻尼系数。

由于 MRD 的阻尼特性与通入电流的大小密切相关, 式 (8) 可进一步转换为电流控制指令:

$$I=\begin{cases} I_{max}, & \dot{x}_m\left(\dot{x}_m-\dot{x}_g\right)\geqslant 0\\ I_{min}, & \dot{x}_m\left(\dot{x}_m-\dot{x}_g\right)<0 \end{cases} \tag{9}$$

式中, I_{max} 和 I_{min} 分别为可通入 MRD 的最大电流和最小电流。

2.2 半主动闭环系统稳定性分析

考虑无外部扰动且基础静止的情况, 定义系统总刚度为 $k_t=k+k_0$, 系统总阻尼为 $c_t=c+c_0$, 状态变量为:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x\\ \dot{x}\\ z \end{bmatrix} \tag{10}$$

系统状态方程为:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} x_2\\ \dfrac{1}{m}\left(-c_tx_2-k_tx_1-ax_3\right)\\ -\gamma|x_2||x_3|^{n-1}-\beta x_2|x_3|^n+Ax_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

构造一个基于系统总机械能和滞回耗散的 Lyapunov 函数如下:

$$V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}k_{\mathrm{t}}x_1^2+\frac{1}{2}mx_2^2+\frac{1}{2}\delta x_3^2 \tag{12}$$

式中，$\frac{1}{2}k_{\mathrm{t}}x_1^2$对应系统的弹性势能；$\frac{1}{2}mx_2^2$对应系统的动能；$\frac{1}{2}\delta x_3^2$对应与滞回变量相关的伪势能，反映了系统运动时的耗散特性；$\delta>0$为待定参数。

对式 (12) 求导可得：

$$\dot{V}=k_{\mathrm{t}}x_1\dot{x}_1+mx_2\dot{x}_2+\delta x_3\dot{x}_3 \tag{13}$$

结合式 (11) 整理可得：

$$\dot{V}=-c_{\mathrm{t}}x_2^2-ax_2x_3-\delta\gamma|x_2||x_3|^{n+1}-\delta\beta x_2|x_3|^n x_3+\delta Ax_2x_3 \tag{14}$$

进一步整理可得到：

$$\dot{V}\leqslant-c_{\mathrm{t}}x_2^2+(-a+\delta A)x_2x_3-\delta(\gamma-|\beta|)|x_2||x_3|^{n+1} \tag{15}$$

令$\delta=\frac{a}{A}$，消除交叉项得：

$$\dot{V}\leqslant-c_{\mathrm{t}}x_2^2-\delta(\gamma-|\beta|)|x_2||x_3|^{n+1} \tag{16}$$

为确保$\dot{V}\leqslant 0$，需满足$c_{\mathrm{t}}>0$和$\gamma>|\beta|$。当$\dot{V}\equiv 0$时，$x_2\equiv 0$，此时解得$x=0$为唯一解，基于 LaSalle 不变原理[14]，半主动闭环系统渐近稳定于原点。

3 控制算法仿真与试验台架验证

3.1 耦合模型参数辨识与验证

建立如图 2 所示 RCP-MRD 系统耦合模型，设定 RCP 集中质量 m 为 55 kg，固有刚度 k=5.68×10^5 N/m，固有阻尼比为 0.01。

由式 (9) 所示的天棚控制律，仿真分析仅需考虑 MRD 在最小电流 $I_{\min}$ 和最大电流 $I_{\max}$ 两种极端工作状态下的动态特性模型。为此，通过如图 3 所示 MRD 动态特性测试试验装置，分别测试 MRD 在两种电流状态下的动态特性。测试过程中设定正弦位移激励幅值为 1 mm，激励频率为 7 Hz，以覆盖 MRD 在后续试验中的关键速度区间。据此建立的 MRD 模型，可以在关注的频段内保证充足的精度与工程适用性。

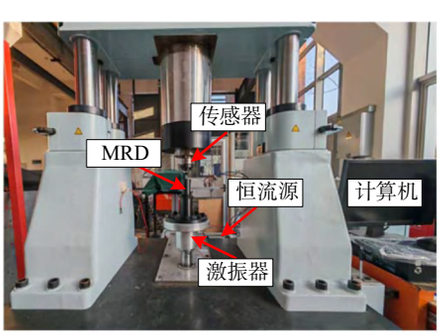


图 3 MRD 动态特性测试装置

Fig. 3 MRD dynamic characteristic test device

测试采用博海 A172 磁流变液灌装的单输出杆型 MRD。动特性试验机内置位移传感器、速度传感器和力传感器的量程分别为 3 mm、120 mm/s 和 4000 N，灵敏度分别为 333.33 mV/mm、16.67 mV/(mm·s^{-1}) 和 0.5 mV/N。

基于测试数据，采用最小二乘法和遗传算法相结合的优化策略进行 Bouc-Wen 模型参数辨识。优化目标设定为 Bouc-Wen 模型的预测阻尼力与 MRD 实测阻尼力之间的误差平方和，即

$$\min\quad\sum_{i=1}^{N}\left(F_{\mathrm{mea}}-F_{\mathrm{pre}}\right)^2 \tag{17}$$

式中，F_{mea}和F_{pre}分别为 MRD 实测阻尼力和 Bouc-Wen 模型的预测阻尼力。

优化过程中遗传算法的种群大小为 50，最大迭代次数为 100，交叉比例为 0.8，变异函数中的 Scale 和 Shrink 参数分别设定为 1 和 0.5。表 1 给出了辨识得到的 Bouc-Wen 模型各参数值。

表 1 Bouc-Wen 模型参数

Tab. 1 Bouc-Wen model parameters

参数	最小电流模型参数	最大电流模型参数
c_0	585.26	14358.53
k_0	0.43	0.82
a	5933.12	19668.30
γ	5159.67	13273.40
n	0.75	1.16
β	7.11×10^{-6}	1.09×10^{-10}
A	84.65	152.39

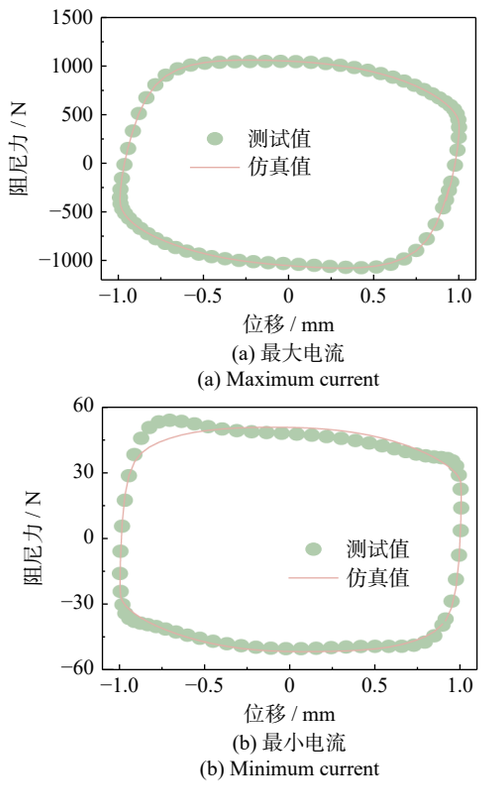
由表 1 可知，在最大电流和最小电流情况下辨识得到的 Bouc-Wen 模型参数均满足$\gamma-|\beta|>0$的条件，确保了 MRD 半主动控制系统的稳定性。

图 4 和图 5 分别给出了 MRD 在最大电流和最小电流状态下测试结果与基于辨识参数 Bouc-Wen 模型仿真结果的对比。

由图 4 和图 5 可以看出，Bouc-Wen 模型仿真得到的位移-阻尼力滞回曲线和速度-阻尼力滞回曲线与试验数据吻合度较高。定量评估表明，以测试结果作为参考，Bouc-Wen 模型在最小电流状态下的阻尼力预测均方根误差为 15.92 N，决定系数 R^2 值为 0.99；在最大电流状态下的阻尼力预测均方根误差为 167.97 N，决定系数 R^2 值为 0.99。这表明建立的 Bouc-Wen 模型可以有效地表征 MRD 在目标工作电流状态下的非线性及滞回特性，满足后续仿真分析对模型精度的要求。

3.2 半主动控制算法仿真分析

基于建立的 RCP-MRD 耦合模型，仿真对比分析了无控制策略、传统被动控制策略、MRD 被动控制

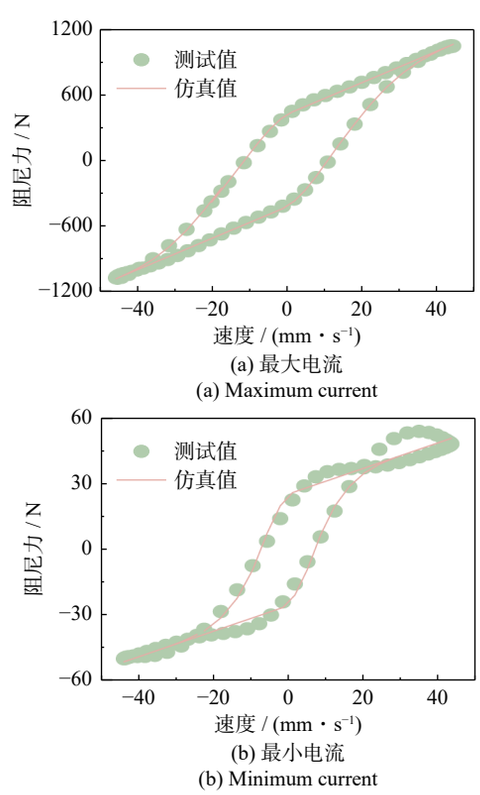


(a) 最大电流
(a) Maximum current

(b) 最小电流
(b) Minimum current

图 4　位移-阻尼力滞回曲线

Fig. 4　Displacement-damping force hysteresis curves



(a) 最大电流
(a) Maximum current

(b) 最小电流
(b) Minimum current

图 5　速度-阻尼力滞回曲线

Fig. 5　Velocity-damping force hysteresis curves

策略及 MRD 天棚半主动控制策略四种策略的减振性能。其中, 无控制策略即不安装任何阻尼装置; 传统被动控制策略采用线性策略阻尼器; MRD 被动控制策略采用零电流被动模式的 MRD; MRD 天棚半主动控制策略则采用天棚控制算法对 MRD 进行实时控制。仿真过程中, 施加的基础正弦加速度激励幅值为 0.06*g*(此为试验验证中台架的安全振动极限), 激励频率从 10 Hz 依次增加 1~60 Hz, 旨在覆盖缩比系统的共振区并模拟实际工程中的宽频振动环境。图 6 对比了不同控制策略对应的系统加速度级频响曲线。

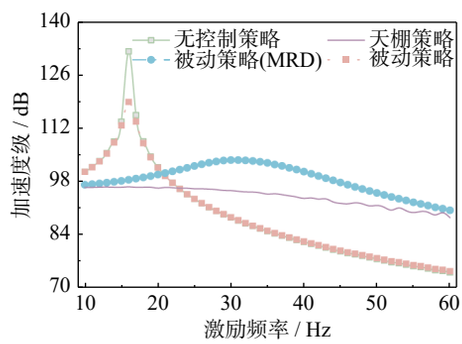


图 6　不同策略的加速度级频响曲线对比 (10~60 Hz)

Fig. 6　Simulated acceleration frequency response under different control strategies (10~60 Hz)

从图 6 可以看出, 在无控制策略下, 系统加速度级在 10~20 Hz 频段出现显著峰值, 在共振频率 16 Hz 时最高, 达 132.12 dB, 表明该频段结构振动剧烈, 无减振措施时系统共振响应突出。在被动控制策略下, 加速度级仍在 10~20 Hz 频段出现显著峰值, 在共振频率为 16 Hz 时最高, 达 118.83 dB。这表明该频段结构振动剧烈, 同时也说明常规被动阻尼对低频振动抑制能力有限。在 MRD 被动策略下, 共振峰向高频偏移至 20~40 Hz 频段(31 Hz), 峰值加速度级为 103.55 dB。相比无控制策略, 峰值降低 28.57 dB, 这表明被动状态下的 MRD 既为系统引入了附加阻尼(削弱了原共振峰), 也引入了附加刚度(导致共振频率升高)。在 MRD 天棚半主动策略的整个 10~60 Hz 频带内, 加速度级整体维持在较低且平稳的水平, 最大值为 96.49 dB。这表明天棚策略有效抑制了低频振动。

进一步地, 对比天棚策略与其他策略在系统固有频率处的提升。以无控制策略作为参考, 传统被动策略、MRD 被动策略和 MRD 天棚半主动策略在共振点处的隔振量分别增加了 13.29、33.77 和 35.63 dB。以传统被动策略和 MRD 被动策略作为参考, MRD 天棚半主动策略在共振点处的隔振量分别实现了 22.34 dB 和 1.86 dB 的提升。

为综合评价不同控制策略在 10~60 Hz 全频段内振动抑制和能量传递的整体性能, 引入对数传递率积分 L 和均方根传递率积分 R 两个频域积分指标。其中, 对数传递率积分直接反映了控制策略在整个关注频段内对振动幅值传递的全局衰减能力。其值

越低，表明隔振性能越优，计算公式如下：

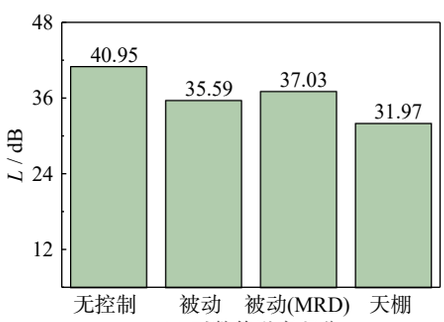
$$L = 20\lg\left(\int_{f_1}^{f_2} TR(f)\mathrm{d}f\right) \tag{18}$$

式中，f_1 和 f_2 分别为最小和最大激励频率；$TR(f)$ 为传递率。

均方根传递率积分衡量了振动能量通过隔振系统在频域上的总体传递水平。其值越低，表明系统在整个频段内阻隔振动能量传递的效果越好，其计算公式如下：

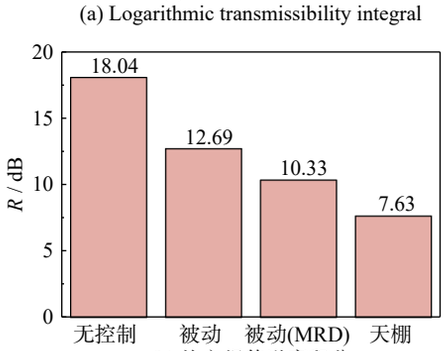
$$R = 10\lg\left(\sqrt{\int_{f_1}^{f_2} TR^2(f)\mathrm{d}f}\right) \tag{19}$$

图 7 展示了不同控制策略在全频段内的对数传递率积分和均方根传递率积分评价指标结果。



(a) 对数传递率积分

(a) Logarithmic transmissibility integral



(b) 均方根传递率积分

(b) Root mean square transmissibility integral

图 7 不同控制策略的评价指标

Fig. 7 Metrics of different control strategies

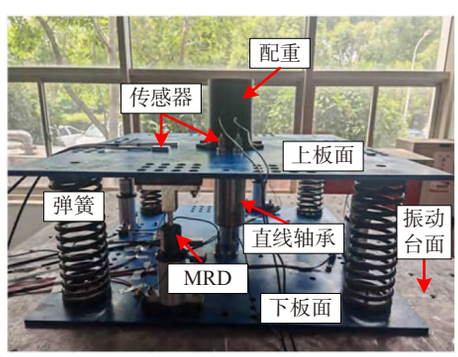
由图 7 可知，无控制策略时，系统的对数传递率积分为 40.95 dB，均方根传递率积分为 18.04 dB；传统被动阻尼器时，系统的对数传递率积分为 35.59 dB，均方根传递率积分为 12.69 dB；MRD 被动策略时，系统的对数传递率积分为 37.03 dB，均方根传递率积分为 10.33 dB；MRD 天棚半主动策略时，系统的对数传递率积分为 31.97 dB，均方根传递率积分为 7.63 dB。

以无控制策略作为参考，传统被动策略、MRD 被动策略和 MRD 天棚半主动策略的对数传递率积分指标分别实现了 5.36、3.92 和 8.98 dB 的降低；均方根传递率积分指标分别实现了 5.35、7.72 和 10.42 dB 的降低。以传统被动策略和 MRD 被动策略作为参考，MRD 天棚半主动策略的对数传递率积分指标分别实现了 3.61 和 5.05 dB 的降低；均方根传递率积分指标分别实现了 5.07 和 2.70 dB的降低。

综合来看，MRD 天棚半主动策略不但在固有频率处的隔振量全面高于传统被动策略和 MRD 被动策略，而且在抑制 10~60 Hz 全频段振动与能量传递的综合性能方面也全面优于传统被动策略和 MRD 被动策略。表明 MRD 天棚半主动策略具有良好的宽频带隔振稳定性，能够有效应对试验中可能出现的复杂频率成分的激励。基于上述仿真结果，后续试验将采用 MRD 天棚半主动控制策略，以进一步验证其在实际工况下的减振性能。

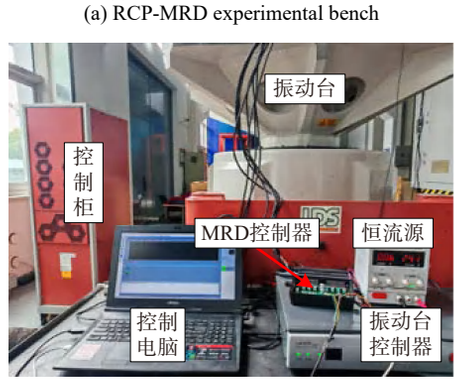
3.3 试验台架验证

为验证 MRD 天棚半主动控制策略的实际隔振性能，搭建了如图 8 所示 RCP-MRD 系统半主动控制试验装置。



(a) RCP-MRD系统实验台架

(a) RCP-MRD experimental bench



(b) 激励与MRD控制系统

(b) Excitation and MRD control system

图 8 RCP-MRD 系统半主动控制试验装置

Fig. 8 RCP-MRD system semi-active control experimental device

由图 8 可知，RCP-MRD 系统半主动控制试验装置主要由试验台架（图 8 (a)）和控制系统（图 8 (b)）组成。试验台架由 1 个配重块、2 块板面、4 个弹簧、1 组直线轴承以及 8 个加速度传感器组成。其中，配重块为 RCP 集中质量；上板面为 RCP 的支撑基座，通过弹簧与下板面连接；下板面与振动台面通过螺栓实现刚性连接；直线轴承的作用是防止平台发生倾斜，增加平台的稳定性；加速度传感器（量程和灵

敏度分别为 50*g* 和 103 mV/*g*)用于采集系统的加速度信息, 并将加速度信号传输至图 8 (b) 中的振动台控制器、MRD 控制器和控制电脑, 用于控制激励、实时调节 MRD 输入电流和记录分析。

试验前, 将天棚半主动控制策略代码烧录至 MRD 控制器内, 试验过程中施加正弦加速度激励幅值为 0.06*g*, 激励频率从 10 Hz 依次增加 1~60 Hz, 与仿真参数保持一致。图 9 给出了不同控制策略对应的系统加速度传递率曲线对比。

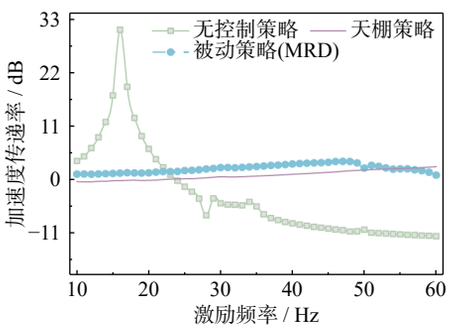


图 9　不同策略的加速度传递率对比(10~60 Hz)

Fig. 9　Comparison of acceleration transmissibility under different strategies (10~60 Hz)

从图 9 可以看出, 在无控制策略下, 系统加速度传递率在 10~20 Hz 频段出现明显峰值, 在共振频率 16 Hz 时最高, 为 30.83 dB, 表明该频段结构振动剧烈, 无减振措施时系统加速度传递率较高。在采用 MRD 被动策略和天棚半主动策略后, 10~20 Hz 频段内振动加速度传递率显著降低, 这表明 MRD 可以很好地抑制系统共振频段的振动传递。

为进一步验证天棚半主动控制策略在 10~60 Hz 全频段内的整体抑振性能, 并实现仿真与试验的相互验证, 表 2 对比了 MRD 天棚半主动策略主要评价指标的仿真值与实测值结果。

表 2　测试与仿真结果对比

Tab. 2　Comparison of experimental and simulation results

策略	指标	实测 / dB	仿真 / dB	相对误差 / %
共振点处隔振量	MRD被动	29.49	33.77	12.67
	MRD半主动	31.01	35.63	12.97
对数传递率积分	无控制策略	40.64	40.95	0.76
	MRD被动	35.54	37.03	4.02
	MRD半主动	33.98	31.97	6.29
均方根传递率积分	无控制策略	17.09	18.04	5.27
	MRD被动	9.30	10.33	9.97
	MRD半主动	8.49	7.63	11.27

由表 2 可知, 以无控制策略作为参考, MRD 被动策略和 MRD 天棚半主动策略的对数传递率积分指标分别降低了 5.10 和 6.66 dB; 均方根传递率积分指标分别降低了 7.79 和 8.60 dB。进一步以被动策略为基准进行对比, 天棚半主动策略在这两项指标上分别进一步降低了 1.56 和 0.81 dB。上述结果表明, 天棚半主动策略在共振峰抑制、以及 10~60 Hz 全频段内抑制振动和能量传递的整体性能均全面优于被动策略。这表明天棚半主动控制策略在应对具有复杂频率成分的工程振动问题时, 具备更大的应用潜力。

此外, 不同控制策略主要评价指标仿真值与实测值的平均相对误差为 8.45%, 其中共振点处隔振量平均相对误差为 12.82%, 对数传递率积分平均相对误差为 3.69%, 均方根传递率积分平均相对误差为 8.84%。

结果表明, 仿真结果与试验数据在关键评价指标上具有合理的吻合度, 建立的 RCP-MRD 耦合动力学模型精度满足工程方案评估和趋势分析的需求, 能够较为准确地反映系统在不同频率激励下的主要振动响应特性。该模型为后续的工程应用和深入研究提供了可靠的理论依据和有效的仿真工具。

4　结　论

(1)建立了考虑 RCP 集中质量特性与 MRD 非线性滞回特性的耦合动力学模型, 关键指标的仿真值与实测值平均相对误差为 8.45%, 模型精度满足工程需求。该模型适用于中低频段宽频基础激励下含强非线性阻尼元件的隔振系统, 能够有效表征变频激励下系统的动态响应。建模方法与验证结果可为同类旋转机械系统在变工况条件下的隔振设计提供理论依据与设计参考。

(2)采用的天棚半主动控制律可动态适配变频激励, 相较于传统被动隔振, 在系统固有频率处加速度响应降低了 22.34 dB, 对数传递率积分和均方根传递率积分分别降低了 3.61 dB 和 5.07 dB, 显著提升了宽频隔振性能, 为变工况下核电关键设备的振动控制提供了一种解决方案。

参考文献:

[1] 王鹏, 袁寿其, 王秀礼, 等. 大流量工况下核主泵内部不稳定特性分析 [J]. 振动与冲击, 2015, 34(9): 196-201.
WANG Peng, YUAN Shouqi, WANG Xiuli, et al. Analysis on internal unsteady characteristics of nuclear main pump under large flow condition[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(9): 196-201.

[2] LIU L, CHEN X H, GAO J H, et al. Pressure pulsation analysis of a large reactor coolant pump experimental loop based on field test and numerical simulation[J]. Nuclear Engi-

neering and Design，2025，431：113686.

[3] ZHENG Y Y，LONG Y，ZHU R S，et al. Research on pressure pulsation characteristics of reactor coolant pump under non-uniform inflow based on wavelet transform[J]. Progress in Nuclear Energy，2025，185：105784.

[4] ZHOU Q，LI H K，DONG J N，et al. Experimental investigation on the unsteady pressure pulsation and vibration of a nuclear pump test loop[J]. Energy Science & Engineering，2022，10(8)：2877-2891.

[5] LAI X D，YE D X，YU B，et al. Investigation of pressure pulsations in a reactor coolant pump with mixed-flow vaned diffuser and spherical casing[J]. Journal of Mechanical Science and Technology，2022，36(1)：25-32.

[6] 蔡坤，朱昶帆，张瑞，等. 主泵试验台架振动原因分析与修改方案 [J]. 原子能科学技术，2020，54(12)：2404-2410.
CAI Kun，ZHU Changfan，ZHANG Rui，et al. Vibration cause analysis and modification of prototype reactor coolant pump[J]. Atomic Energy Science and Technology，2020，54(12)：2404-2410.

[7] YU J Q，DONG X M，SU X，et al. Development and characterization of a novel rotary magnetorheological fluid damper with variable damping and stiffness[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2022，165：108320.

[8] 王俊，刘云飞，秦朝烨，等. 机动飞行下磁流变阻尼器-转子系统动力学特性 [J]. 振动工程学报，2024，37(5)：747-755.
WANG Jun，LIU Yunfei，QIN Zhaoye，et al. Dynamic characteristics of rotor system with magnetorheological damper during maneuvering flight[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(5)：747-755.

[9] 冯钰琦，赵杰，姚冉，等. 基于磁流变阻尼器的往复压缩机管系减振技术研究 [J]. 振动与冲击，2023，42(15)：101-107.
FENG Yuqi，ZHAO Jie，YAO Ran，et al. Vibration reduction technique for reciprocating compressor pipeline based on MR damper[J]. Journal of Vibration and Shock，2023，42(15)：101-107.

[10] ZHAO Y L，XU Z D，WANG C. Wind vibration control of stay cables using magnetorheological dampers under optimal equivalent control algorithm[J]. Journal of Sound and Vibration，2019，443：732-747.

[11] ZHANG J J，MA Z Y，WANG X N，et al. Vibration control on coupled unit-plant structure of pumped storage power station during sudden load-up process[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2024，212：111333.

[12] JIANG M，RUI X T，YANG F F，et al. Design and dynamic performance research of MR hydro-pneumatic spring based on multi-physics coupling model[J]. Nonlinear Dynamics，2023，111(9)：8191-8215.

[13] DENG L，SUN S S，CHRISTIE M，et al. Investigation of a seat suspension installed with compact variable stiffness and damping rotary magnetorheological dampers[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2022，171：108802.

[14] GERBET D，RÖBENACK K. Application of LaSalle's invariance principle on polynomial differential equations using quantifier elimination[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2022，67(7)：3590-3597.

第一作者：张家明(1999—)，男，博士研究生。
E-mail：zjiaming@sjtu.edu.cn
通信作者：饶柱石(1962—)，男，博士，教授。
E-mail：zsrao@sjtu.edu.cn

粒子群优化的车内模糊主动噪声控制方法

张恩来[1]，彭智龙[1]，杜加福[1]，王 恒[1]，苏 亮[2]，林宝星[2]

（1. 厦门理工学院福建省客车先进设计与制造重点实验室，福建 厦门 361024；
2. 厦门金龙联合汽车工业有限公司新能源客车电控与安全技术国家地方联合工程实验室，福建 厦门 361023）

摘要：针对车内主动噪声控制 (ANC) 系统人工调试参数效率低及标准 FxLMS 算法收敛速度慢的问题，提出了一种融合粒子群优化 (PSO) 与 Takagi-Sugeno-Kang 模糊控制的改进 FxLMS 算法 (PSO-TSK-FxLMS)。该方法通过智能优化模糊控制增益参数，提升 ANC 系统的收敛速度和降噪性能。以误差信号的时间绝对偏差积分作为适应度函数，运用 PSO 算法全局寻优获取最优参数组合，并结合 TSK 模糊控制的非线性映射能力，实现自适应噪声控制。基于匀速和加速工况下的电动客车驾驶区实测噪声数据，ANC 仿真与硬件试验表明：相较于 TSK-FxLMS 算法和标准 FxLMS 算法，所建立的 PSO-TSK-FxLMS 模型在主动降噪和滤波收敛上具备可行性和优越性。正交试验设计与 PSO 寻优结果在参数空间解的邻近性验证了优化方案的可靠性，为车内 ANC 系统的自适应参数优化提供了思路。

关键词：车内噪声；主动噪声控制；TSK 模糊控制；FxLMS 算法；粒子群优化；正交试验
中图分类号：TB535；U121 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202506057

A method for vehicle interior fuzzy active noise control using particle swarm optimization

ZHANG Enlai[1], PENG Zhilong[1], DU Jiafu[1], WANG Heng[1], SU Liang[2], LIN Baoxing[2]

（1.Fujian Key Laboratory of Bus Advanced Design and Manufacture，Xiamen University of Technology，Xiamen 361024，China；
2.National and Local Joint Engineering Laboratory of New Energy Bus Electronic Control and Safety Technology，
Xiamen King Long United Automotive Industry Co.，Ltd.，Xiamen 361023，China）

Abstract: To address the issues of low efficiency in manual parameter tuning and slow convergence speed of the standard FxLMS algorithm in vehicle active noise control (ANC) systems，this study proposes an improved FxLMS algorithm integrating particle swarm optimization (PSO) with Takagi-Sugeno-Kang fuzzy control (PSO-TSK-FxLMS). The proposed method enhances the convergence speed and noise reduction performance of ANC systems through intelligent optimization of fuzzy control gain parameters. Taking the time absolute deviation integral of the error signal as the fitness function，the PSO algorithm is employed to globally search for the optimal parameter combinations，and combined with the nonlinear mapping capability of the TSK fuzzy control，the adaptive noise control is realized. Based on acquired interior noise data from the driver's area of an electric bus under constant-speed and acceleration conditions，ANC simulations and hardware tests demonstrate that compared with the TSK-FxLMS algorithm and the standard FxLMS algorithm，the established PSO-TSK-FxLMS model exhibits superior feasibility and effectiveness in active noise reduction and filter convergence. The proximity of the optimal solutions obtained from the orthogonal experimental design and PSO optimization in the parameter space verifies the reliability of the proposed optimization scheme，which provides a novel approach for adaptive parameter optimization in vehicle ANC systems.

Keywords: vehicle interior noise; active noise control; TSK fuzzy control; FxLMS algorithm; particle swarm optimization; orthogonal experiment

随着新能源汽车技术的快速发展与市场普及，人们对电动客车的噪声控制提出更高要求。相较于 2010 版的国家标准，新颁布的《客车车内噪声限值及测量方法》(GB/T 25982—2024)[1] 增加了电动客车在匀速和加速工况下的噪声限值要求，这进一步凸显车内噪声控制的重要性。由于驱动电机替代传统发动机，电动客车车内的背景噪声水平普遍较低，使得许多在燃油车上被掩盖或不易发觉的噪声类型显

收稿日期：2025-06-26；**修订日期：**2025-10-14
基金项目：国家自然科学基金资助项目（12004136）；福建省自然科学基金资助项目（2023J011438）；福建省教育厅教研重大项目 (FBJY20230154)；中国博士后科学基金资助项目（2019M662252）

得更加突出，例如空调噪声、电磁噪声、轮胎路噪声及电驱桥传动异响等[2-3]；在这些噪声源的综合作用下，车内噪声控制问题变得更复杂。传统的减振、吸声与隔声等被动控制措施在低频和时变噪声场景下往往效果有限[4]。因此，基于有源消声原理的主动噪声控制（ANC）方法成为解决该问题的重要途径。

在实际应用中，基于前馈自适应的 ANC 系统能有效应对时变环境下的噪声控制需求[5]。该系统通过布置参考麦克风实时采集环境噪声信号，由自适应控制器通过算法计算并生成相位相反、幅值相等的声波，通过次级扬声器输出，从而在目标区域实现噪声能量的主动抵消[6-7]。这种闭环控制系统的核心优势在于能够动态跟踪噪声源特征变化，实现频域内的实时噪声控制[8]。可见，有源前馈 ANC 系统的关键在于控制算法，由 Burgess 推导验算的 FxLMS 算法因具有运算量小和易硬件实现等优点已成为现有 ANC 的基准算法，该算法通过次级通道估计对参考信号进行预滤波，计算滤波后的参考信号与误差信号的瞬时乘积估计梯度[5, 9-12]。由于次级通道估计误差及步长约束，其收敛速度通常较标准 LMS 算法更慢[13]。为解决这一问题，基于 FxLMS 的改进算法成为研究热点。例如，SUGIURA 等[14] 提出频域加权的 FxLMS 算法，即根据窄带噪声的幅频特性动态调整权重，以提高时变窄带噪声的跟踪性能；ZHANG 等[10] 提出归一化频域块的 FxLMS 算法，将滤波器输入信号和滤波后信号进行频域归一化处理，并针对高速行驶的车内噪声开展 ANC 仿真，验证了该算法具有更快的收敛速度。张立军等[15] 构建了基于归一化参考信号 FxLMS 算法的车内道路噪声主动控制系统，并在环试验平台验证算法的有效性；李飞等[16] 提出基于 sigmoid-sinh 分段函数的 FxLMS 算法，采用高斯白噪声和实测噪声为输入信号，ANC 仿真结果表明该算法的平均降噪量和收敛速度得到大幅提升。ZHANG 等[17] 提出基于 Takagi-Sugeon-Kang 模糊控制的 FxLMS 改进算法（TSK-FxLMS），并以电动客车驾驶区匀速和加速的车内噪声信号验证了该算法的可行性；然而，其模糊控制器的增益参数依赖人工经验设定，存在调试效率低且难以保证全局最优的问题。

因此，本文在此基础上引入全局参数寻优能力强且搜索速度快的粒子群优化（PSO）算法，提出基于 PSO-TSK-FxLMS 的 ANC 参数优化方法，旨在构建一种融合智能优化与模糊控制的自适应降噪框架，为复杂非线性 ANC 系统的参数全局优化提供可行思路。为验证该框架的有效性，设计正交试验并搭建硬件实物测试平台，通过 ANC 仿真与试验探究其降噪性能。

1 TSK-FxLMS 算法

图 1 为基于 TSK-FxLMS 算法的 ANC 运行框架，其中 $W(z)$ 为自适应滤波器，$x(n)$、$d(n)$、$y(n)$、$s(n)$、$r(n)$、$e(n)$ 和 $\Delta e(n)$ 分别为参考信号、期望信号、输出信号、次级信号、滤波参考信号、误差信号和其积分信号。相较于标准的 FxLMS 算法，该算法引入模糊控制器，用于控制误差信号，即以误差信号及其积分信号作为模糊控制的输入量，经过模糊化后进入模糊推理；在 TSK 型模糊规则约束下，推理模块对模糊输入量进行运算处理，产生相应的模糊输出量；而去模糊化将给定的模糊输出量转换为明确的控制信号，作为 FIR 滤波器的输入量。根据图 1 可知：$e(n)$ 和 $\Delta e(n)$ 为模糊控制的输入量，经模糊控制机制后输出量为 k_p、k_i 和 k_d；$e'(n)$ 为模糊控制的增益输出量，即为 FIR 滤波器的输入量。

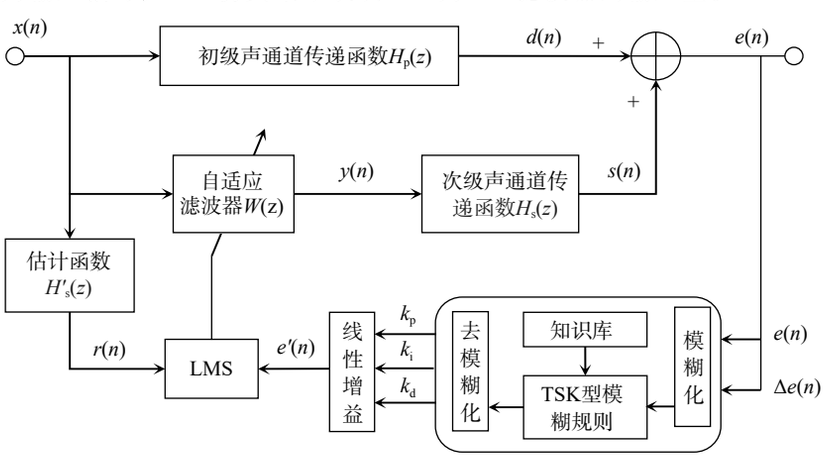


图 1 基于 TSK-FxLMS 算法的 ANC 原理

Fig. 1 Principle of ANC based on TSK-FxLMS algorithm

该控制系统包括信号处理、控制滤波器权值更新及模糊控制。假设滤波器阶数为 L，则第 n 时刻横向滤波器权系数和参考信号以矢量形式可分别表示为：

$$\boldsymbol{W}(n)=[w_0(n),w_1(n),\cdots,w_L(n)]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{X}(n)=[x(n),x(n-1),\cdots,x(n-L+1)]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

根据参考信号, 计算滤波器的输出信号:

$$y(n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}(n)=\sum_{l=1}^{L}w_l(n)x(n-l+1) \tag{3}$$

滤波器的输出信号通过次级声通道, 获得次级声信号:

$$s(n)=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}(n)=\sum_{l=1}^{L}w_l(n)r(n-l+1) \tag{4}$$

式中, $r(n)$为滤波-x 信号。由它组成的列变量称为滤波-x 信号矢量, 即

$$\boldsymbol{r}(n)=[r(n),r(n-1),\cdots,r(n-L+1)]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

滤波-x 信号矢量与参考信号的矢量关系为:

$$\boldsymbol{r}(n)=\boldsymbol{X}(n)*h'(n) \tag{6}$$

式中, $h'(n)$为$H_{\mathrm{s}}'(z)$的脉冲响应; "*"表示卷积运算。

因此, 期望信号与次级信号经叠加后, 获得的误差信号可表示为:

$$e(n)=d(n)+s(n)=d(n)+\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}(n) \tag{7}$$

采用最陡下降法原理递推滤波器权系数, 得到以下的矢量迭代公式:

$$\boldsymbol{W}(n+1)=\boldsymbol{W}(n)-2\mu e'(n)\boldsymbol{r}(n) \tag{8}$$

式中, μ为收敛系数, 用于控制收敛速度和系统稳定性; $e'(n)$为模糊控制输出量, 由"两输入-三输出"的模糊控制机制进行线性增益, 即

$$e'(n)=ak_{\mathrm{p}}+bk_{\mathrm{i}}+ck_{\mathrm{d}} \tag{9}$$

式中, k_{p}、k_{i} 和 k_{d} 为误差信号 $e(n)$ 及其积分信号 $\Delta e(n)$ 经模糊控制机制后的输出量; a、b 和 c 分别为输出量的增益系数。

该模糊控制机制包含 4 个核心模块: 模糊化、知识库、模糊推理和去模糊化[18]。其中, 模糊化的作用是将精确输入量 $e(n)$ 和 $\Delta e(n)$ 转化为模糊变量: NB(负大)、NS(负小)、Z(零)、PS(正小)和 PB(正大), 其含义见图 2; 而去模糊化是将模糊推理得到的模糊量转换成控制的精确量。在模糊推理系统, 隶属度函数作为核心数学工具, 通过定义在 [0, 1] 区间的连续函数以表征元素对模糊集合的归属程度, 用于定量描述精确量与模糊量之间的映射关系。文中所选的高斯型隶属度函数具有结构简单和计算效率高等特点, 其数学表达示为[19]:

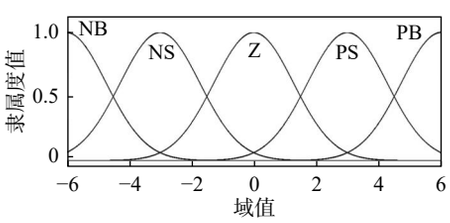


图 2　高斯型隶属度函数

Fig. 2　Membership function of Gaussian

$$f(x,\sigma,\varepsilon)=\mathrm{e}^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{2\sigma^2}} \tag{10}$$

式中, σ通常为正数; ε用于确定曲线的中心。

模糊规则是模糊控制器的关键, TSK 型模糊规则作为一种先进的模糊推理模型, 其特点在于采用加权平均算法实现模糊推理过程的解析化处理; 相比传统 Mamdani 型, TSK 型以更少的规则数量实现复杂非线性系统的精确逼近, 适合实时控制系统[20]。因此, 采用 TSK 型模糊规则逼近 ANC 系统中的非线性传递函数, 通过局部线性化实现全局非线性映射。表 1~3 为基于"if-then"TSK 型 3 个输出量的模糊规则, 共产生 25 条模糊规则, 其输出形式描述为:

$$k_{\mathrm{p}}=\frac{\sum_{j=1}^{25}\beta_j(M_j+Q_j\times e_j(n)+K_j\times\Delta e_j(n))}{\sum_{j=1}^{25}\beta_j} \tag{11}$$

$$k_{\mathrm{i}}=\frac{\sum_{j=1}^{25}\beta_j(S_j+F_j\times e_j(n)+G_j\times\Delta e_j(n))}{\sum_{j=1}^{25}\beta_j} \tag{12}$$

$$k_{\mathrm{d}}=\frac{\sum_{j=1}^{25}\beta_j(L_j+H_j\times e_j(n)+E_j\times\Delta e_j(n))}{\sum_{j=1}^{25}\beta_j} \tag{13}$$

式中, β_j 为第 j 条规则的激活强度; M_j、Q_j、K_j、S_j、F_j、G_j、L_j、H_j 和 E_j 均为线性输出方程的实参数, 共同构成模糊逻辑系统的固有特征。

表 1　k_{p} 的模糊输出规则

Tab. 1　Fuzzy output rules for k_{p}

模糊变量	NB	NS	Z	PS	PB
NB	PB	PS	PS	PS	Z
NS	PS	PS	PS	Z	NS
Z	PS	PS	Z	NS	NS
PS	PS	Z	NS	NS	NS
PB	Z	NS	NS	NS	NB

表 2　k_{i} 的模糊输出规则

Tab. 2　Fuzzy output rules for k_{i}

模糊变量	NB	NS	Z	PS	PB
NB	NB	NS	NS	NS	Z
NS	NB	NS	NS	Z	PS
Z	NS	NS	Z	PS	PS
PS	NS	Z	PS	PS	PB
PB	Z	PS	PS	PS	PB

表 3　k_{d} 的模糊输出规则

Tab. 3　Fuzzy output rules for k_{d}

模糊变量	NB	NS	Z	PS	PB
NB	PS	NB	NB	NB	PS
NS	Z	NS	NS	NS	Z
Z	Z	NS	NS	NS	Z
PS	Z	Z	Z	Z	Z
PB	PB	PS	PS	PS	PB

2 提出的 PSO-TSK-FxLMS 算法

由式(9)可知：a、b 和 c 是影响 $e'(n)$的重要系数，其参数调优是提升 ANC 系统性能的关键环节。为自适应调整这 3 个控制系数以获取更优的 ANC 降噪效果，引入搜索速度快的 PSO 算法，提出基于 PSO-TSK-FxLMS 的 ANC 参数优化方法，流程如图 3 所示。

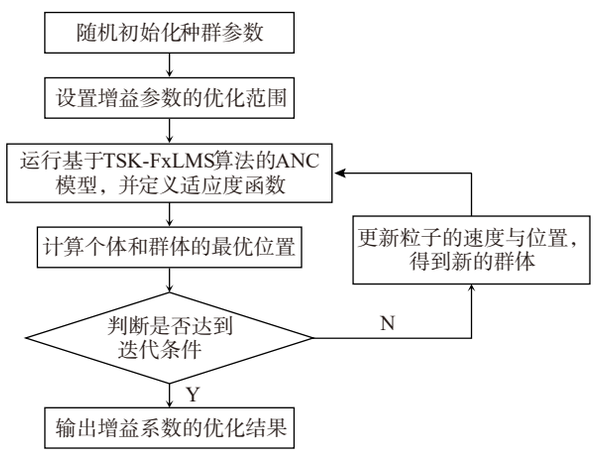


图 3 基于 PSO-TSK-FxLMS 算法的 ANC 参数优化

Fig. 3 ANC parameter optimization process based on PSO-TSK-FxLMS algorithm

(1)随机初始化种群，设定增益系数的解集范围、惯性权重初始值、种群规模、粒子的速度 $v_{\max}$ 和 $v_{\min}$，以及最大迭代次数等；随机初始化粒子的位置 x_i(即增益系数 k_{p}、k_{i} 和 k_{d})和速度 v_i。

(2)运行基于 TSK-FxLMS 算法的 Simulink 模型，实时获取误差信号，以其时间绝对偏差积分作为适应度函数，计算公式为：

$$f(t)=\int_0^{t_{\mathrm{s}}} t\,|e(t)|\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

式中，$e(t)$ 为误差信号；t_{s} 为控制参数或适应度函数趋于稳定的时间，单位为 s。

该适应度函数由控制开始到当前稳态时刻的绝对误差信号值的累加和计算得出，表征在此时间段内 ANC 系统的累计控制误差；对于每个粒子而言，在对应的参数下运行一段时长的 ANC 仿真，该过程的时间绝对误差积分即为其适应度值，而 PSO 算法的优化目标是寻找能使该累积误差最小化的参数组合。

(3)计算每个粒子的适应度，更新个体和粒子群的最佳适应度；若当前粒子适应度值优于其历史最优值，则更新个体最优解及其对应适应度；若同时优于群体历史最优值，则同步更新全局最优解及群体最优适应度。

(4)判断当前迭代次数是否满足终止条件，若满足则停止迭代，执行步骤(6)，否则执行步骤(5)。

(5)更新粒子的速度和位置，得到新的群体；同时返回步骤(2)开始新一轮迭代。速度和位置的更新公式为：

$$v_{i+1}=\omega v_i+\theta_1 r_1(p_{\mathrm{best}}-x_i)+\theta_2 r_2(g_{\mathrm{best}}-x_i) \tag{15}$$

$$x_{i+1}=x_i+v_{i+1} \tag{16}$$

式中，x_{i+1}和 v_{i+1}为更新的粒子位置和速度；ω为惯性权重；θ_1和 θ_2为学习因子；r_1和 r_2为区间 [0,1] 的随机数；p_{best}和 g_{best}分别为个体和群体的历史最佳位置。

(6)输出全局最优解，即模糊控制增益系数的最优值。

图 4 为提出的基于 PSO-TSK-FxLMS 算法的 ANC 原理，其运行过程大致如下：(1)随机生成初始粒子

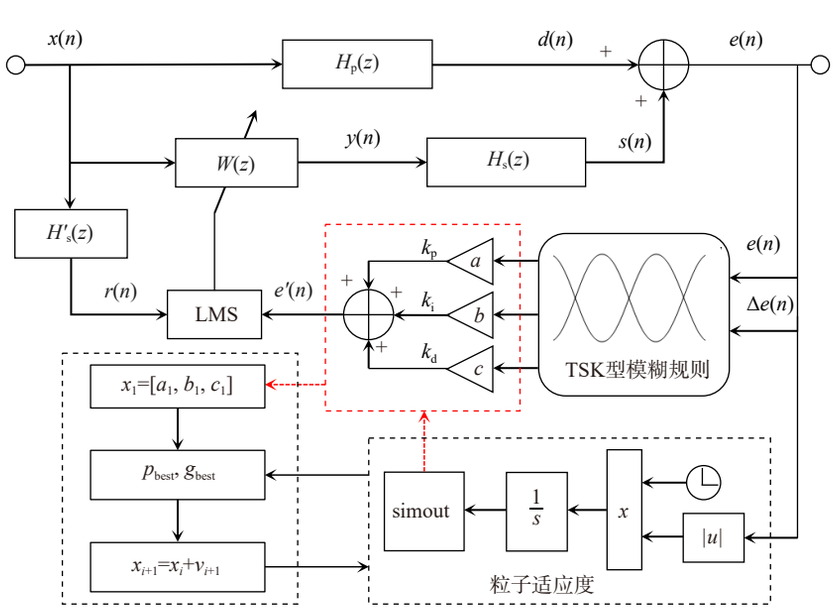


图 4 基于 PSO-TSK-FxLMS 算法的 ANC 原理

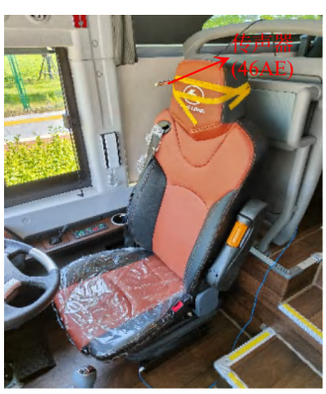
Fig. 4 Principle of ANC based on PSO-TSK-FxLMS algorithm

群，赋值模糊控制增益参数（k_p、k_i 和 k_d），并设置其优化范围；（2）输入参考信号，在 MATLAB/Simulink 运行基于 TSK-FxLMS 算法的 ANC 模型，根据输出的误差信号计算每个粒子适应度值；（3）评估个体和群体的最佳适应度，通过更新粒子的位置与速度调整控制参数，优化 ANC 系统性能；（4）当适应度函数达到最小且趋于稳定，则输出最优的控制参数组合。

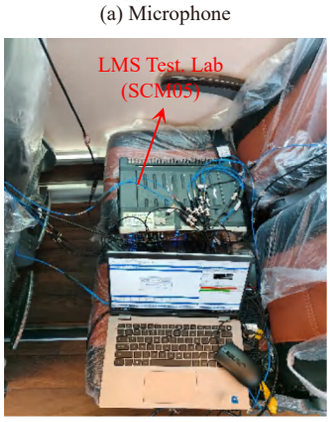
3　电动客车车内噪声信号采集试验与 ANC 仿真

3.1　车内噪声采集试验及频谱分析

为验证上述基于 PSO-TSK-FxLMS 算法的 ANC 有效性和优越性，以电动客车驾驶员位置的车内环境噪声为研究案例，根据《客车车内噪声限值及测量方法》（GB/T 25982—2024）[1]，采集 10~50 km/h 加速和 50 km/h 匀速 2 种工况的噪声信号，测试点场景和仪器如图 5 所示，采集仪器为 LMS Test. Lab 系统及 GRAS 传声器。通过快速傅里叶变换分析噪声频谱，图 6 表明，车内噪声 A 计权声压级（ASPL）的频谱特征主要集中于 500 Hz 以下的中低频。



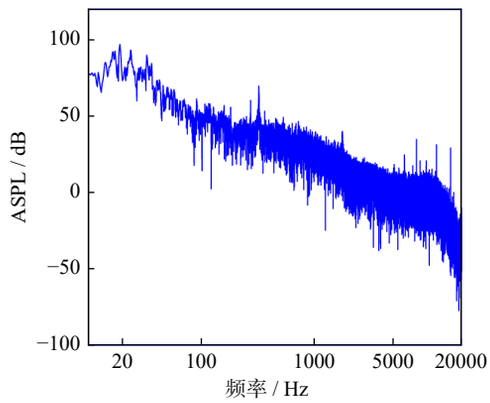
(a) 传声器
(a) Microphone



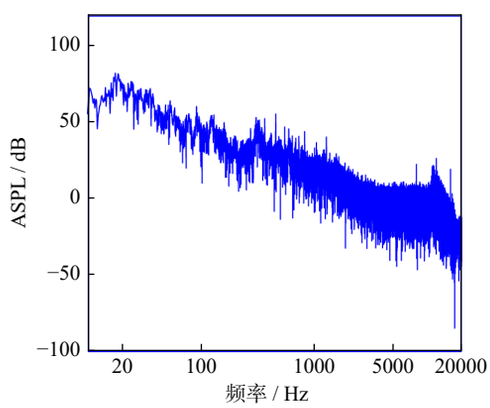
(b) 噪声采集系统
(b) Noise acquisition system

图 5　车内噪声信号采集场景及仪器

Fig. 5　Vehicle interior noise signal acquisition scene and instruments



(a) 匀速工况
(a) Uniform-speed condition



(b) 加速工况
(b) Acceleration condition

图 6　不同工况下的噪声信号频谱

Fig. 6　Noise signal spectra under different conditions

3.2　基于正交试验的 ANC 参数优化

前期研究结果表明基于 TSK-FxLMS 算法的 ANC 降噪效果和性能随着模糊控制增益系数的调整而显著变化，人工调试这些参数费时耗力，并且难以获得最优的控制效果[17]。由于正交试验的核心优势在于通过科学设计少量试验，高效地筛选出优异的参数组合方案，以降低多因素多水平的试验成本与时间，在噪声控制领域得到应用[21-22]。因此，在单一变量试验基础上，控制参数 a、b 和 c 的取值范围依次设置为 [−2, 2]、[0, 10] 和 [−2, 2]，并设计 3 因素 3 水平的正交实验，共有 9 种组合方案，具体如表 4 和 5 所列。

表 4　正交试验的因素和水平

Tab. 4　Factors and levels of orthogonal tests

水平	因素		
	a	b	c
1	−2	3	−2
2	0	6	0
3	2	9	2

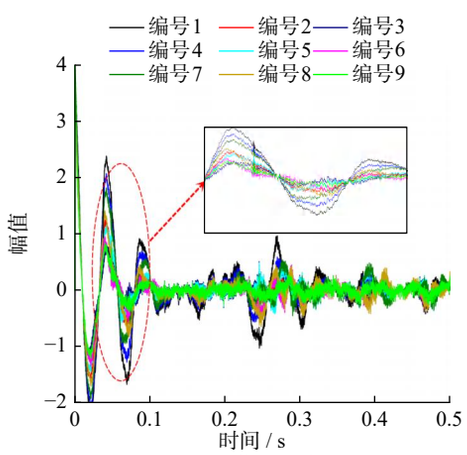
通过正交试验方法以系统评估这 9 组不同增益参数组合对 ANC 降噪性能的影响。将各参数组合

表 5 增益参数组合的正交表

Tab. 5 Orthogonal table of gain parameter combinations

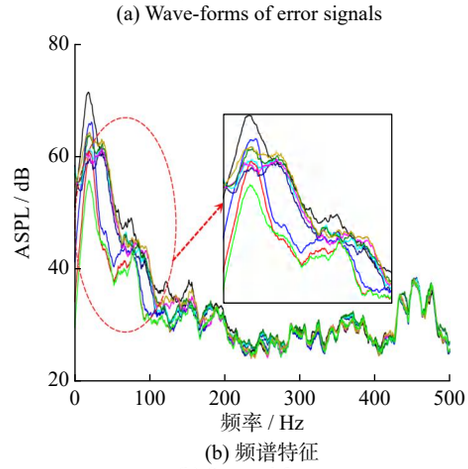
编号	*a*	*b*	*c*
1	−2	3	−2
2	−2	6	0
3	−2	9	2
4	0	3	0
5	0	6	2
6	0	9	−2
7	2	3	2
8	2	6	−2
9	2	9	0

代入图 1 所示控制模型进行滤波仿真，其中滤波器阶数 L=256，收敛系数 μ=0.001，图 7 和 8 分别以误差信号幅值和 ASPL 为评价指标。结果表明：在匀速工况下，各参数组合的误差信号在初始阶段（0.1 s 内）均表现出明显的振荡现象，随后除了编号 1 和 8，其余方案的波形多数趋于稳定。其中，编号 9 展现出



(a) 误差信号的波形

(a) Wave-forms of error signals

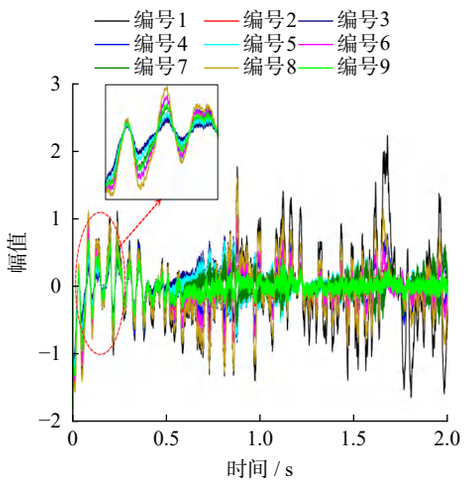


(b) 频谱特征

(b) Spectral features

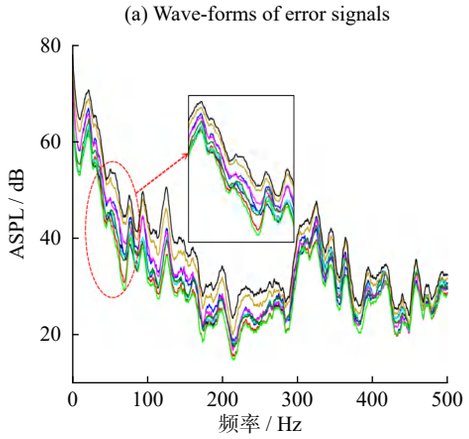
图 7 匀速工况下不同参数组合的仿真结果

Fig. 7 Simulation results of different parameter combinations under uniform-speed condition



(a) 误差信号的波形

(a) Wave-forms of error signals



(b) 频谱特征

(b) Spectral features

图 8 加速工况下不同参数组合的仿真结果

Fig. 8 Simulation results of different parameter combinations under acceleration condition

最佳的收敛特性，其误差信号幅值下降速率最快，且低频的 ASPL 最小。在加速工况下，受瞬变声压影响，多数参数组合的控制系统响应出现发散振荡，而编号 9 在经历短暂波动（0.5 s 内）后快速收敛，其低频幅值的整体变化与编号 3 相当，均达到最小值。

图 9 显示的降噪效果进一步验证上述结论：在匀速工况下，编号 9 实现了最大的噪声衰减量，较其他组合降低 2.45 dB 以上；在加速工况下，其降噪效果与组合 3 基本相当。基于收敛特性和降噪效果的综合评估，确定增益参数组合 [*a*, *b*, *c*]=[2, 9, 0] 为此次正交试验的优化方案，并将其作为后续算法对比的性能参考基准。该结果揭示了增益系数组合对 ANC 系统动态响应和频谱特性的显著影响，为后续参数优化提供重要的评估依据。

3.3 基于 PSO-TSK-FxLMS 算法的 ANC 参数优化

在 MATLAB/Simulink 分别建立基于 FxLMS 算法、TSK-FxLMS 算法和 PSO-TSK-FxLMS 算法的 ANC 模型，选取在匀速和加速工况下预先采集的车内噪声时域数据作为参考信号，并开展滤波仿真。控制系

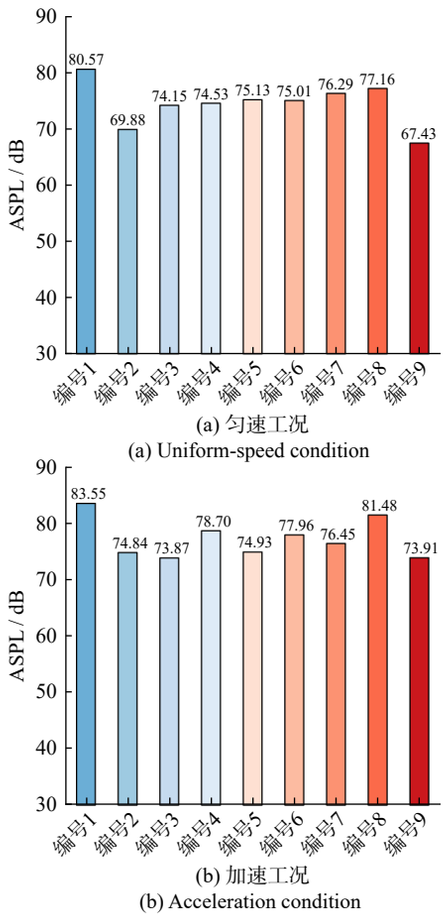
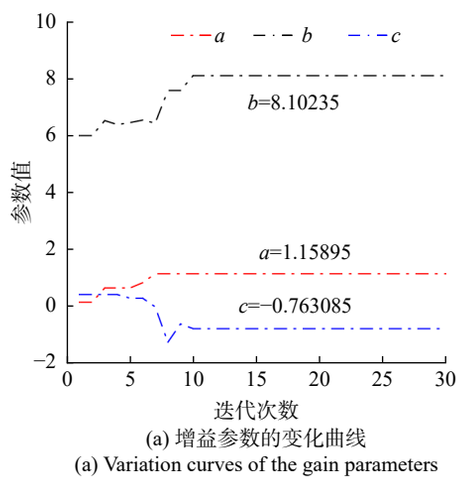


图 9　不同增益参数组合的 ASPL

Fig. 9　ASPL for different gain parameter combinations

统参数设置如下: 自适应滤波器阶数 L=256, 收敛系数μ=0.001; PSO 种群规模为 50, 惯性权重 w=0.4, 迭代次数为 30, 学习因子θ_1=θ_2=2; 增益参数 a、b 和 c 的优化范围依次为 [−2, 2]、[0, 10] 和 [−2, 2]。

收敛计算结果如图 10 和 11 所示, 2 种工况下的参数优化过程均呈现良好的收敛性。数值计算表明, 当迭代次数超过 10 次, 增益参数均达到稳定状态, 且对应的适应度函数值收敛至极小值, 这说明所获得的增益参数组合为最优解。具体而言, 匀速和加速工况下的最优参数组合 [a, b, c] 分别为 [1.15895,



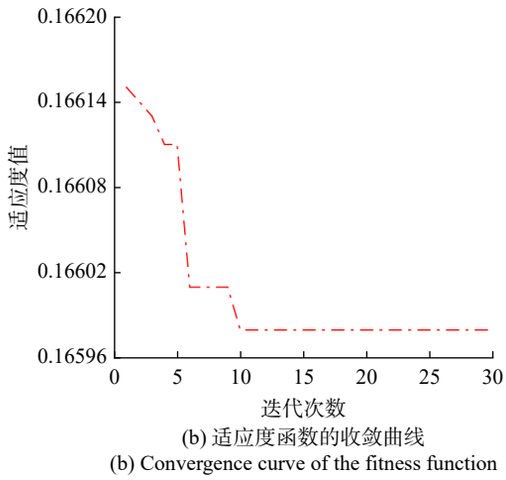
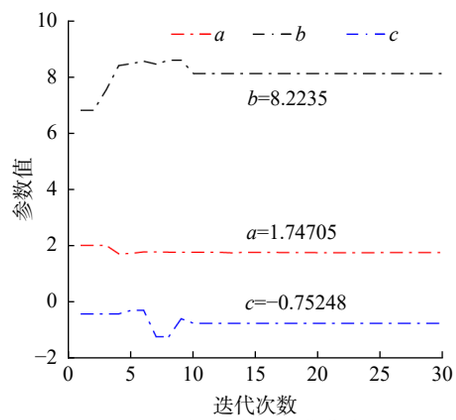


图 10　匀速工况的 ANC 优化结果

Fig. 10　ANC optimization results for uniform-speed condition



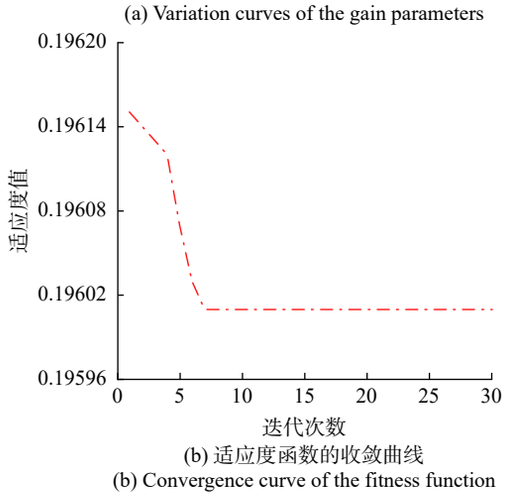


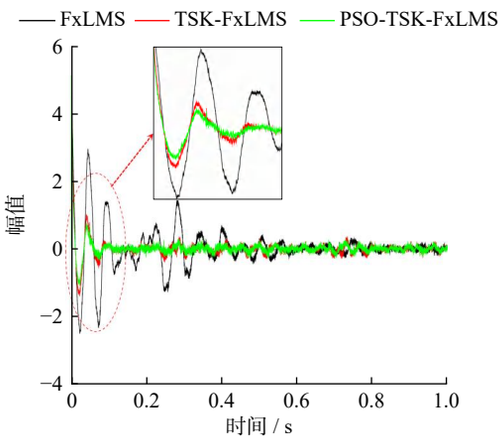
图 11　加速工况的 ANC 优化结果

Fig. 11　ANC optimization results for acceleration condition

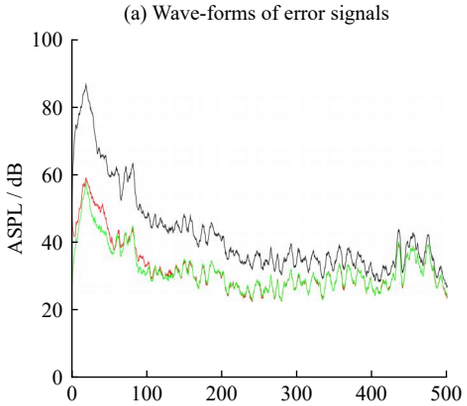
8.10235, −0.763085] 和 [1.74705, 8.2235, −0.75248]。优化结果验证了 PSO 算法对 TSK-FxLMS 模型参数寻优的有效性。

图 12 和 13 分别对比了匀速与加速工况下 3 种 ANC 模型的降噪性能。从匀速工况的时域波形可知, PSO-TSK-FxLMS 模型的误差信号在 0.1 s 内迅速衰减并进入稳态, 其收敛速度快于 TSK-FxLMS 模型和 FxLMS 模型(收敛缓慢且振荡持续更久), 并且低

频的 ASPL 达到最低值，中频段降噪性能与 TSK-FxLMS 模型相当；在加速工况下，各 ANC 模型的误差信号在起始阶段较为振荡，而后 PSO-TSK-FxLMS 模型相较于 TSK-FxLMS 模型和 FxLMS 模型是最快趋于稳定的。定量分析显示（表 6），PSO-TSK-FxLMS 模型的总体降噪量较 TSK-FxLMS 模型和 FxLMS 模型分别至少提高了 2.24 和 12.5 dB，验证了所提算法在收敛速度和降噪效果方面的综合优势。



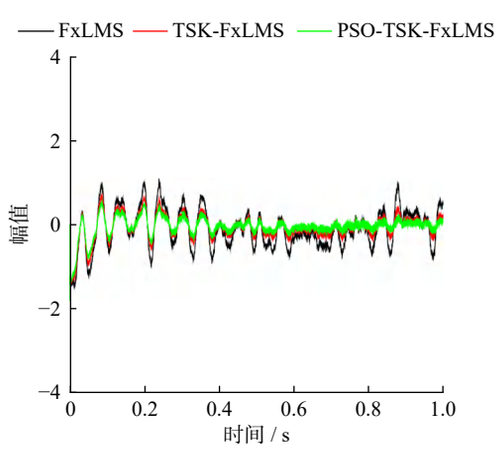
(a) 误差信号的波形
(a) Wave-forms of error signals



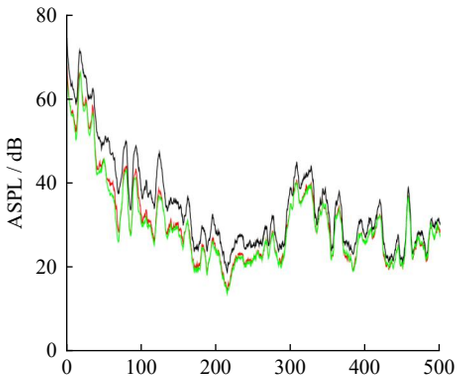
(b) 频谱特征
(b) Spectral features

图 12 匀速工况下不同 ANC 算法的仿真结果

Fig. 12 Simulation results of different ANC algorithms under uniform-speed condition



(a) 误差信号的波形
(a) Wave-forms of error signals



(b) 频谱特征
(b) Spectral features

图 13 加速工况下不同 ANC 算法的仿真结果

Fig. 13 Simulation results of different ANC algorithms under acceleration condition

表 6 不同 ANC 模型的仿真降噪效果（单位：dB(A)）

Tab. 6 Noise reduction performance of different ANC models in simulation（Unit: dB(A)）

工况	FxLMS	TSK-FxLMS	PSO-TSK-FxLMS
匀速	79.89	69.30	67.06
加速	84.40	77.62	71.90

4 ANC 算法的实物仿真试验与验证

4.1 构建基于 Arduino DUE 的 ANC 试验平台

为验证提出的 PSO-TSK-FxLMS 控制算法的有效性与硬件可实现性，搭建了基于 Arduino DUE 的低成本 ANC 试验平台如图 14 所示。该平台在符合 ISO 3745 标准的精密级半消声室内运行，其本底噪声值≤15 dB(A)，截止频率≤80 Hz，可有效消除外界环境噪声干扰。本试验的主要目的是在理想声学环境下，聚焦于验证控制算法本身的收敛性、稳定性

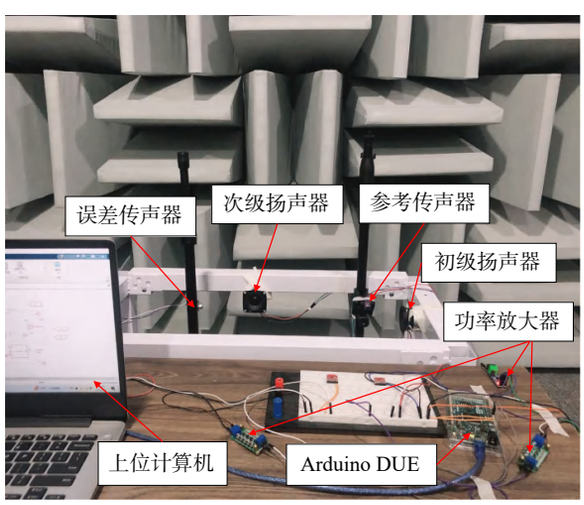


图 14 基于 Arduino DUE 的 ANC 试验平台

Fig. 14 ANC test platform based on Arduino DUE

与降噪潜力, 排除实车中诸多不确定性因素的干扰, 确保 ANC 测试环境的一致性和试验数据的可重复性, 从而为控制算法的核心性能对比提供可靠且可精确复现的试验条件。

试验平台整合处理器、传声器和扬声器等硬件实物及仿真模型, 构建一个完整的闭环测试环境。其中, 处理器为 32 位 ARM Cortex-M3 的 Arduino DUE 开发板, 运行主频为 84 MHz; 传声器为低功耗的 MAX4466; 功率放大器为工作电压 5~12 V 的 LM386; 采样频率为 12 kHz。该试验平台的执行框架为: (1) 在 MATLAB/Simulink 环境中建立 ANC 模型, 并通过 Configuration parameters 界面完成硬件接口配置、通信协议设置以及模型可执行任务的定义; (2) 利用嵌入式编码器将控制算法编译为目标处理器的可执行文件; (3) 部署可执行文件至 Arduino DUE 控制器, 在实现实时 ANC 的同时, 借助上位机监测控制系统采集并记录误差信号的时域波形数据。

4.2　ANC 仿真试验与结果

在 ANC 试验前, 采用操作简便、建模精度高的附加噪声法对该硬件平台的次级声通路进行离线辨识, 获得次级声通路的脉响应曲线, 如图 15 所示。

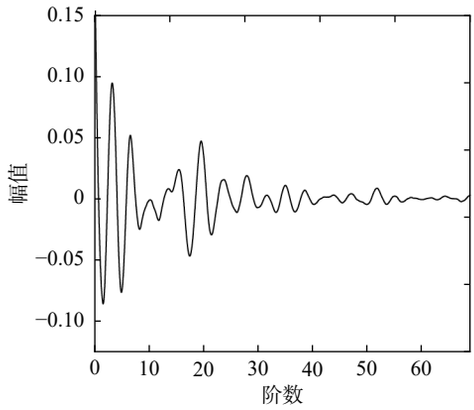


图 15　次级声通路的传递函数

Fig. 15　Transfer function of the secondary acoustic path

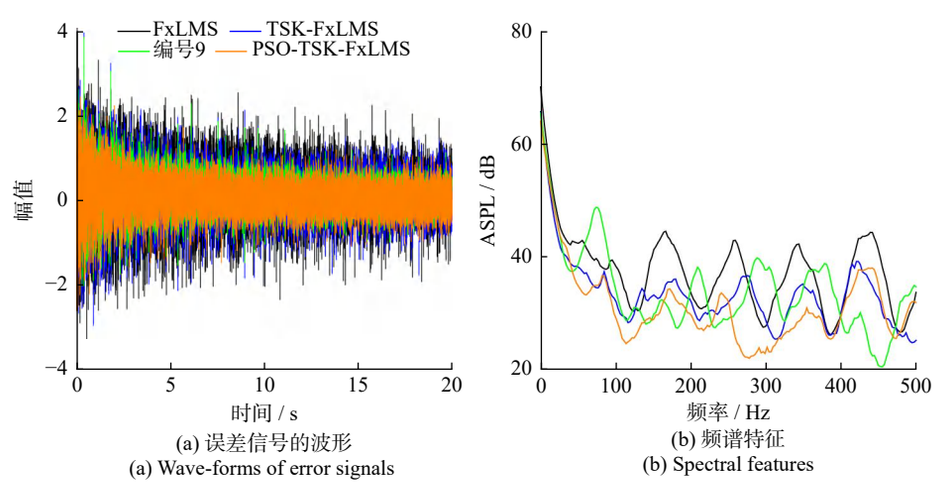
基于上述试验平台和次级声通路辨识, 在 MATLAB/Simulink 分别建立不同工况的 4 种 ANC 模型, 具体设置的结构参数如表 7 所列。导入匀速和加速工况的时域声压数据, 由初级扬声器进行播放, 运行所建立的 ANC 模型, 实时采集误差传声器的噪声信号, 其波形及频谱特征如图 16 和 17 所示。

表 7　不同 ANC 模型的结构参数

Tab. 7　Structural parameters of different ANC models

工况	FxLMS	TSK-FxLMS	编号9	PSO-TSK-FxLMS
匀速	L=256, μ=0.001	L=256, μ=0.001, a=0.5, b=−0.5, c=8	L=256, μ=0.001, a=2, b=9, c=0	L=256, μ=0.001, a=1.15895, b= 8.10235, c=−0.763085
加速	L=256, μ=0.001	L=256, μ=0.001, a=0.5, b=−0.5, c=8	L=256, μ=0.001, a=2, b=9, c=0	L=256, μ=0.001, a=1.74705, b=8.2235, c=−0.75248

图 16 和 17 的试验结果表明, 4 种 ANC 模型的降噪性能存在差异性, 整体上各模型的误差信号时域幅值由高至低排序依次为: FxLMS 模型>TSK-FxLMS 模型>正交试验优化参数组合(编号 9)的 TSK-FxLMS 模型>PSO-TSK-FxLMS 模型, 表明基于所提算法的 ANC 模型进入稳态时间短于其他对比模型。在频谱特性方面, 匀速工况下 PSO-TSK-FxLMS 模型表现出最优的低频降噪性能, 其 ASPL 在多数频段达到最低水平; 定量分析显示, 该模型较正交试验前后的 TSK-FxLMS 模型分别提升 1.0 和 2.7 dB 的降

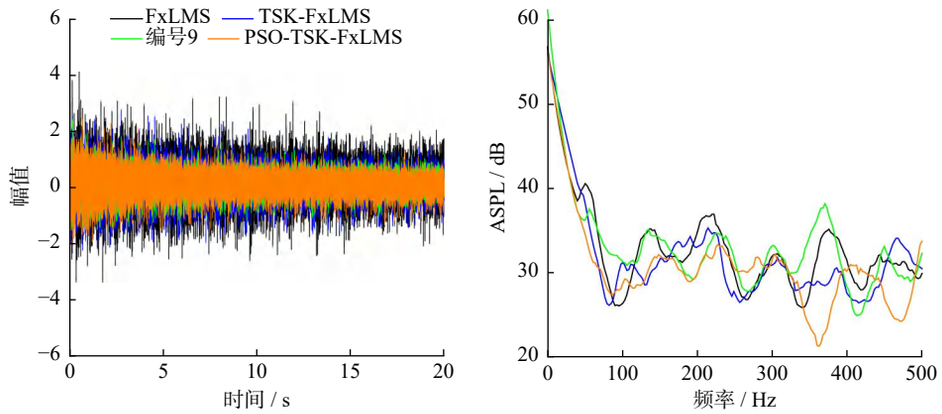


(a) 误差信号的波形
(a) Wave-forms of error signals

(b) 频谱特征
(b) Spectral features

图 16　匀速工况下不同 ANC 模型的试验结果

Fig. 16　Test results of different ANC algorithms under uniform-speed condition



(a) 误差信号的波形
(a) Wave-forms of error signals

(b) 频谱特征
(b) Spectral features

图 17 加速工况下不同 ANC 模型的试验结果

Fig. 17 Test results of different ANC algorithms under acceleration condition

噪量(见表 8);加速工况下,各模型的频谱响应呈现复杂特征,其中 PSO-TSK-FxLMS 模型在 3 个频段(0~60 Hz、340~400 Hz 和 360~500 Hz)均保持最低的 ASPL。表 8 的性能评估结果表明,PSO-TSK-FxLMS 模型的总体降噪量较正交试验前后的 TSK-FxLMS 模型分别至少提高 0.6 和 1.5 dB,较标准 FxLMS 模型则提升 4.2 dB 以上。ANC 仿真试验验证了所建立的 PSO-TSK-FxLMS 模型具有降噪优势。

表 8 不同 ANC 模型的试验降噪效果(单位:dB(A))

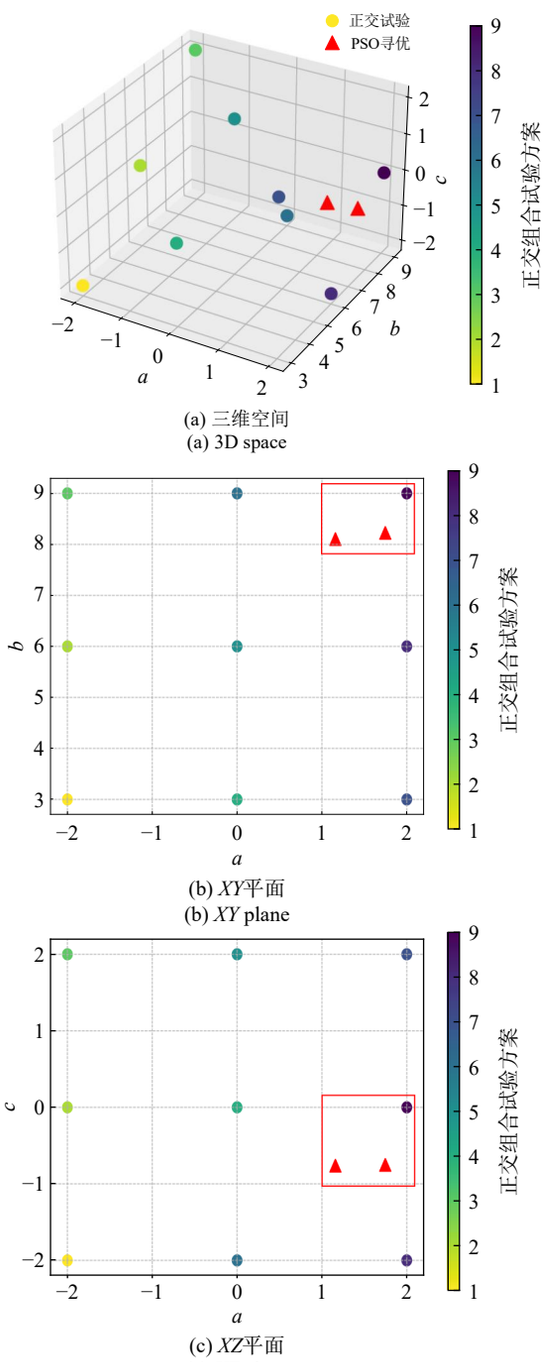
Tab. 8 Noise reduction performance of different ANC models in tests (Unit: dB(A))

工况	FxLMS	TSK-FxLMS[17]	编号9	PSO-TSK-FxLMS
匀速	87.4	85.9	84.2	83.2
加速	87.1	83.8	82.9	82.3

5 讨 论

本研究引入正交试验方法和 PSO 算法分别优化 TSK-FxLMS 模型的模糊控制增益参数,获得以下相应的参数组合 [*a*, *b*, *c*]:正交试验编号 9 的 [2, 9, 0],以及匀速和加速工况的 [1.15895, 8.10235, −0.763085] 和 [1.74705, 8.2235, −0.75248]。

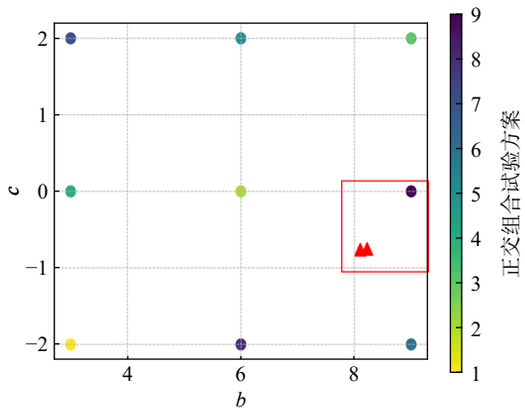
为探究这 2 种优化方法在多维参数空间解的关联性,基于表 5 及上述优化参数组合,构建多维参数空间分布图。图 18 表明,尽管正交试验(网格化广域搜索)与 PSO 算法(迭代定向收敛)在参数空间探索策略上存在本质差异,但二者获得的优化解在空间分布上呈现显著邻近性:正交试验优化解(紫色圆形)与 PSO 最优解(红色三角形)在多维空间上相接近,这验证了 PSO 在增益参数寻优轨迹的合理性,且更优的降噪性能(见表 8)表明其在复杂的非线性 ANC 系统中更具全局寻优能力。



(a) 三维空间
(a) 3D space

(b) *XY*平面
(b) *XY* plane

(c) *XZ*平面
(c) *XZ* plane



(d) *YZ*平面
(d) *YZ* plane

图 18　参数优化的结果分布

Fig. 18　Distribution of parameter optimization results

6　结　论

（1）以预采集的匀速和加速工况下的客车驾驶区噪声为参考信号，构建基于 PSO-TSK-FxLMS 算法的 ANC 仿真模型，其降噪量比 TSK-FxLMS 模型提高 2.24 dB 以上，同时该算法的误差信号能更快地结束瞬时振荡以进入稳态，有效提升了收敛速度和降噪性能。

（2）搭建基于 Arduino DUE 的硬件实物平台并开展 ANC 试验，在降噪效果和收敛性能上，试验与仿真结果相一致，验证了算法的有效性。

（3）PSO 寻优结果与正交试验的较优参数组合方案在空间分布上相邻近，且前者具有更佳的降噪性能，说明智能算法在解决 ANC 高维参数优化上更具优势。

（4）研究结果表明，PSO-TSK-FxLMS 算法在收敛速度与降噪量上均得到提升，验证了 PSO 全局优化与 TSK 模糊控制的融合策略在 ANC 框架上的可行性。该研究为面向复杂实车环境的主动噪声控制系统提供了参数自适应优化的理论依据，并奠定相应的技术基础。

参考文献：

[1] 国家市场监督管理总局，国家标准化管理委员会. 客车车内噪声限值及测量方法：GB/T 25982—2024[S]. 北京：中国标准出版社，2024.
State Administration for Market Regulation of the People's Republic of China, Standardization Administration of the People's Republic of China. Limits and measurement methods for bus interior noise：GB/T 25982—2024[S]. Beijing：Standards Press of China，2024.

[2] 王少华，谭博欢，张邦基，等. 纯电动客车振动试验分析及动力总成隔振优化 [J]. 振动与冲击，2021，40(1)：226-232.
WANG Shaohua，TAN Bohuan，ZHANG Bangji，et al. Vibration test analysis and powertrain vibration isolation optimization of pure electric bus[J]. Journal of Vibration and Shock，2021，40(1)：226-232.

[3] ZHANG E L，CHEN Y，ZHONGLIAN R Y. Electric bus interior sound quality prediction by combining time domain analysis and machine learning[J]. Chinese Journal of Acoustics，2025，44(1)：84-101.

[4] 卢炽华，孙孟雷，刘志恩，等. 主动冲击噪声控制自适应算法综述及综合性能分析 [J]. 机械工程学报，2022，58(13)：101-118.
LU Chihua，SUN Menglei，LIU Zhien，et al. Review and performance analysis of adaptive algorithms for active impulsive noise control[J]. Journal of Mechanical Engineering，2022，58(13)：101-118.

[5] 崔怀峰，胡如夫，陈南. 多智能体的振动噪声前馈主动控制技术 [J]. 振动工程学报，2017，30(1)：62-70.
CUI Huaifeng，HU Rufu，CHEN Nan. Multi-gent feedforward active vibration control technology[J]. Journal of Vibration Engineering，2017，30(1)：62-70.

[6] WEN S Q，DENG F，SU C Q，et al. Addressing aerodynamic noise in vehicles：a hybrid method for noise reduction and signal preservation[J]. Applied Acoustics，2025，236：110747.

[7] DUAN H J，SHI L，WANG S P，et al. Case study：reference optimization for active control of air conditioning noise at defrost mode in vehicles[J]. Noise Control Engineering Journal，2024，72(1)：1-7.

[8] 邓慧萍，卢炽华，陈弯，等. 车内集群式多通道主动噪声控制系统研究 [J]. 汽车工程，2025，47(5)：970-981.
DENG Huiping，LU Chihua，CHEN Wan，et al. Research on clustered multi-channel active noise control system in car[J]. Automotive Engineering，2025，47(5)：970-981.

[9] ZHOU Z D，CHEN S M，LI H J，et al. Delayless partial subband update algorithm for feed-forward active road noise control system in pure electric vehicles[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，196：110328.

[10] ZHANG S，WANG Y S，GUO H，et al. A normalized frequency-domain block filtered-x LMS algorithm for active vehicle interior noise control[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2019，120：150-165.

[11] 周雪莲，贺岩松，苏宏健，等. 基于可变阶陷波算法的混合动力汽车阶次噪声主动控制 [J]. 中国机械工程，2024，35(11)：2082-2089.
ZHOU Xuelian，HE Yansong，SU Hongjian，et al. Active order noise control of hybrid electric vehicles based on variable order Notch filter algorithm[J]. China Mechanical Engineering，2024，35(11)：2082-2089.

[12] 欧健，彭沸潭，张庆庭，等. 极限梯度提升声品质预测模

型在车内噪声主动控制中的运用 [J]. 振动工程学报，2023，36(5)：1349-1355.
OU Jian，PENG Feitan，ZHANG Qingting，et al. Application of extreme gradient boosting sound quality prediction model in active control of interior noise[J]. Journal of Vibration Engineering，2023，36(5)：1349-1355.

[13] LU L，YIN K，DE LAMARE R C，et al. A survey on active noise control in the past decade—Part I：linear systems[J]. Signal Processing，2021，183：108039.

[14] SUGIURA Y，NOGUCHI R，SHIMAMURA T. Frequency-domain weighted FxLMS algorithm for feedback active noise control[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics，Communications and Computer Sciences，2025，E108.A(3)：323-331.

[15] 张立军，张希玉，孟德建. 基于 NFXLMS 算法的车内道路噪声主动控制系统 [J]. 振动与冲击，2020，39(21)：173-178.
ZHANG Lijun，ZHANG Xiyu，MENG Dejian. Active control system of vehicle interior road noise based on NFXLMS algorithm[J]. Journal of Vibration and Shock，2020，39(21)：173-178.

[16] 李飞，黄双，郭辉，等. 基于 sigmoid-sinh 分段函数的变步长 FxLMS 算法 [J]. 东华大学学报(自然科学版)，2024，50(1)：93-100.
LI Fei，HUANG Shuang，GUO Hui，et al. Variable step-size FxLMS algorithm based on sigmoid-sinh piecewise function[J]. Journal of Donghua University（Natural Science），2024，50(1)：93-100.

[17] ZHANG E L，PENG Z L，CHEN Y，et al. An improved Takagi-Sugeon-Kang-based FxLMS algorithm and its active noise control in electric bus driving position[J]. Journal of Vibration and Control，2025，31(17-18)：3831-3844.

[18] LU Y K. Adaptive-fuzzy control compensation design for direct adaptive fuzzy control[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2018，26(6)：3222-3231.

[19] TOLGA A C，PARLAK I B，CASTILLO O. Finite-interval-valued Type-2 Gaussian fuzzy numbers applied to fuzzy TODIM in a healthcare problem[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence，2020，87：103352.

[20] PENG T R，ZHU Q M，TOKHI M O，et al. Fuzzy logic feedforward active noise control with distance ratio and acoustic feedback using Takagi-Sugeon-Kang inference[J]. Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control，2020，39(1)：174-189.

[21] 张肃，陈南，车华军. 封闭空间有源噪声控制次级声源优化策略 [J]. 东南大学学报(自然科学版)，2009，39(4)：779-784.
ZHANG Su，CHEN Nan，CHE Huajun. Optimal strategy for the second source in enclosure under active noise control[J]. Journal of Southeast University（Natural Science Edition），2009，39(4)：779-784.

[22] 郭栋，张韬，李文礼，等. 结构-电磁激励下某电驱总成噪声控制 [J]. 中国公路学报，2021，34(11)：349-358.
GUO Dong，ZHANG Tao，LI Wenli，et al. Noise control for electric drive assembly under structure- electromagnetic excitation[J]. China Journal of Highway and Transport，2021，34(11)：349-358.

第一作者：张恩来(1986—)，男，博士，副教授。
E-mail：zhangel@xmut.edu.cn

通信作者：苏 亮(1980—)，男，博士，教授级高级工程师。
E-mail：slkinglong@163.com

考虑压电智能结构内部正反馈的改进 Youla-Kučera 参数化前馈鲁棒自适应振动主动控制

欧阳珊，徐童欣，朱晓锦，高志远

（上海大学机电工程与自动化学院，上海 200444）

摘要：基于压电智能结构开展振动主动控制，控制作动器的控制作用会对参考传感器采集到的振动参考信号产生结构内部正反馈，导致控制器的性能下降甚至失效。为保证内部反馈回路的稳定性，增强振动主动控制器的自适应和鲁棒性能，本文结合自适应滤波控制与鲁棒控制，基于 Youla-Kučera 参数化方法提出了一种前馈鲁棒自适应振动控制器。通过引入历史时刻数据信息来改进参数自适应算法；引入基于误差阈值的平稳更新策略来提高参数估计精度。在系统辨识应用中，为更加精确且快速地估计不同阶次下的模型参数，进一步提出了针对不同模型部分参数分开估计的改进分段参数自适应算法。以粘贴压电纤维复合材料（macro-fiber composite, MFC）的航空发动机压电智能叶片为验证试验研究对象，构建了 xPC Target 实时控制系统（xPC target real-time control system），验证了本文提出的基于改进参数自适应算法的 Youla-Kučera 参数化前馈鲁棒自适应控制器在单频、多频及噪声干扰下振动控制的有效性。

关键词：振动主动控制；压电智能结构；参数自适应算法；Youla-Kučera 参数化；内部正反馈；ARMA 模型

中图分类号：TB535 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202505055

Youla-Kučera parameterization feedforward robust adaptive active vibration control of piezoelectric smart structures with internal positive feedback

OUYANG Shan, XU Tongxin, ZHU Xiaojin, GAO Zhiyuan

（School of Mechatronic Engineering and Automation，Shanghai University，Shanghai 200444，China）

Abstract: While active vibration control is carried out with piezoelectric smart structures，the control action of the actuators can generate structural internal positive feedback on the vibration reference signal collected by the reference sensor，leading to performance degradation or even failure of the controller. To ensure the stability of the internal feedback loop and enhance the adaptive and robust performance of the active vibration controller，this paper proposes a novel feedforward robust adaptive vibration controller based on the Youla-Kučera parameterization method by combining adaptive filtering control and robust control. By introducing historical data information to improve the parameter adaptation algorithm and incorporating a steady update strategy based on an error threshold，the accuracy of parameter estimation is enhanced. Furthermore，for system identification applications，an improved segmented parameter adaptation algorithm is proposed to separately estimate the parameters of different model segments，enabling more precise and rapid parameter estimation for models of varying orders. The effectiveness of the proposed Youla-Kučera parameterization-based feedforward robust adaptive controller with the improved parameter adaptation algorithm is verified under single-frequency，multi-frequency，and noise interference conditions using a piezoelectric smart blade of an aero-engine with bonded macro-fiber composite (MFC) with xPC target real-time control system.

Keywords: active vibration control; piezoelectric smart structures; parameter adaptation algorithm; Youla-Kučera parameterization; internal positive feedback; ARMA model

近年来，随着航空航天工业向高速度、高精度、长寿命方向发展，航空工业产品和相关技术对所使用的材料性能要求也越来越高。在此背景下，智能材料（如压电材料、形状记忆材料、巨磁致伸缩材料等）因其机电耦合特性，能够实现振动信号的实时感知与主动调控，在航空航天工业领域中表现出巨大的应用潜力[1-2]。其中压电智能结构基于压电材料的传感与致动作用，可以同时对动态系统进行主动感知与主动调节，具有自适应和快速响应的综合优异特性[3-5]。基于压电智能结构开展振动控制的相关技

收稿日期：2025-05-27；**修订日期：**2025-07-22

基金项目：国家自然科学基金资助项目（52175101）

术可以分为 3 类：(1)被动控制，通过压电材料的能量耗散实现减振；(2)半主动控制，通过调节外部电路参数，而非持续注入能量实现振动抑制；(3)主动控制，利用传感器-作动器闭环系统输出反向作用力，通过持续主动输入能量，在超宽频带内实现振动抑制[6-7]。其中，主动控制凭借优异的动态响应能力和智能应用潜力，已成为当前研究热点。然而，各种基于压电智能结构的振动主动控制系统对建模精度和控制算法的实时性要求较高，相关技术尚需进一步突破[8]。

在面向复杂扰动的振动主动控制方法的研究中，多种控制方法各有其优势与局限。PID 控制结构简单、易于实现，但对多模态和非线性振动抑制能力有限[9-10]；最优控制虽能优化全局性能，但依赖精确的系统模型，难以适应时变环境[11]；智能控制擅长处理复杂非线性问题，但计算成本高，实时性不足[12]；模糊控制对模型不确定性具有强鲁棒性，但设计复杂且可能因保守性牺牲动态性能[13]。

相比之下，参数自适应算法(PAA)通过在线调整参数，无需精确模型即可适应时变系统，兼具实时性与灵活性，成为振动控制的主流选择之一。然而传统 PAA 算法虽然能够实现参数在线调整，但在处理时变系统、噪声干扰和多模态振动时存在明显不足。如固定遗忘因子导致适应性不足，无法动态平衡历史数据与新数据的权重；固定步长难以同时满足快速收敛和低稳态误差的需求等。LU 等[14]采用宏纤维复合材料和滤波 x-最小均方(filtered-x least mean square, FxLMS)算法构建自适应闭环控制系统，有效了减少由不同振幅的复杂多频激励引起的振动。ZHANG 等[15]提出了一种具有自适应步长调整能力的 FxLMS 算法，能够有效适应可变载荷的时变特性。ZHANG 等[16]设计了一种 RU-FxLMS 控制器，在一定程度上弥补了低频线频谱振动自适应策略的不足。LIU 等[17]提出了基于 FxLMS 算法的自适应闭环主动控制系统，讨论了滤波器长度和自适应控制器收敛因子对控制效果的影响。LUO 等[18]设计了一种使用压电堆叠促动器的振动主动控制系统，比较了滤波 x-递推最小二乘(filtered-x recursive least squares, FxRLS)算法和 FxLMS 算法的控制性能。HUANG 等[19]提出了一种用于在线估计谐振频率的 VFF-RLS 算法。方昱斌等[20]针对多输入多输出的微振动主动控制系统，提出了一种结合死区和归一化的鲁棒 RLS 算法，在收敛速度和控制效果方面都得到了提升。

然而，基于压电智能结构的传感-控制一体化系统中，控制作动器的输出会引发参考传感器采集的振动信号发生结构内部正反馈，并与激振信号叠加形成耦合回路，导致控制器性能下降或失效[21-23]。为解决这一问题，LANDAU 等[24-27]在自适应前馈主动振动控制系统中引入 Youla-Kučera 参数化方法，给出了解决机械耦合问题的思路。但其采用的参数自适应算法对输出信号的求解仅依赖当前时刻估计的滤波器系数，当滤波器系数偏差较大时，估计的输出信号会与期望信号偏差较大，从而导致控制器失稳。

由此，本文首先探索了引入历史时刻数据信息改进参数的自适应算法，和基于误差阈值的平稳更新策略，提高参数估计精度。随后，针对压电智能结构振动主动控制中存在的内部正反馈问题，将自适应控制与鲁棒控制相结合，提出了一种基于 Youla-Kučera 参数化的前馈鲁棒自适应振动控制方法，有效解决了控制作动器输出对参考信号的内部正反馈干扰问题。

1 参数自适应算法

1.1 改进的参数自适应算法

参数自适应算法的核心思想就是通过递推迭代更新参数的估计值，以便根据输入信号的变化实现对系统输出的精准预测。递推最小二乘(recursive least squares, RLS)算法作为经典的参数自适应算法，自适应增益随时间递减，不太适合估计时变的参数。因此在 RLS 算法的基础上引入两个加权因子进行推广，可以得到参数自适应算法(parameter adaptation algorithm, PAA)的一般形式[26]：

$$\begin{aligned}&\varepsilon(n+1)=\frac{\varepsilon^{o}(n+1)}{1+\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n)},\\&\hat{\theta}(n+1)=\hat{\theta}(n)+\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n)\varepsilon(n+1),\\&\boldsymbol{F}(n+1)=\frac{1}{\lambda_1}\left[\boldsymbol{F}(n)-\frac{\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n)\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}(n)}{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}+\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n)}\right]\end{aligned}\tag{1}$$

式中，$\varepsilon^{o}(n+1)$表示先验自适应误差；$\varepsilon(n+1)$表示后验自适应误差；$\boldsymbol{F}(n)$表示增益矩阵；$\boldsymbol{\phi}(n)$表示信息向量；$\hat{\theta}(n)$表示带估计的参数；加权因子λ_1主要用于增加自适应增益；加权因子λ_2主要用于减小自适应增益。

1.1.1 变遗忘因子-PAA 算法(PAA-1)

在 PAA 算法的基础上，改变遗忘因子[28]：

$$\lambda(n)=\lambda_{\min}+(1-\lambda_{\min})2^{L(n)}\tag{2}$$

式中，$L(n)=-\mathrm{round}[\mu e^2(n)]$，round表示最接近$\mu e^2(n)$的整数。在初始时刻误差$e(n)$较大时，$\lambda(n)$会接近最小值$\lambda_{\min}$。而随着误差$e(n)$变得越来越小，$\lambda(n)$逐渐接近于 1。

1.1.2　改进自适应增益矩阵的 PAA 算法（PAA-2）

随着 PAA 算法迭代次数的不断增加, 自适应增益矩阵$\boldsymbol{F}(n)$可能会变为$\boldsymbol{0}$。那么, 滤波器系数的权重向量也将不会再进行更新。因此, 可以对自适应增益矩阵$\boldsymbol{F}(n)$的迭代更新公式进行如下改进[29]:

$$\boldsymbol{F}(n+1)=\frac{1}{\lambda_1}\left[\boldsymbol{F}(n)-\frac{\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n)\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}(n)}{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}+\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n)}+I\cdot\mathrm{round}[\gamma\varepsilon(n)]\right] \tag{3}$$

通过在自适应增益矩阵$\boldsymbol{F}(n)$的迭代公式中加入自干扰项$I\cdot\mathrm{round}[\gamma\varepsilon(n)]$, 可以有效提升 PAA 算法的时变跟踪能力。

1.1.3　本文改进的 PAA 算法（improved parameter adaptation algorithm, IPAA）

上述算法对输出信号的求解仅仅依赖当前时刻估计的滤波器系数$\hat{\theta}(n)$, 当滤波器系数偏差较大时, 估计的输出信号会与期望信号偏差较大, 从而导致收敛不稳定。为了改善这一现象, 可以使用当前时刻估计的滤波器系数$\hat{\theta}(n)$和前一时刻估计的滤波器系数$\hat{\theta}(n-1)$的权重之和, 来代替原输出信号中当前时刻估计的滤波器系数$\hat{\theta}(n)$。改进后的输出信号公式如下:

$$y(n)=[\tau\hat{\theta}(n)+(1-\tau)\hat{\theta}(n-1)]\boldsymbol{\phi}(n) \tag{4}$$

式中, τ表示权重因子, 用于平衡公式中当前时刻估计的滤波器系数$\hat{\theta}(n)$和前一时刻估计的滤波器系数$\hat{\theta}(n-1)$的占比, 取值范围在$0<\tau<1$。

定义当前时刻的修正项为:

$$\kappa(n)=\boldsymbol{F}(n+1)\boldsymbol{\phi}(n)\left[y(n+1)-\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\theta}(n)\right] \tag{5}$$

改进的 PAA 算法将滤波器系数更新的修正项改为当前时刻修正项$\kappa(n)$与前一时刻修正项$\kappa(n-1)$权重之和的形式:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(n+1)=&\hat{\theta}(n)+\eta\boldsymbol{F}(n+1)\boldsymbol{\phi}(n)\left[y(n+1)-\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\theta}(n)\right]+\\&(1-\eta)\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n-1)\left[y(n)-\boldsymbol{\phi}(n-1)\hat{\theta}(n-1)\right]\end{aligned} \tag{6}$$

由于已得到当前时刻$\hat{\theta}(n)$的值, 并且$\hat{\theta}(n)$相比于$\hat{\theta}(n-1)$会更加接近最优解, 因此, 在滤波器系数迭代更新公式中, 选择用当前时刻的参数估计值$\hat{\theta}(n)$来代替前一时刻的参数估计值$\hat{\theta}(n-1)$, 会得到更好的收敛和控制效果。

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(n+1)=&\hat{\theta}(n)+\eta\boldsymbol{F}(n+1)\boldsymbol{\phi}(n)\left[y(n+1)-\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\theta}(n)\right]+\\&(1-\eta)\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n-1)\left[y(n)-\boldsymbol{\phi}(n-1)\hat{\theta}(n)\right]\end{aligned} \tag{7}$$

为增强该滤波器系数迭代更新策略的自适应能力, 可将权重因子η改进为自适应权重因子$\eta(n)=\mathrm{e}^{-\varepsilon(n+1)}$。当前时刻误差较大时, η呈指数级衰减, 前一时刻的修正项占有的权重会较大。而当前时刻的误差较小时, 前一时刻的修正项占有的权重会变小, 滤波器系数迭代更新过程中会更多地依赖当前时刻的修正项。在保证一定收敛性能的情况下, 能够有效提升算法收敛效果。

为了进一步平衡迭代更新过程的收敛速度和平稳性, 引入一个误差阈值Δ来动态调整更新机制[20]。误差阈值策略的理论依据在于其本质上是在自适应控制框架下引入鲁棒性修正项。通过抑制非平稳误差的累积效应, 避免因内部正反馈导致的自适应增益发散。在当前时刻的误差绝对值超过阈值时, 采用快速更新策略。而当前时刻的误差绝对值较小时, 则采取平稳更新策略。

滤波器的系数迭代更新策略可以表示为:

$$\begin{cases}\hat{\theta}(n+1)=\hat{\theta}(n)+\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n)\varepsilon(n+1),\ \varepsilon>\Delta\\\hat{\theta}(n+1)=\hat{\theta}(n)+\eta(t)\boldsymbol{F}(n+1)\boldsymbol{\phi}(n)\left[y(n+1)-\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\theta}(n)\right]+\\(1-\eta(t))\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}(n-1)\left[y(n)-\boldsymbol{\phi}(n-1)\hat{\theta}(n)\right],\ \varepsilon\leqslant\Delta\end{cases} \tag{8}$$

输出信号的公式可以表示为:

$$y(n)=\begin{cases}[\tau\hat{\theta}(n)+(1-\tau)\hat{\theta}(n-1)]\boldsymbol{\phi}(n),\ \varepsilon>\Delta\\\hat{\theta}(n)\boldsymbol{\phi}(n),\ \varepsilon\leqslant\Delta\end{cases} \tag{9}$$

1.2　ARMA 模型的参数估计

压电智能结构在复杂工况下会产生结构振荡, 在驱动时会导致控制精度下降[30-32]。因此在振动主动控制前需建立精确的动态特性数学模型, 其中自回归移动平均（autoregressive moving average, ARMA）模型能够有效描述压电智能结构的输入-输出动态关系, 是一种常用的建模方法[33-35]。在针对 ARMA 模型的参数估计中应用最广泛的算法有随机梯度算法、最小二乘算法、极大似然算法以及群体智能优化算法等。递推最小二乘算法是 ARMA 模型参数估计中最为经典且研究最多的辨识算法之一[36]。

ARMA 模型结合了自回归（autoregressive, AR）模型和移动平均（moving average, MA）模型的特点, 能够很好地描述时间序列数据的动态特性。对于一个p阶自回归、q阶移动平均的 ARMA 模型记为$ARMA(p,q)$, 其模型描述的线性系统可以表示为:

$$y(n)=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}x(n) \tag{10}$$

式中, $x(n)$为输入; $y(n)$为输出。

1.2.1　ARMA 模型定阶及参数估计

为了确保找到最合适的阶次组合, 首先分别设置 AR 部分阶数的最大值$p_{\max}$和 MA 部分阶数的最大值$q_{\max}$。然后从$p=0$到$p=p_{\max}$, 从$q=0$到$q=q_{\max}$依次遍历, 针对每个组合(p,q)构建不同阶次的 ARMA 模型。

常用的定阶方法有贝叶斯信息量准则（Bayesian information criterion, BIC）, 表达式如下[37]:

$$BIC(k)=k\ln n-2\ln L \tag{11}$$

式中，k为待辨识的参数的个数（即 AR 和 MA 系数的数量）；n为样本数据的数量；L为似然函数，L越大表示辨识得越准确。因此在 BIC 准则中，BIC 值越小，则表明模型的拟合效果越好。

利用 PAA 算法对 ARMA 模型的参数进行估计时，ARMA 模型可以表示为：

$$\boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{\theta} \tag{12}$$

式中，$\boldsymbol{y}(n)=[y(n-1),y(n-2),\cdots,y(n-p)]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_p]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{x}(n)=[x(n),x(n-1),\cdots,x(n-q)]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_q]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\phi}(n)=[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n),\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)]$；$\boldsymbol{\theta}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$。在这里，$\boldsymbol{\phi}(n)$表示输入的信息向量；$\boldsymbol{\theta}$表示待估计的模型参数。

1.2.2 分段的 IPAA 算法用于参数估计

在 IPAA 算法基础上，为了降低参数自适应算法的计算复杂度，提升其收敛速度，可以将如式（12）所示的 ARMA 模型参数估计过程分解为 AR 和 MA 两个部分[36]。

AR 子模型参数估计：基于 IPAA 算法对 AR 子模型进行参数估计，将估计出的最新参数应用于 MA 子模型中。

MA 子模型参数估计：基于最新估计的 AR 子模型参数，使用 IPAA 算法对 MA 子模型进行参数估计，再将估计出的最新参数用于下一时刻的 AR 子模型中。

AR 子模型：

$$\boldsymbol{y}_a(n)=\boldsymbol{y}(n)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{a} \tag{13}$$

MA 子模型：

$$\boldsymbol{y}_b(n)=\boldsymbol{y}(n)-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{b} \tag{14}$$

估计 AR 子模型的参数 $\boldsymbol{a}$ 的递推公式如下：

$$\begin{cases}\hat{\theta}_a(n+1)=\hat{\theta}_a(n)+\boldsymbol{F}_a(n)\boldsymbol{x}(n)[\boldsymbol{y}(n+1)-\\ \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n+1)\boldsymbol{b}(n+1)-\boldsymbol{x}(n)\hat{\boldsymbol{a}}(n)],e>\Delta\\ \hat{\theta}_a(n+1)=\hat{\theta}_b(n)+\eta\boldsymbol{F}_a(n+1)\boldsymbol{x}(n)[\boldsymbol{y}(n+1)-\\ \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n+1)\boldsymbol{b}(n+1)-\boldsymbol{x}(n)\hat{\boldsymbol{a}}(n)]+\\ \quad (1-\eta)\boldsymbol{F}_a(n)\boldsymbol{x}(n-1)[\boldsymbol{y}(n)-\\ \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{b}(n)-\boldsymbol{x}(n-1)\hat{\boldsymbol{a}}(n)],\ e\leqslant\Delta\end{cases} \tag{15}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{a}}(n)$表示 AR 子模型的参数 $\boldsymbol{a}$ 在 n 时刻的估计值。

$$\boldsymbol{F}_a(n+1)=\frac{1}{\lambda_1}\left[\boldsymbol{F}_a(n)-\frac{\boldsymbol{F}_a(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}_a(n)}{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}_a(n)\boldsymbol{x}(n)}\right] \tag{16}$$

估计 MA 子模型的参数 $\boldsymbol{b}$ 的递推公式如下：

$$\begin{cases}\hat{\theta}_b(n+1)=\hat{\theta}_b(n)+\boldsymbol{F}_b(n)\boldsymbol{y}(n)[y(n+1)-\\ \quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n+1)\boldsymbol{a}(n+1)-\boldsymbol{y}(n)\hat{\boldsymbol{b}}(n)],\ e>\Delta\\ \hat{\theta}_b(n+1)=\hat{\theta}_b(n)+\eta\boldsymbol{F}_b(n+1)\boldsymbol{y}(n)[y(n+1)-\\ \quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n+1)\boldsymbol{a}(n+1)-\boldsymbol{y}(n)\hat{\boldsymbol{b}}(n)]+\\ \quad (1-\eta)\boldsymbol{F}_b(n)\boldsymbol{y}(n-1)[y(n)-\\ \quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{a}(n)-\boldsymbol{y}(n-1)\hat{\boldsymbol{b}}(n)],\ e\leqslant\Delta\end{cases} \tag{17}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{b}}(n)$表示 MA 子模型的参数 $\boldsymbol{b}$ 在 n 时刻的估计值。

$$\boldsymbol{F}_b(n+1)=\frac{1}{\lambda_1}\left[\boldsymbol{F}_b(n)-\frac{\boldsymbol{F}_b(n)\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}_b(n)}{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}_b(n)\boldsymbol{y}(n)}\right] \tag{18}$$

1.2.3 参数估计结果对比分析

基于在试验平台上采集到的真实输入数据，采用分段的 IPAA 算法来估计 ARMA 模型参数，按以下步骤进行：

（1）设置最高阶次；

（2）AR 和 MA 子模型参数估计；

（3）阶次确定；

（4）完成参数估计。

在辨识内部反馈通道 ARMA 模型时，给抑振作动器一个激励信号，将抑振信号和参考传感器的输出信号分别作为辨识内部反馈通道的输入输出数据。其中包括以下 3 种激励信号：

（1）幅值为 4 V，频率为 13.67 Hz 的 1 阶固有频率正弦激励信号；

（2）幅值为 4 V，频率为 66.02 Hz 的 2 阶固有频率正弦激励信号；

（3）2 个幅值为 2 V，频率分别为 13.67 和 66.02 Hz 的 1、2 阶固有频率正弦激励信号的叠加。

估计 ARMA 模型参数的目的是为了能够精确描述出被控对象各通道输入-输出数据之间的动态特性。因此，采用以下误差均方公式来评估各算法的参数估计结果：

$$MSE=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}[y(n)-\hat{y}(n)]^2 \tag{19}$$

其中，$y(n)$表示实际输出数据；$\hat{y}(n)$表示参数估计过程中 ARMA 模型输出数据。MSE 的值越小，表明模型参数估计的精确度越高，越能精确描述真实模型。

设置最大阶数为 30 阶。PAA 算法、IPAA 算法和分段的 IPAA 算法利用单频（1 阶、2 阶）信号辨识 ARMA 模型得到的阶数和均方误差值如表 1 和 2 所示。对比发现，分段的 IPAA 算法辨识模型的均方误差值最小，表明分段的 IPAA 算法对 ARMA 模型的参数估计更加精确。

表 1 1 阶信号估计 ARMA 模型参数的结果对比

Tab. 1 Comparison of ARMA model parameter estimation results for first-order signals

算法	p	q	均方误差
PAA算法	18	18	7.933×10^{-5}
IPAA算法	18	18	2.346×10^{-5}
分段的IPAA算法	3	16	3.910×10^{-7}

表 2　2 阶信号估计 ARMA 模型参数的结果对比

Tab. 2　Comparison of ARMA model parameter estimation results for second-order signals

算法	p	q	均方误差
PAA算法	3	10	3.915×10^{-5}
IPAA算法	4	10	4.392×10^{-7}
分段的IPAA算法	3	25	6.913×10^{-8}

图 1~4 分别为 PAA 算法、IPAA 算法和分段的 IPAA 算法利用单频（1 阶、2 阶）信号辨识 ARMA 模型后得到的真实输出与预测输出的跟踪曲线和误差曲线图。

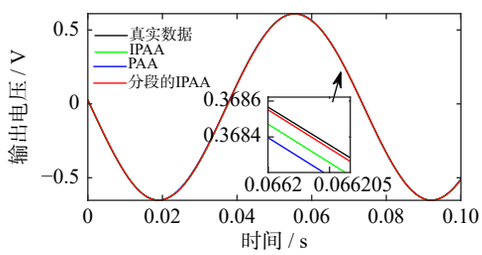


图 1　1 阶信号基于 PAA 算法辨识 ARMA 模型的电压跟踪曲线

Fig. 1　Voltage tracking curves of ARMA model identification based on PAA algorithm for first-order signals

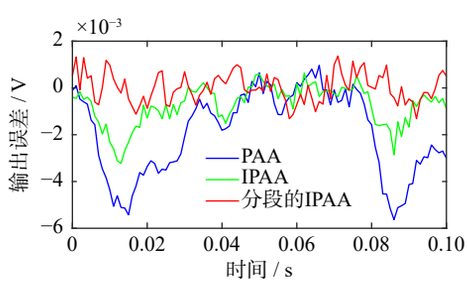


图 2　1 阶信号基于 PAA 算法辨识 ARMA 模型的误差曲线

Fig. 2　Error curves of ARMA model identification based on PAA algorithm for first-order signals

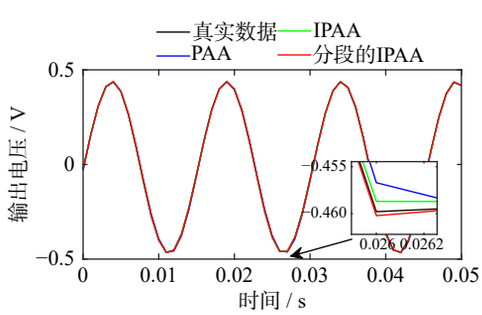


图 3　2 阶信号基于 PAA 算法辨识 ARMA 模型的电压跟踪曲线

Fig. 3　Voltage tracking curves of ARMA model identification based on PAA algorithm for second-order signals

从这几组图中可以看出，分段的 IPAA 算法估计的 ARMA 模型参数误差更小，更能反映内部反馈通道真实输入-输出之间的关系。

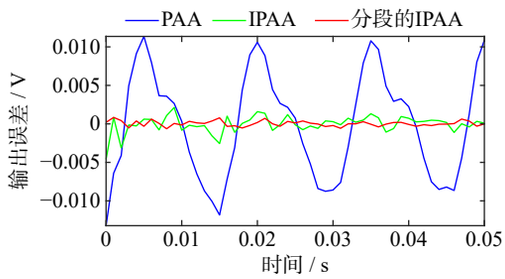


图 4　2 阶信号基于 PAA 算法辨识 ARMA 模型的误差曲线

Fig. 4　Error curves of ARMA model identification based on PAA algorithm for second-order signals

PAA 算法、IPAA 算法和分段的 IPAA 算法利用多频信号辨识 ARMA 模型得到的阶数和均方误差值如表 3 所示。对比发现，分段的 IPAA 算法辨识的均方误差值最小，表明分段的 IPAA 算法参数估计能力更好，更能精确估计内部反馈通道的 ARMA 模型参数。

表 3　多频信号辨识 ARMA 模型参数的结果对比

Tab. 3　Comparison of ARMA parameter identification results for multi-frequency signals

算法	p	q	均方误差
PAA算法	20	8	2.848×10^{-5}
IPAA算法	20	10	3.433×10^{-6}
分段的IPAA算法	4	18	7.440×10^{-7}

图 5 和 6 为 PAA 算法、IPAA 算法和分段的 IPAA 算法利用多频信号估计 ARMA 模型后得到的真实输出与预测输出的跟踪曲线和误差曲线。

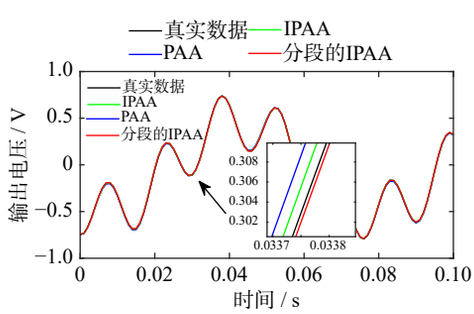


图 5　多频信号基于 PAA 算法辨识 ARMA 模型的电压跟踪曲线

Fig. 5　Voltage tracking curves of ARMA model identification based on PAA algorithm for multi-frequency signals

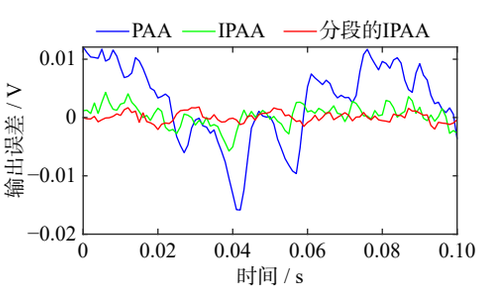


图 6　多频信号基于 PAA 算法辨识 ARMA 模型的误差曲线

Fig. 6　Error curves of ARMA model identification based on PAA algorithm for multi-frequency signals

可以看出，分段的IPAA法辨识的ARMA模型参数误差更小，更能拟合真实输出曲线。因此，分段的IPAA算法辨识的压电智能叶片ARMA模型参数更加精确。

2 振动主动控制系统设计

2.1 考虑内部正反馈的自适应振动主动控制系统

在以压电智能结构为代表的传感-控制一体化系统中，控制作动器的控制作用会对参考传感器采集到的振动参考信号产生结构内部正反馈，与激振信号叠加形成耦合回路，导致控制器的性能下降甚至失效。Youla-Kučera参数化在前馈控制中具有独特的解耦机理与鲁棒性优势，通过合理选择Q参数可在频域上有效抑制控制信号对参考通道的耦合干扰，实现前馈控制路径与反馈抑制路径的解耦。

采用Youla-Kučera参数化方法设计前馈控制器，将自适应滤波器和中央鲁棒控制器进行结合，既可以保证内部环路的稳定性，又可以降低振动主动控制的误差[38]。

考虑内部正反馈的自适应振动主动控制系统的结构如图7所示。虚线框表示基于Youla-Kučera参数化设计的前馈控制器。W表示参考信号滤波通道的传递函数；D表示主通道的传递函数；G表示次级通道的传递函数；F表示内部正反馈通道的传递函数。$r(n)$表示外部扰动；$x(n)$表示参考信号；$d(n)$表示主通道的输出信号；$x_f(n)$表示经过内部反馈通道后的参考信号；$\hat{y}(n)$表示前馈控制器中参考传感器采集到的参考信号；$\hat{u}(n)$表示输入到次级通道的信号，$\hat{z}^0(n)$表示经过次级通道的输出信号；$e(n)$表示被控对象误差传感器采集到的振动信号。

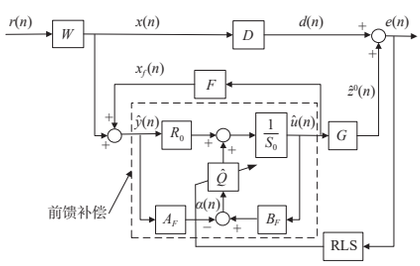


图7 考虑内部反馈的自适应振动主动控制系统框图

Fig. 7 Block diagram of adaptive active vibration control system considering internal feedback

在前馈控制器中引入Youla-Kučera参数化滤波器后，滤波器$Q(z^{-1})$的输入信号为$\alpha(n)$，可以表示为：

$$\alpha(n)=A(z^{-1})y(n)-B(z^{-1})u(n) \tag{20}$$

在Youla-Kučera参数化背景下，A和B表示被控对象的离散时间传递函数模型的分母和分子多项式。A为系统传递函数的分母多项式，与系统的极点相关；B为系统传递函数的分子多项式，与系统的零点相关。

$Q(z^{-1})$为Youla-Kučera参数化中的Q多项式，可以是FIR滤波器也可以是IIR滤波器。在此选用FIR滤波器的形式，$Q(z^{-1})$可以表示为：

$$Q(z^{-1})=q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+\cdots+q_{n_Q}z^{-n_Q} \tag{21}$$

式中，n_Q表示FIR滤波器的阶数。

使用Youla-Kučera参数化后，滤波器$Q(z^{-1})$和中央控制器$N_0(z^{-1})$共同构成了一个新的前馈控制器$K(z^{-1})$，可以表示为：

$$K(z^{-1})=\frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} \tag{22}$$

其中，控制器多项式$R(z^{-1})$和$S(z^{-1})$具有以下形式：

$$R(z^{-1})=R_0(z^{-1})+A(z^{-1})Q(z^{-1}) \tag{23}$$

$$S(z^{-1})=S_0(z^{-1})-z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1}) \tag{24}$$

式中，上标d表示被控对象的时延（时间延迟）步数。

基于Youla-Kučera参数化方法所得的闭环特征多项式$P(z^{-1})$是一个贝祖多项式，该多项式可以表示为：

$$P(z^{-1})=A(z^{-1})S_0(z^{-1})-B(z^{-1})R_0(z^{-1}) \tag{25}$$

通过对该特征多项式$P(z^{-1})$进行极点配置，然后再对系数矩阵进行求解即可得到中央控制器(R_0,S_0)的具体系数。特征多项式$P(z^{-1})$期望的闭环极点是由主导极点和辅助极点共同决定的。期望的闭环极点可以表示为：

$$P(z^{-1})=P_D(z^{-1})\cdot P_F(z^{-1}) \tag{26}$$

式中，$P_D(z^{-1})$表示主导极点；而$P_F(z^{-1})$表示辅助极点。极点配置时，主导极点$P_D(z^{-1})$通常包含开环系统中所有的稳定极点，在保证系统稳定的同时，还可以对复数极点的阻尼进行调整。

2.2 参数自适应算法

在上述自适应前馈控制器中采用参数自适应算法需满足以下4个基本假设条件：

假设1：该振动主动控制系统中的扰动信号$x(n)$是有界的。

假设2：测量噪声对误差测量的影响可忽略不计。

假设3：存在一个中央前馈控制器$N_0(R_0,S_0)$，稳定了由N_0和F形成的内部正反馈回路。该前馈控制器的特征多项式是一个Hurwitz多项式：

$$P(z^{-1})=A_F(z^{-1})S_0(z^{-1})-B_F(z^{-1})R_0(z^{-1}) \tag{27}$$

假设4（完美匹配条件）：内部正反馈回路可以完美地抵消主通道D产生的振动，并且确保整个控制系统输出误差最小。存在一组最优Q滤波器参数值，使得：

$$\frac{S\cdot A_F(R_0-A_FQ)}{A_FS_0-B_FR_0}=-D \tag{28}$$

在实际振动主动控制系统中，由于系统辨识过程中存在不可避免的偏差以及扰动信号的浮动，需要采用参数自适应算法来实时调整 Youla-Kučera 参数化前馈控制器以减小或消除振动控制系统的振动误差；由于压电材料的迟滞非线性会影响瞬时误差梯度估计的准确性，同时也会对输入的信号造成影响。因此，为了保证 PAA 算法的收敛精度，在进行控制试验时，需引入一个迟滞非线性模型作为次级通道的估计，从而修正误差梯度，保证算法的准确性。此时，可以得到同时包含次级通道滤波和内部反馈通道滤波的 PAA 算法表达式：

$$\hat{\theta}(n+1)=\hat{\theta}(n)+\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}_G(n)e(n+1),$$

$$e(n+1)=\frac{e^0(n+1)}{1+\boldsymbol{\phi}_G^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}_G(n)},$$

$$\boldsymbol{F}(n+1)=\frac{1}{\lambda_1}\left[\boldsymbol{F}(n)-\frac{\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}_G(n)\boldsymbol{\phi}_G^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}(n)}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\boldsymbol{\phi}_G^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\phi}_G(n)}\right] \tag{29}$$

式中，$\hat{\theta}(n)$表示滤波器权重系数；$\boldsymbol{F}(n)$表示自适应增益矩阵；$\boldsymbol{\phi}_G(n)$表示经次级通道模型估计后的观测向量；$e^0(n+1)$表示先验自适应误差；$e(n+1)$表示后验自适应误差。

3　振动主动控制试验

为了验证 ARMA 模型参数估计的精确度和 IPAA 振动控制算法的有效性，以压电智能叶片为研究对象搭建了基于 xPC 实时控制系统的压电智能叶片试验平台。同时，基于 PAA、PAA-1、PAA-2和 IPAA 算法分别在压电智能叶片试验平台上进行了不同工况下的振动主动控制对比试验。

3.1　试验平台的搭建

如图 8 所示的压电智能叶片为振动主动控制试验的研究对象。该压电智能叶片由航空发动机叶片模型和 MFC 组成。压电元件的参数如表 4 示。通过有限元分析和优化算法相结合的方法得到压电元件的最优粘贴位置，如表 5 所示。由 xPC 实时控制系统、数据采集板卡、功率放大器、电荷放大器等信号采集和处理设备组成的基于 xPC 实时控制系统的压电智能叶片试验平台如图 9 所示。宿主机和目标机为研华工控机，配置如表 6 所示。其中目标机安装两块 NI PCI-6289 数据采集卡，宿主机安装 MATLAB 2010b、Visual Studio 2010（C 语言编译环境）软件。

3.2　振动主动控制试验的验证与分析

试验过程中，对所有控制算法的相同试验，参数设置保持统一。采样频率为 1000 Hz，滤波器阶数为

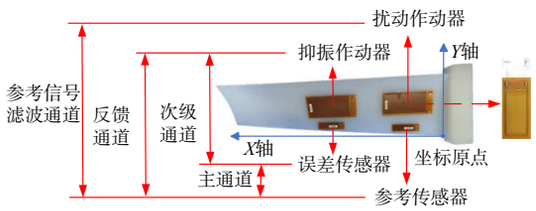


图 8　压电智能叶片结构图

Fig. 8　Structural diagram of the piezoelectric smart blade

表 4　MFC 压电元件的详细参数

Tab. 4　Detailed parameters of the MFC piezoelectric elements

压电元件类型	型号	作动尺寸/mm	整体尺寸/mm	最大位移/μm	输出力/N
作动器	M5628-P2	56×28	67×31	−45.92	−205
传感器	M2807-P2	28×7	37×10	−18.2	−40

表 5　MFC 压电元件的粘贴位置

Tab. 5　The bonding position of the MFC piezoelectric elements

压电元件类型	X轴坐标/mm	Y轴坐标/mm
扰动作动器	56.702	39.384
抑振作动器	166.212	39.384
误差传感器	164.207	15.902
参考传感器	56.702	0.814

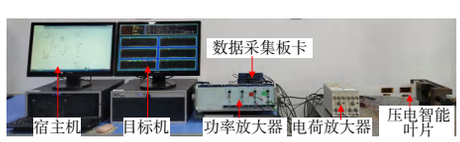


图 9　基于 xPC 实时控制系统的压电智能叶片试验平台

Fig. 9　Experimental platform of the piezoelectric smart blade based on the xPC real-time control system

表 6　工控机的系统配置

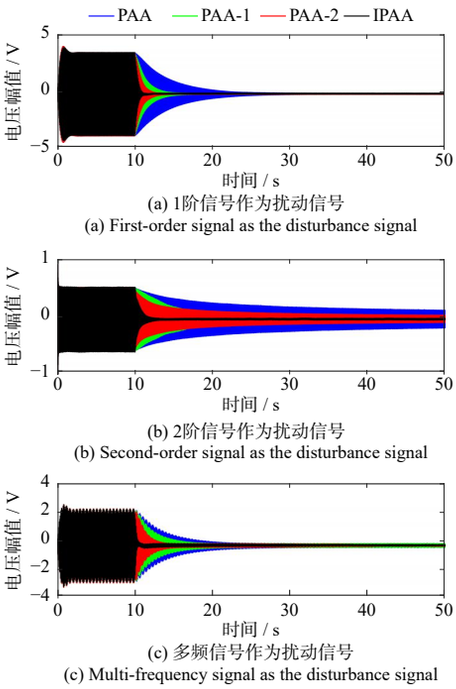
Tab. 6　System configuration of the industrial computer

内容	概述
CPU	Intel(R) Core(TM)i3-4330TE 主频2.40 GHz
硬盘	450 GB
内存	2 GB
操作系统	Windows XP

32 阶，试验总时间设置为 60 s。在 xPC 实时控制系统运行 10 s 后施加振动信号，待振动稳定后第 20 s 时施加控制信号。

为了验证 IPAA 算法对不同种类信号的适用性，分别在单频信号扰动和多频信号扰动情况下，基于 PAA 算法和 3 种改进的 PAA 算法对压电智能叶片进行振动主动控制对比试验。扰动信号分别为：幅值为 4 V、频率为 13.67 Hz 的 1 阶固有频率正弦信号；幅值为 4 V、频率为 66.02 Hz 的 2 阶固有频率正弦信号，和 2 个幅值为 2 V、频率分别为 13.67、66.02 Hz 的正弦信号叠加的多频信号。

固有频率正弦信号扰动的振动主动控制试验效果对比如图 10 所示。固有频率正弦信号扰动的振动主动控制试验频谱效果对比如图 11 所示。可知，在不同频率的扰动信号下，IPAA 算法在收敛速度和稳态误差上都明显优于其他振动控制算法。



(a) 1阶信号作为扰动信号
(a) First-order signal as the disturbance signal

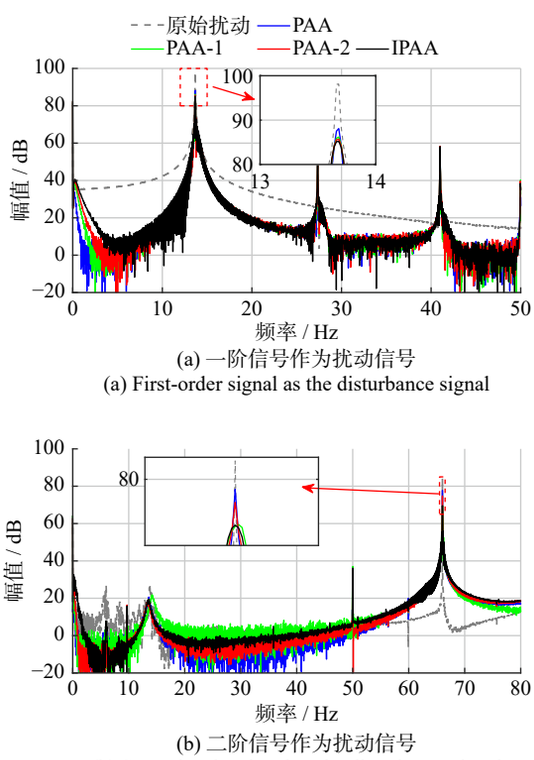
(b) 2阶信号作为扰动信号
(b) Second-order signal as the disturbance signal

(c) 多频信号作为扰动信号
(c) Multi-frequency signal as the disturbance signal

图 10 固有频率信号扰动下 4 种 PAA 算法的控制效果

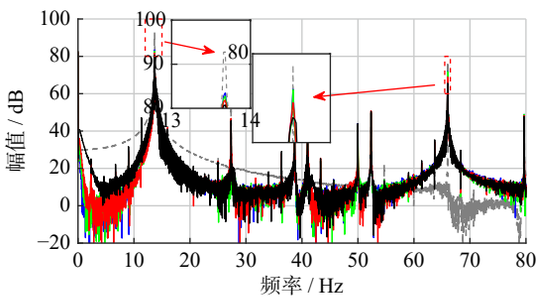
Fig. 10 Control performance of four PAA algorithms under disturbance at natural frequency

为了验证本文 IPAA 算法在不同工况下的振动控制效果。使用以下 3 种激振信号对压电智能叶片



(a) 一阶信号作为扰动信号
(a) First-order signal as the disturbance signal

(b) 二阶信号作为扰动信号
(b) Second-order signal as the disturbance signal

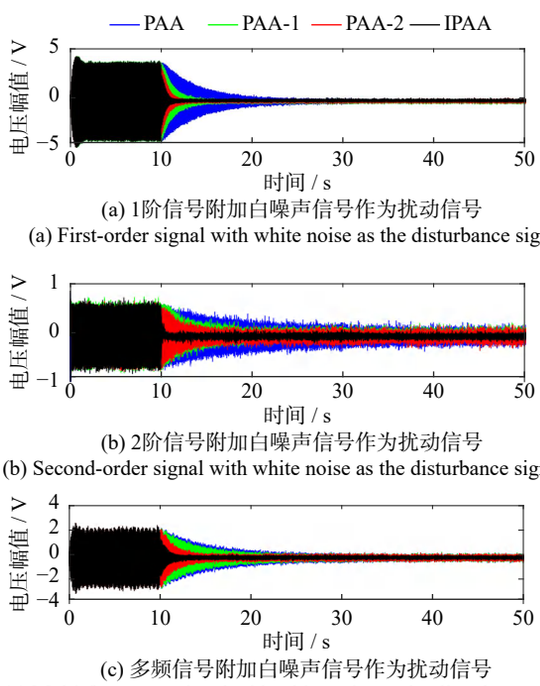


(c) 多频信号作为扰动信号
(c) Multi-frequency signal as the disturbance signal

图 11 固有频率信号扰动下 4 种 PAA 算法的控制效果频谱图

Fig. 11 Spectrum diagram of control performance of four PAA algorithms under disturbance at natural frequency

进行激振：幅值为 4 V、频率为 13.67 Hz 的 1 阶固有频率正弦信号附加白噪声信号；幅值为 4 V、频率为 66.02 Hz 的 2 阶固有频率正弦信号附加白噪声信号；2 个幅值为 2 V、频率分别为 13.67、66.02 Hz 的正弦信号叠加的多频信号附加白噪声信号。附加白噪声信号作为激振信号下 PAA 算法和 3 种改进的 PAA 算法的控制效果对比如图 12 所示。



(a) 1阶信号附加白噪声信号作为扰动信号
(a) First-order signal with white noise as the disturbance signal

(b) 2阶信号附加白噪声信号作为扰动信号
(b) Second-order signal with white noise as the disturbance signal

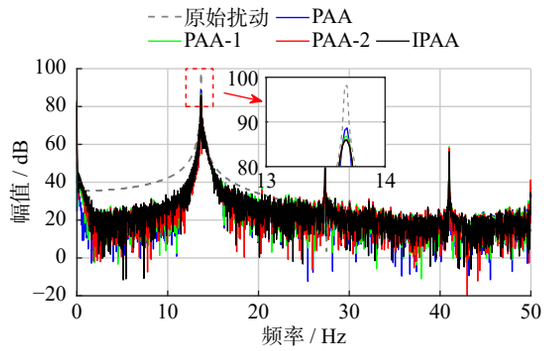
(c) 多频信号附加白噪声信号作为扰动信号
(c) Multi-frequency signal with white noise as the disturbance signal

图 12 附加白噪声信号扰动下 4 种 PAA 算法的控制效果

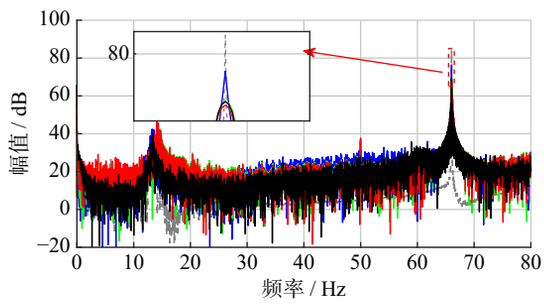
Fig. 12 Control performance of four PAA algorithms under disturbance with white noise

附加白噪声信号扰动下振动主动控制试验频谱效果对比如图 13 所示。可以看出，IPAA 算法的控制效果依旧优于其余 PAA 算法，在噪声环境中 IPAA 算法表现出了良好的鲁棒性和控制效果。图中对比了固有频率正弦信号扰动下和附加白噪声信号扰动下 PAA 算法和 3 种改进的 PAA 算法的控制效果。

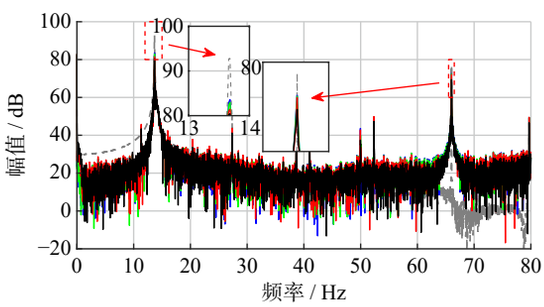
对比不同工况可知，同其他 PAA 算法相比，本文提出的方法表现出了更好的控制效果。



(a) 1阶信号附加白噪声信号作为扰动信号
(a) First-order signal with white noise as the disturbance signal



(b) 2阶信号附加白噪声信号作为扰动信号
(b) Second-order signal with white noise as the disturbance signal



(c) 多频信号附加白噪声信号作为扰动信号
(c) Multi-frequency signal with white noise as the disturbance signal

图 13　附加白噪声信号扰动下 4 种 PAA 算法的控制效果频谱图

Fig. 13　Spectrum diagram of control performance of four PAA algorithms under disturbance with white noise

4　结　论

为解决压电智能结构内部存在的振动正反馈问题，本文提出了一种基于 Youla-Kučera 参数化的前馈鲁棒自适应振动控制方法。通过引入历史时刻信息和误差阈值来改进 PAA 算法，避免传统 PAA 因过度调节系数而出现的不平稳现象。为了精确估计 ARMA 模型参数，在上述改进的基础上，提出了将 AR 部分和 MA 部分参数分开辨识的分段 IPAA 算法。通过实时控制试验，在不同工况下验证了改进 PAA 算法振动主动控制的有效性。

本文设计的基于 Youla-Kučera 参数化的前馈鲁棒自适应振动控制系统可以为压电智能结构振动主动控制提供参考技术方案，改进的 PAA 算法对复杂工况下的振动主动控制问题也具有借鉴意义。然而，相关研究工作依然存在一些不足。例如，基于离线辨识的模型在不确定环境中的适应性较低，PAA 算法的计算量较大，会影响多输入多输出系统的实时性。

参考文献：

[1] 朱宇文，王浩宇，孙恒达，等. 航空航天用智能纤维与制品 [J]. 科学通报，2025，70(17)：2750-2762.
ZHU Yuwen，WANG Haoyu，SUN Hengda，et al. Smart fibers and products for aerospace applications[J]. Chinese Science Bulletin，2025，70(17)：2750-2762.

[2] WANG W J，XIANG Y，YU J F，et al. Development and prospect of smart materials and structures for aerospace sensing systems and applications[J]. Sensors，2023，23(3)：1545.

[3] MOUTSOPOULOU A，PETOUSIS M，VIDAKIS N，et al. Piezoelectric actuators in smart engineering structures using robust control[J]. Materials，2024，17(10)：2357.

[4] LIU T，SUN X R，ZHENG J D，et al. Multi-patch isogeometric analysis for smart plates with distributed piezoelectric patches[J]. Thin-Walled Structures，2025，209：112937.

[5] GAO Z Y，XU T X，YU R C，et al. Piezoelectric-based smart structures for aero-engine blade：piezoelectric layout optimization and vibration suppression tests[J]. Aerospace Science and Technology，2024，153：109455.

[6] KANEEZ H，PALACZ M. Advancements in mathematical modeling and design configurations of piezoelectric energy harvesters：a comprehensive review[J]. Journal of Micromechanics and Microengineering，2025，35(3)：033001.

[7] LI J，ZHANG L Y，LI S Q，et al. Active disturbance rejection control for piezoelectric smart structures：a review[J]. Machines，2023，11(2)：174.

[8] KANCHAN M，SANTHYA M，BHAT R，et al. Application of modeling and control approaches of piezoelectric actuators：a review[J]. Technologies，2023，11(6)：155.

[9] GHEIBOLLAHI H，TEHRANI M M，NAJAFI A. Improving ride comfort approach by fuzzy and genetic-based PID controller in active seat suspension[J]. International Journal of Automation and Control，2024，18(2)：184-213.

[10] GONG F，NIE S L，JI H，et al. Pipeline vibration control using magnetorheological damping clamps under fuzzy-PID control algorithm[J]. Micromachines，2022，13(4)：531.

[11] LIANG Y J，LU Y J，GAO D X，et al. Applications of approximate optimal control to nonlinear systems of tracked vehicle suspensions[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems，2021，14(1)：174.

[12] SAEED M U，SUN Z Y，ELIAS S. Semi-active vibration control of building structure by self tuned brain emotional learning based intelligent controller[J]. Journal of Building Engineering，2022，46：103664.

[13] 冯正甫，李永恒，许议，等. 基于自适应模糊控制算法的船用内燃机振动控制研究 [J]. 珠江水运，2024(15)：41-43.

[14] LU Q F，WANG P，LIU C C. An analytical and experimen-

tal study on adaptive active vibration control of sandwich beam[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2022，232：107634.

[15] ZHANG Y，SUN W，ZHANG H，et al. Design and implementation of the adaptive vibration control for bolted composite plates under variable loads[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2025，229：112496.

[16] ZHANG X D，LAN X，SHI W K，et al. Study on active control for multilinear and nonlinear vibration in piezoelectric structures through a secondary channel improved method[J]. Engineering Structures，2025，327：119637.

[17] LIU T，LIU C C，ZHANG Z. Adaptive active vibration control for composite laminated plate：theory and experiments[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2024，206：110876.

[18] LUO S N，WANG Y B，LONG X H，et al. Evaluation of FxLMS and FxRLS algorithms in active vibration control using piezoelectric stack actuators for gear transmission[J]. Smart Materials and Structures，2025，34(3)：035052.

[19] HUANG C S，LI H C. Adaptive notch filter for piezo-actuated nanopositioning system via position and online estimate dual-mode[J]. Micromachines，2021，12(12)：1525.

[20] 方昱斌，朱晓锦，高志远，等. 鲁棒参数自适应微振动控制算法 [J]. 振动工程学报，2024，37(2)：237-246.
FANG Yubin，ZHU Xiaojin，GAO Zhiyuan，et al. Micro-vibration control algorithm with robust adaptive parameter[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(2)：237-246.

[21] AIRIMITOAIE T B，LANDAU I D，MELENDEZ R，et al. Algorithms for adaptive feedforward noise attenuation：a unified approach and experimental evaluation[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology，2021，29(5)：1850-1862.

[22] LANDAU I D，VAU B，AIRIMITOAIE T B，et al. Improving performance of adaptive feedforward noise attenuators using a dynamic adaptation gain[J]. Journal of Sound and Vibration，2023，560：117790.

[23] LANDAU I D，MELENDEZ R，AIRIMITOAIE T B，et al. Beyond the delay barrier in adaptive feedforward active noise control using Youla-Kučera parametrization[J]. Journal of Sound and Vibration，2019，455：339-358.

[24] LANDAU I D，AIRIMIȚOAIE T B，ALMA M. A Youla-Kučera parametrized adaptive feedforward compensator for active vibration control with mechanical coupling[J]. Automatica，2012，48(9)：2152-2158.

[25] AIRIMITOAIE T B，LANDAU I D. Combined adaptive feedback and feedforward compensation for active vibration control using Youla-Kučera parametrization[J]. Journal of Sound and Vibration，2018，434：422-441.

[26] LANDAU I D. On the use of Youla-Kučera parametrisation in adaptive active noise and vibration control-a review[J]. International Journal of Control，2020，93(2)：204-216.

[27] VAU B，LANDAU I D. Adaptive rejection of narrow-band disturbances in the presence of plant uncertainties：a dual Youla-Kučera approach[J]. Automatica，2021，129：109618.

[28] SONG Q，MI Y X，LAI W X. A novel variable forgetting factor recursive least square algorithm to improve the anti-interference ability of battery model parameters identification[J]. IEEE Access，2019，7：61548-61557.

[29] 王铎澎，黄华，张生凤. 一种改进型 KB-RLS 算法在自适应干扰对消中的仿真分析 [J]. 舰船电子对抗，2023，46(3)：48-53.
WANG Duopeng，HUANG Hua，ZHANG Shengfeng. Simulation analysis of an improved KB-RLS algorithm in adaptive interference cancellation[J]. Shipboard Electronic Countermeasure，2023，46(3)：48-53.

[30] MOUTSOPOULOU A，STAVROULAKIS G E，POULIEZOS A，et al. Robust control and active vibration suppression in dynamics of smart systems[J]. Inventions，2023，8(1)：47.

[31] MOUTSOPOULOU A，PETOUSIS M，VIDAKIS N，et al. Advancement in intelligent control for dampening structural vibrations[J]. Vibration，2024，7(3)：844-862.

[32] MOUTSOPOULOU A，STAVROULAKIS G E，PETOUSIS M，et al. Optimal placement and active control methods for integrating smart material in dynamic suppression structures[J]. Vibration，2023，6(4)：975-1003.

[33] 高志远，朱晓锦，张合生，等. 柔性传动系统的多模型自适应控制 [J]. 中国科学：信息科学，2015，45(11)：1402-1414.
GAO Zhiyuan，ZHU Xiaojin，ZHANG Hesheng，et al. Design of a multiple-model adaptive controller for a flexible transmission system[J]. Scientia Sinica（Informationis），2015，45(11)：1402-1414.

[34] LI J，PAN Z M，ZHANG Z H，et al. Dynamic ARMA-based background subtraction for moving objects detection[J]. IEEE Access，2019，7：128659-128668.

[35] PETER CARDEN E，BROWNJOHN J M W. ARMA modelled time-series classification for structural health monitoring of civil infrastructure[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2008，22(2)：295-314.

[36] MAO Y W，DING F，XU L，et al. Highly efficient parameter estimation algorithms for Hammerstein non-linear systems[J]. IET Control Theory & Applications，2019，13(4)：477-485.

[37] SONG Z N，YANG L J. Statistical inference for ARMA time series with moving average trend[J]. Journal of Nonparametric Statistics，2022，34(2)：357-376.

[38] TANG T，QI B，YANG T. Youla–kucera parameterization-based optimally closed-loop control for tip–tilt compensation[J]. IEEE Sensors Journal，2018，18(15)：6154-6160.

第一作者：欧阳珊(2000—)，女，硕士研究生。
E-mail：ouhappyi@163.com

通信作者：高志远(1986—)，男，博士，副教授。
E-mail：gaozhiyuan86@shu.edu.cn

基底激励下杠杆型非线性能量阱减振系统的强调制响应分析

罗一帆[1,2]，郜健博[2]，彭 剑[2]，孙洪鑫[1,2]，薛书文[2]，陈 浩[2]，罗振宇[2]

（1. 湖南科技大学三亚研究院，海南 三亚 572024；
2. 湖南科技大学结构抗风与振动控制湖南省重点实验室，湖南 湘潭 411201）

摘要：针对传统非线性能量阱（nonlinear energy sink, NES）的强调制响应（strongly modulated response, SMR）严格依赖 1∶1 主共振而导致其在地震工程中应用受限的问题，本文提出了一种带有杠杆放大装置的杠杆型非线性能量阱（lever-type nonlinear energy sink, LNES），以控制结构振动。为揭示 LNES 的内在动力学机理，本文建立了基底激励下 LNES 系统的动力学模型，并运用复变量平均法与多尺度法推导了能够同时展现放大比与失谐参数影响的慢变流形方程。在此基础上，通过对系统分岔特性与极限环稳定性的深入分析，并构造庞加莱映射，从理论上解析地揭示了系统产生 SMR 的充要条件。研究发现，增大放大比能够显著改变 LNES 系统在失谐参数空间中的分岔结构，有效抑制因频率失谐导致的 SMR 极限环失稳现象，从而突破了传统 NES 对 1∶1 主共振的严格依赖，极大地拓宽了 SMR 有效工作带宽。通过在简谐激励及真实地震波激励下的数值仿真，验证了 LNES 较于传统 NES 的减振性能优势。本研究系统地阐明了基础激励下放大机制改善 NES 鲁棒性的内在动力学机理，为 LNES 的参数优化与地震工程中的应用提供了坚实的理论依据。

关键词：结构振动控制；非线性能量阱；强调制响应；放大装置
中图分类号：O322 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508007

Strongly modulated response analysis of a lever-type nonlinear energy sink vibration reduction system under base excitation

LUO Yifan[1,2], GAO Jianbo[2], PENG Jian[2], SUN Hongxin[1,2], XUE Shuwen[2], CHEN Hao[2], LUO Zhenyu[2]

（1.Sanya Institute of Hunan University of Science and Technology，Sanya 572024，China；
2.Hunan Provincial Key Laboratory of Structural Engineering for Wind Resistant and Vibration Control，
Hunan University of Science and Technology，Xiangtan 411201，China）

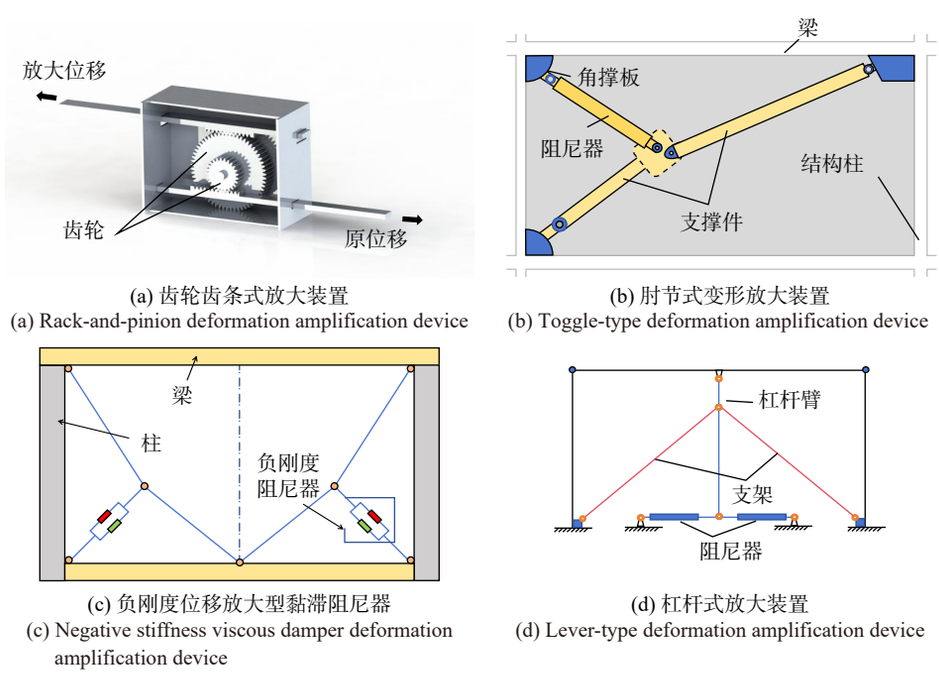
Abstract: Addressing the bottleneck issue where the strongly modulated response (SMR) of a traditional nonlinear energy sink (NES) depends strictly on the 1∶1 primary resonance，limiting its applications in seismic engineering，this paper proposes a structural vibration control method using a lever-type nonlinear energy sink (LNES) equipped with a lever amplification mechanism. To uncover its internal dynamic mechanism，a dynamic model of the LNES system under base excitation is first established. The slow-flow manifold equations are then derived using the complexification-averaging method and the method of multiple scales to simultaneously reveal the effects of the lever amplification ratio and detuning parameter. Based on this，through an in-depth analysis of the system's bifurcation characteristics and limit cycle stability，and by constructing Poincaré maps，the necessary and sufficient conditions for the generation of SMR are theoretically and analytically revealed. The results show that increasing the amplification ratio significantly alters the LNES system's bifurcation structure in the detuning parameter space，effectively suppressing the instability of the SMR limit cycle caused by frequency detuning. This breaks the strict reliance of the traditional NES on the 1∶1 primary resonance and greatly broadens the effective bandwidth for SMR. Comprehensive numerical simulations under both harmonic and real earthquake wave excitations are conducted to verify that the LNES exhibits superior and robust vibration mitigation performance compared with the traditional NES. This research systematically elucidates the internal dynamic mechanism by which the lever amplification improves the robustness of the NES，providing a solid theoretical basis for its parameter optimization and applications in seismic engineering.

Keywords: structural vibration control; nonlinear energy sink; strongly modulated response; amplification device

收稿日期：2025-08-06；**修订日期：**2025-08-27
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52308001, W2411050, 12432001）；结构抗风与振动控制湖南省重点实验室开放基金资助项目（E22439）；湖南科技大学校级科研课题项目（纵 20240008）

在现代被动减振领域中，非线性能量阱（nonlinear energy sink, NES）因其轻质和宽频工作范围，相较于传统的调谐质量阻尼器（tuned mass damper, TMD）展现出独特的优势与潜力，已成为结构抗振研究的热点[1-3]。NES 一显著特点在于其独特的“靶向能量传递”（targeted energy transfer, TET）机制[4-5]。该机制能够在特定条件下被触发，实现从主结构到 NES 子系统的单向、不可逆的能量“泵送”，并将能量高效耗散，而其背后的动力学行为基础，便是一种被称为“强调制响应”（strongly modulated response, SMR）[6] 的特殊共振形态。然而，GENDELMAN 等[7-8] 发现：主结构受简谐激励的 NES 系统 SMR 的产生被严格约束在 1∶1 主共振的苛刻条件下，即外部激励频率需与主结构自振频率精确匹配。这种对频率参数的高度敏感性，使得传统 NES 在面对土木工程中普遍存在的结构参数不确定性、材料老化或激励频率漂移（如风致涡振、地震动的宽频特性）等真实工况时，其减振性能会急剧下降甚至失效，表现得十分“脆弱”。因此，如何从根本上增强 SMR 的鲁棒性，使其摆脱对精确共振的依赖，是推动 NES 从理论走向广泛工程应用亟待解决的关键科学问题。

机械放大装置的引入为解决上述挑战提供了思路与契机。传统上，放大装置主要被用于突破土木工程中的另一项技术瓶颈：由于抗震设计规范的严格要求[9-10]，主体结构的层间位移被控制在极小范围内，这导致与之相连的传统阻尼器工作行程严重受限，无法充分发挥其耗能潜力。通过与齿轮齿条型[11]、肘节型[12]、负刚度型[13-14] 或杠杆型[15-16] 等放大装置（如图 1 所示）相结合，微小的结构变形可被显著放大后传递给阻尼器，从而极大地提升其减振性能。



(a) 齿轮齿条式放大装置
(a) Rack-and-pinion deformation amplification device

(b) 肘节式变形放大装置
(b) Toggle-type deformation amplification device

(c) 负刚度位移放大型黏滞阻尼器
(c) Negative stiffness viscous damper deformation amplification device

(d) 杠杆式放大装置
(d) Lever-type deformation amplification device

图 1 不同实现方式的放大装置

Fig. 1 Amplification devicese with different implementation methods

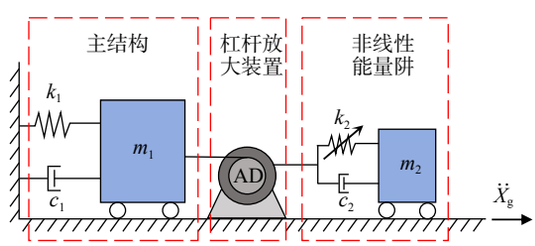
在结合 NES 与变形放大装置的研究中，ZANG 等[17-18] 研究了杠杆型非线性能量阱（lever-type nonlinear energy sink, LNES）的动态特性，通过分岔分析揭示了闭合分离共振模式在振动抑制性能中的关键作用，并证明了机械放大机制能有效降低附加质量需求。ZHAO 等[19] 采用有限元方法对比了带放大装置的非线性与线性刚度系统的减振性能，其研究表明，非线性弹簧装置在近共振区显著提升了能量耗散效率，并通过桥梁结构地震响应案例验证了工程实用性。然而现有研究仍存在以下局限：（1）带放大装置的 NES 减振系统对设计参数的鲁棒性尚不明确；（2）对于放大机制与非线性刚度间的耦合效应缺乏定量分析；（3）仅分析了含放大装置 NES 减振系统在特定情况下的耗能效率，未完全阐明其能量耗散机理。（4）大部分关于含放大装置 NES 减振系统的研究针对的是主结构力激励下的情况，对于基底激励系统缺乏相关细致研究，因而对于地震工程并不适用。

针对上述问题，本文以 LNES 系统为例，分析基底激励下含放大装置 NES 减振系统的动力学行为及减振性能。本文首先建立 LNES 与单自由度（single degree of freedom, SDOF）结构的耦合动力学模型，并运用复变量平均法与多尺度法，推导能够精确描述系统核心动态、且同时包含放大比与失谐参数（外激励频率与主结构频率的偏移度量）的慢变流形方

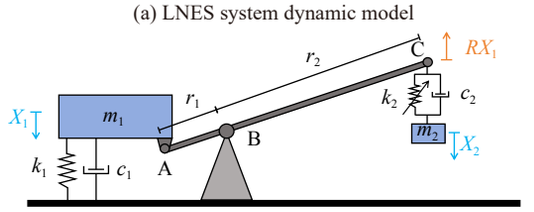
程。在此基础上，通过对鞍结分岔与霍普夫分岔在关键参数空间中的演化规律分析，从理论上揭示放大比拓宽 SMR 有效频率带宽的内在机理。最后，通过在简谐激励与真实地震波激励下的时域数值仿真，验证 LNES 的减振性能。

1　系统模型

基底激励下 LNES 与单自由度结构的耦合模型如图 2 所示。为方便分析，将主结构简化为一单自由度系统，其质量、阻尼和刚度分别为 m_1、c_1 和 k_1。LNES 主要包括 1 个杠杆放大装置（amplification device, AD）和 1 个 NES，通过杠杆放大装置连接主结构和 NES。m_2、c_2 和 k_2 分别为非线性能量阱的质量、阻尼和刚度。主结构和 NES 的位移分别为 $X_1(T)$ 和 $X_2(T)$。$\ddot{X}_g$ 为基底激励加速度，r_1 为 AB 的长度，r_2 为 CB 的长度。



(a) LNES系统动力学模型
(a) LNES system dynamic model



(b) 杠杆装置示意图
(b) Schematic diagram of the lever device

图 2　基底激励下 LNES 与单自由度结构的耦合模型

Fig. 2　Coupled model of a SDOF structure with a LNES subjected to the base excitation

为方便分析，杠杆被理想化为无质量的刚性杆，$R=r_2/r_1$ 定义为放大比。根据杠杆原理，当主结构发生位移 $X_1(T)$（T 为时间的量纲）时，引起 NES 端发生位移 $-RX_1(T)$。除此之外，NES 端自身发生位移 X_2。因此，作用在 NES 非线性弹簧和阻尼器上的相对位移为（X_2-RX_1）（如图 2(b) 所示）。因此，可以得到 NES 端对杠杆的作用力 F_{NES} 为：

$$F_{\mathrm{NES}}=c_2[\dot{X}_2(T)-R\dot{X}_1(T)]+k_2[RX_1(T)-X_2(T)]^3 \quad (1)$$

为使杠杆保持力矩平衡，主结构必须通过连接点对杠杆施加一个力。根据力矩平衡原理，该力 F_{p} 与 F_{NES} 的关系为：

$$F_{\mathrm{p}}\cdot r_1=-F_{\mathrm{NES}}\cdot r_2 \quad (2)$$

即可得 $F_{\mathrm{p}}=-RF_{\mathrm{NES}}$。

然后，通过达朗贝尔定理和牛顿第二定律分别对主结构和 NES 内部进行分析，可以建立 LNES 与单自由度结构的耦合动力学模型如下：

$$\begin{cases} m_1\ddot{X}_1(T)+c_1\dot{X}_1(T)+k_1X_1(T)+R[c_2(R\dot{X}_1(T)-\dot{X}_2(T))+k_2(RX_1(T)-X_2(T))^3]=-m_1\ddot{X}_{\mathrm{g}}(T) \\ m_2\ddot{X}_2(T)+c_2(\dot{X}_2(T)-R\dot{X}_1(T))+k_2(X_2(T)-RX_1(T))^3=-m_2\ddot{X}_{\mathrm{g}}(T) \end{cases} \quad (3)$$

定义参数 $\omega_j=\sqrt{k_j/m_j}$（j=1,2），$\ddot{X}_{\mathrm{g}}=F\cos(\tilde{\omega}T)$，其中 F 为加速度，单位为 m/s²。对式 (3) 做尺度调整：$\tau=\omega_1T$，引入长度量纲 D_1，为计算方便取 $D_1=1$（均采用国际单位制）。定义无量纲参数（具体如表 1 所示）并代入式 (3) 整理可得无量纲系统，运动方程如下式所示：

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(\tau)+\varepsilon\eta_1\dot{x}_1(\tau)+x_1(\tau)+\varepsilon R\eta_2(R\dot{x}_1(\tau)-\dot{x}_2(\tau))+\varepsilon R\Omega(Rx_1(\tau)-x_2(\tau))^3=-\varepsilon A\cos(\omega\tau) \\ \ddot{x}_2(\tau)+\eta_2(\dot{x}_2(\tau)-R\dot{x}_1(\tau))+\Omega(x_2(\tau)-Rx_1(\tau))^3=-\varepsilon A\cos(\omega\tau) \end{cases} \quad (4)$$

表 1　无量纲参数

Tab. 1　Dimensionless parameters

无量纲参数	参数含义
$\varepsilon=m_2/m_1\ll1$	LNES吸振器与主结构的质量比
$\eta_1=c_1/(m_2\omega_1)$	主结构阻尼比
$\eta_2=c_2/(m_2\omega_1)$	LNES阻尼比
$A=F/(\varepsilon D_1\omega_1^2)$	外激励振幅
$\Omega=\omega_2^2/\omega_1^2$	非线性能量阱与主结构的频率比
$\omega=\tilde{\omega}/\omega_1$	外激励频率

由于本文研究的是系统在外激励频率 ω 为 1∶1 主共振下的 SMR，假设外激励频率为 $\omega=1+\varepsilon\sigma$（$\sigma$ 为失谐参数），引入变量代换 $v=Rx_1+\varepsilon x_2$，$w=Rx_1-x_2$，并代入式 (4)，忽略主结构阻尼，整理可得：

$$\begin{cases} \dot{v}+\dfrac{v+\varepsilon w}{1+\varepsilon}+\varepsilon\eta_2(R^2-1)\dot{w}+\varepsilon\Omega(R^2-1)w^3= \\ \quad -\varepsilon(R+\varepsilon)A\cos[(1+\varepsilon\sigma)\tau] \\ \ddot{w}+\dfrac{v+\varepsilon w}{1+\varepsilon}+\eta_2(1+\varepsilon R^2)\dot{w}+\Omega(1+\varepsilon R^2)w^3= \\ \quad \varepsilon(1-R)A\cos[(1+\varepsilon\sigma)\tau] \end{cases} \quad (5)$$

复变量平均法作为一种分析非线性动力学系统的近似解析方法，该方法虽然基于“弱”非线性的假设，但在实践中被证明对具有强非线性特征的 NES 同样有效[20-21]。其核心优势在于通过引入复变量，将系统原本的二阶非线性微分运动方程转化为关于振幅和相位缓慢变化的一阶复微分方程。这种对快慢时间尺度的分离不仅极大地简化了系统模型，而且有效预测了稳态响应及分岔等关键非线性现象。相较于难以描述 SMR 非平稳特性的谐波平衡法以及推导过程相对繁琐的一般扰动法，该方法能以更紧凑的形式一步到位地获得研究所需的慢变

流形方程，为后续的 SMR 分析与参数设计提供高效且普适的理论工具。本文采用复变量平均法对系统进行分析。引入复变量 $\phi_1 e^{i\tau}=\dot{v}+iv$，$\phi_2 e^{i\tau}=\dot{w}+iw$（其中，$\phi_j(j=1,2)$为系统的慢变幅值，$e^{i\tau}$为系统的快变过程，$i=\sqrt{-1}$），代入式 (5) 并采用平均法消除快变过程 $e^{i\tau}$，整理可得：

$$\begin{cases}\dot{\phi}_1+\dfrac{i\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(\phi_1-\phi_2)+\dfrac{\varepsilon\eta_2(R^2-1)}{2}\phi_2-\\ \quad\dfrac{3i\varepsilon\Omega(R^2-1)}{8}|\phi_2|^2\phi_2=\dfrac{-\varepsilon(R+\varepsilon)A}{2}e^{i\varepsilon\sigma\tau}\\ \dot{\phi}_2+\dfrac{i}{2(1+\varepsilon)}(\phi_2-\phi_1)+\dfrac{\eta_2(1+\varepsilon R^2)}{2}\phi_2-\\ \quad\dfrac{3\Omega i(1+\varepsilon R^2)}{8}|\phi_2|^2\phi_2=\dfrac{\varepsilon(1-R)A}{2}e^{i\varepsilon\sigma\tau}\end{cases}\tag{6}$$

令 $\varphi_j=\phi_j e^{-i\varepsilon\sigma\tau}(j=1,2)$，代入式 (6) 进一步化简整理可得：

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_1+i\varepsilon\sigma\varphi_1+\dfrac{i\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(\varphi_1-\varphi_2)+\\ \quad\dfrac{\varepsilon\eta_2(R^2-1)}{2}\varphi_2-\dfrac{3i\varepsilon\Omega(R^2-1)}{8}|\varphi_2|^2\varphi_2=\dfrac{-\varepsilon(R+\varepsilon)A}{2}\\ \dot{\varphi}_2+i\varepsilon\sigma\varphi_2+\dfrac{i}{2(1+\varepsilon)}(\varphi_2-\varphi_1)+\\ \quad\dfrac{\eta_2(1+\varepsilon R^2)}{2}\varphi_2-\dfrac{3\Omega i(1+\varepsilon R^2)}{8}|\varphi_2|^2\varphi_2=\dfrac{\varepsilon(1-R)A}{2}\end{cases}\tag{7}$$

2 慢变系统的强调制响应机理

第 1 节通过复变量平均法得到系统慢变幅值的一阶复微分运动方程，为研究系统的 SMR，将式 (7) 整理为单个二阶微分运动方程：

$$\frac{d}{d\tau^2}(\varphi_2)+\frac{d}{d\tau}\left(\frac{i(4+16\varepsilon\sigma-3\Omega|\varphi_2|^2-3\varepsilon\Omega R^2|\varphi_2|^2-4i(1+\varepsilon R^2)\eta_2)\varphi_2}{8}\right)-$$
$$\frac{\varepsilon(16\varepsilon\sigma^2-3\Omega R^2|\varphi_2|^2+\sigma(8-6(\Omega+\varepsilon\Omega R^2)|\varphi_2|^2)-4i(2\sigma+R^2(1+2\varepsilon\sigma))\eta_2)\varphi_2}{16}=-\frac{\varepsilon iA}{4}(R-2\varepsilon\sigma+2R\varepsilon\sigma)\tag{8}$$

式中："$|\cdot|$"表示模。

由于式 (8) 中的非线性项含有远小于 1 的 ε 项，为了精确分析系统的慢变微分运动方程，需要引入适用于缓慢移动过程的时间尺度。采用多尺度法对式 (8) 进行分析，定义：$\varphi_2=\varphi_2(\tau_0,\tau_1,\cdots)$，$\tau_j=\varepsilon^j(j=0,1,\cdots)$，则微分算子变为：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{d\tau}=\dfrac{\partial}{\partial\tau_0}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau_1}+\cdots\\ \dfrac{d^2}{d\tau^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial\tau_0^2}+2\varepsilon\dfrac{\partial^2}{\partial\tau_0\partial\tau_1}+\cdots\end{cases}\tag{9}$$

将式 (9) 代入式 (8)，考虑时间尺度的前两阶可得：

$$\begin{cases}\varepsilon^0\dfrac{\partial^2}{\partial\tau_0^2}(\varphi_2)+\dfrac{\partial}{\partial\tau_0}\left[\dfrac{i(4-3\Omega|\varphi_2|^2-4i\eta_2)\varphi_2}{8}\right]=0\\ \varepsilon^1 2\dfrac{\partial^2}{\partial\tau_0\partial\tau_1}(\varphi_2)+\dfrac{\partial}{\partial\tau_1}\left[\dfrac{i(4-3\Omega|\varphi_2|^2-4i\eta_2)\varphi_2}{8}\right]+\\ \quad\dfrac{\partial}{\partial\tau_0}\left[\dfrac{i(16\sigma-3\Omega R^2|\varphi_2|^2-4iR^2\eta_2)\varphi_2}{8}\right]+\\ \quad\dfrac{[3\Omega R^2|\varphi_2|^2+\sigma(6\Omega|\varphi_2|^2-8)+4i(2\sigma+R^2)\eta_2]\varphi_2}{16}=-\dfrac{iAR}{4}\end{cases}\tag{10}$$

其中，第 1 式和第 2 式分别代表着不同时间尺度下的平均系统，对第 1 式进行积分可得：

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_0}+\frac{i\varphi_2}{2}+\frac{\eta_2\varphi_2}{2}-\frac{3i\Omega|\varphi_2|^2\varphi_2}{8}=C(\tau_1)\tag{11}$$

式中，C 为时间尺度 τ_1 的函数。令 $\partial\varphi_2/\partial\tau_0=0$，可得 φ_2 的不动点满足：

$$\frac{i\varphi_2}{2}+\frac{\eta_2\varphi_2}{2}-\frac{3i\Omega|\varphi_2|^2\varphi_2}{8}=C(\tau_1)\tag{12}$$

显然，φ_2 的不动点方程是关于时间 τ_1 的函数。令 $\varphi_2=N(\tau_1)e^{i\theta(\tau_1)}$（$N$ 为系统慢变振幅，θ 为系统慢变幅角），代入式 (12) 后，等号两边同时取模，有：

$$Z+\eta_2^2Z-\frac{3\Omega}{2}Z^2+\frac{9\Omega^2}{16}Z^3=4|C|^2\tag{13}$$

式中，$Z=N^2$。

为了判断不动点的个数，对式 (13) 中的 Z 求导可得：

$$1+\eta_2^2-3\Omega Z+\frac{27\Omega^2}{16}Z^2=0\tag{14}$$

显然，式 (14) 的根 $Z_j=\left(8\pm4\sqrt{1-3\eta_2^2}\right)/(9\Omega);j=1,2$。

由式 (14) 的求根公式可知，系统不动点的个数仅取决于阻尼比 η_2。当 $\eta_2<\sqrt{3}/3$ 时，系统响应的幅值函数呈现非单调特性，这是鞍结分岔发生的前提。鞍结分岔[22]对应于稳定与不稳定不动点（即稳态解）的"突然产生"或"湮灭消失"，其解释了系统响应的"跳跃"现象，并决定了高效能量转移的触发阈值。因此，鞍结分岔的存在是系统出现 SMR 的必要条件，即只有当系统存在鞍结分岔，并有足够的能量输入时，系统才可能发生 SMR。为直观展示这一动力学行为，可通过慢变流形方程 (13) 绘制系统的运动轨迹（相平面图），如图 3 所示。

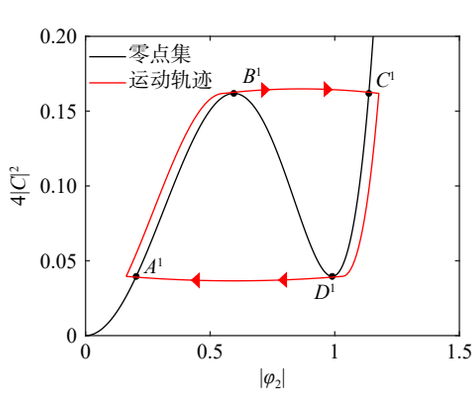


图 3 系统慢变幅值运动轨迹（R=1, η_2=0.2, Ω=4/3）

Fig. 3 Motion trajectory of slow-flow amplitude of the system (R=1, η_2=0.2, Ω=4/3)

图 3 中, 黑色的 S 型曲线代表由式 (13) 决定的系统零点集, 即“慢变流形”。该流形由两段稳定分支(上方的 A^1-B^1 和下方的 C^1-D^1)以及一段连接它们的不稳定分支组成。其中, 点 B^1 和 D^1 是稳定与不稳定分支的交汇点, 对应于系统的鞍结分岔点。图中红色箭头所指示的闭合曲线是一条典型的系统运动轨迹。具体过程为: 当系统状态沿上方的稳定分支 A^1-B^1 运动至鞍结分岔点 B^1 时, 该稳态解消失, 系统被迫“跳跃”至下稳定分支的点 C^1。随后, 轨迹沿下稳定分支 C^1-D^1 运动, 在到达另一个鞍结分岔点 D^1 后, 又“跳跃”回到上稳定分支的点 A^1, 从而完成一个完整的循环。这一包含了在分岔点处快速跳跃和在稳定分支上缓慢运动的完整过程, 即为系统的 SMR。

3　强调制响应存在的条件

3.1　必要条件

在第 2 节中得到系统的 SMR 发生的必要条件是存在一鞍结分岔点, 在式 (14) 的求根式中只能体现鞍结分岔与阻尼 η_2 的关系, 其他参数的信息未能体现, 所以需要分析更高阶时间尺度 τ_1 下系统解的行为, 考虑 $\tau_0\to\infty$, 则 $\lim\limits_{\tau_0\to\infty}\varphi_2=\varphi_2(\tau_1)$, 代入式 (10) 中的第二式, 整理可得:

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left[\frac{\mathrm{i}(4-3\Omega|\varphi_2|^2-4\mathrm{i}\eta_2)\varphi_2}{8}\right]+\frac{[3\Omega R^2|\varphi_2|^2+\sigma(6\Omega|\varphi_2|^2-8)+4\mathrm{i}(2\sigma+R^2)\eta_2]\varphi_2}{16}=-\frac{\mathrm{i}AR}{4}\tag{15}$$

将式 (13) 改写为 $H_1(\partial\varphi_2/\partial\tau_1)+H_2(\partial\varphi_2^*/\partial\tau_1)=H_3$, 其中“*”表示取共轭, 将 $\varphi_2=N\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 代入式(15)并分离实部和虚部可得:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial\tau_1}=\dfrac{1}{D}[-\dfrac{\eta_2AR}{8}\sin\theta-\dfrac{AR}{4}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\Omega N^2}{8})\cos\theta-\\ \qquad(\dfrac{N\eta_2}{4})(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\Omega N^2}{8})(2\sigma+R^2)-\\ \qquad\dfrac{N\eta_2}{32}(3\Omega R^2N^2+6\sigma\Omega N^2-8\sigma)]\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau_1}=\dfrac{1}{ND}[\dfrac{AR}{4}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{9\Omega N^2}{8})\sin\theta-\dfrac{\eta_2AR}{8}\cos\theta+\\ \qquad\dfrac{N}{16}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{9\Omega N^2}{8})(3\Omega R^2N^2+6\sigma\Omega N^2-8\sigma)-\\ \qquad\dfrac{N\eta_2^2}{8}(2\sigma+R^2)]\end{cases}\tag{16}$$

式中, $D=1/4(\eta_2^2+1-3\Omega N^2+27\Omega^2N^4/16)$。

将式 (16) 改写为简洁的分式形式:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial\tau_1}=\dfrac{f_1(N,\theta)}{D}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau_1}=\dfrac{f_2(N,\theta)}{D}\end{cases}\tag{17}$$

对慢流形方程 (17) 的分析表明, 系统存在两类性质不同的不动点: 一类是普通不动点, 此类不动点满足分子 $f_j(N,\theta)=0$; j=1,2, 而分母 $D\neq0$ 代表了可直接求解的常规稳态响应; 另一类是奇异不动点, 此类不动点发生在分子与分母同时为零(即 $f_j(N,\theta)=0$; j=1,2 且 $D=0$)的特殊情况, 在动力学上常被称为折奇点。通过理论推导可知, 折奇点的存在条件($D=0$)与前述式 (14) 所定义的鞍结分岔点的条件完全等价。因此, 折奇点的存在是系统能够出现 SMR 的根本前提与必要条件。将满足折奇点存在的式 (17) 改写为矩阵形式有:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\tag{18}$$

其中:

$$\begin{cases}a_{11}=-\eta_2AR/8\\ a_{12}=(-AR/8)/(1-3\Omega N^2/4)\\ a_{21}=(AR/8N)/(1-9\Omega N^2/4)\\ a_{22}=-\eta_2AR/8N\\ b_1=(N\eta_2/8)(1-3\Omega N^2/4)(2\sigma+R^2)+\\ \qquad(N\eta_2/32)(3\Omega R^2N^2+6\sigma\Omega N^2-8\sigma)\\ b_2=-1/32(1-9\Omega N^2/4)(3\Omega R^2N^2+\\ \qquad6\sigma\Omega N^2-8\sigma)+\eta_2^2/8(2\sigma+R^2)\end{cases}$$

通过计算式 (18) 的系数矩阵行列式可得:

$$\det(a)=\frac{A^2R^2(16-48\Omega N^2+27\Omega^2N^4+16\eta_2^2)}{1024N}=\frac{A^2R^2}{16N}D=0\tag{19}$$

根据式 (19) 可知, 矩阵方程 (18) 中的 2 个方程线性相关, 故求解折奇点的存在条件仅需使用其中 1 个即可。本文选取第 1 个方程进行分析, 令:

$$\begin{cases}G\sin\alpha=-\dfrac{\eta_2AR}{8}\\ G\cos\alpha=-\dfrac{AR}{4}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\Omega N^2}{8})\\ G=\dfrac{AR\sqrt{(4-3\Omega N^2)^2+16\eta_2^2}}{32}\\ \alpha=\sin^{-1}\left(\dfrac{-4\eta_2}{\sqrt{(4-3\Omega N^2)^2+16\eta_2^2}}\right)\end{cases}\tag{20}$$

代入第 1 个方程可解得 2 对折奇点的幅角:

$$\begin{cases}\theta_{1j}=\alpha_1\pm\cos^{-1}\left(\dfrac{4R\eta_2N_1}{A\sqrt{(4-3\Omega N_1^2)^2+16\eta_2^2}}\right)\\ \theta_{2j}=\alpha_2\pm\cos^{-1}\left(\dfrac{4R\eta_2N_2}{A\sqrt{(4-3\Omega N_2^2)^2+16\eta_2^2}}\right)\end{cases};\ j=1,2\tag{21}$$

其中, N_1 和 N_2 分别对应于图 2 中的 B^1 和 D^1。为了满足折奇点存在的合理性, θ_{1j} 和 θ_{2j} 还需满足:

$$\begin{cases}\left|\dfrac{-4\eta_2}{\sqrt{(4-3\Omega N_j^2)^2+16\eta_2^2}}\right|\leqslant1\\ \left|\dfrac{4R\eta_2N_j}{A\sqrt{(4-3\Omega N_j^2)^2+16\eta_2^2}}\right|\leqslant1\end{cases}\tag{22}$$

显然第 1 式恒成立。对式 (22) 做简单变形可得:

$$\left|\frac{4R\eta_2 N_j}{\sqrt{(4-3\Omega N_j^2)^2+16\eta_2^2}}\right| \leqslant A_j;\quad j=1,2 \tag{23}$$

通过式 (23) 即可判断折奇点存在时，在不同放大比 R 下振幅 A 应满足的下限值，具体如图 4 和表 2 所示。

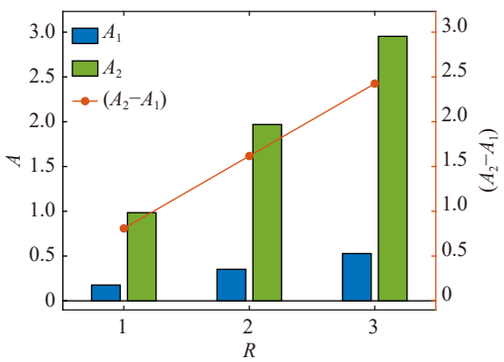


图 4 不同放大比下的折奇点存在条件（η_2=0.2, Ω=4/3）

Fig. 4 Existence conditions of the fold singularity at different magnification ratios (η_2=0.2, Ω=4/3)

表 2 不同放大比下的振幅阈值与分岔点（η_2=0.2，Ω=4/3）

Tab. 2 Amplitude thresholds and bifurcation points for different magnification ratios（η_2=0.2，Ω=4/3）

放大比R	A_1	A_2	N_1	N_2
1	0.176	0.984		
2	0.352	1.969	0.595	0.990
3	0.528	2.953		

表 2 的数据揭示了在固定参数 η_2=0.2 和 $\Omega=4/3$ 下，放大比 R 对系统鞍结分岔指标的影响。分析可知，一个显著的特点是，代表鞍结分岔点位置的响应幅值 N_1 和 N_2 在此参数条件下保持恒定，不随 R 的变化而变化，这表明系统的内在非线性响应结构具有稳定性。然而，尽管分岔点的位置是固定的，但要触发这一行为所需的外部激励阈值（以 A_1 和 A_2 为表征）却随着 R 的增大而提高，且对于 A_2 的增幅是显著的。这一结果清晰地表明，放大比 R 并未改变系统发生 SMR 的内在特性（即分岔结构），但它改变了触发该响应所需的能量输入门槛，即 R 越大，就需要越强的外部激励才能使系统“跳跃”至高效的能量耗散状态。

3.2 充分条件

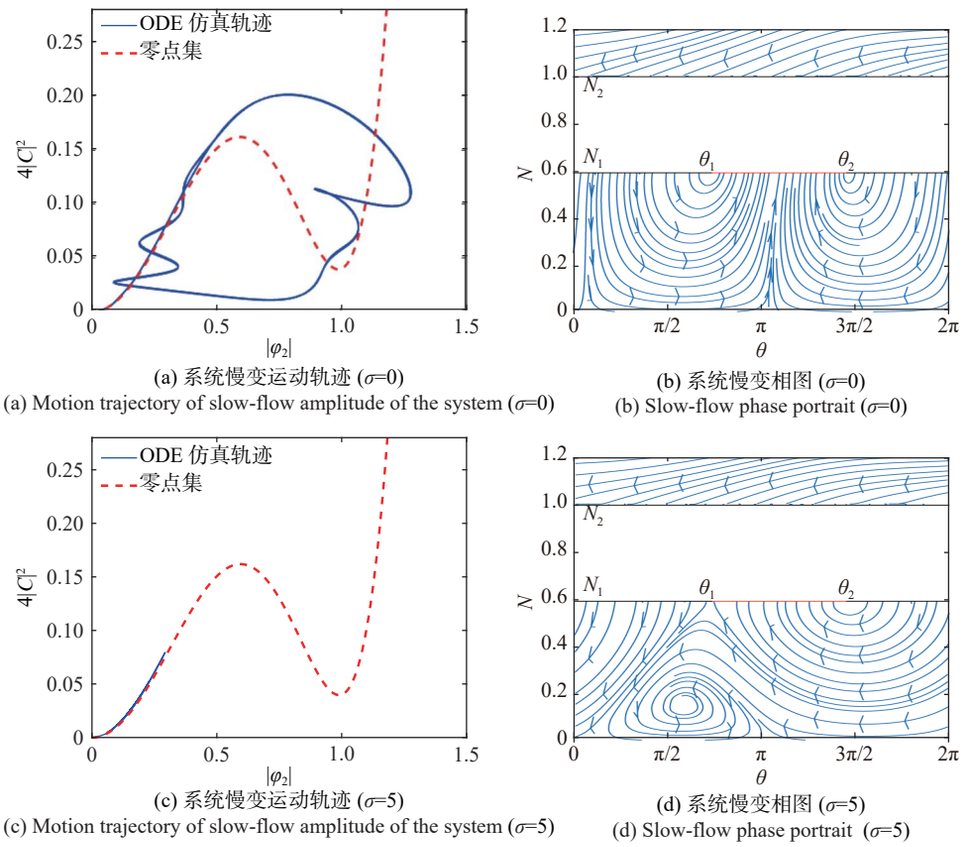
前文导出的必要条件确保了 SMR 所需的动力学结构即鞍结分岔的存在，但它并未包含失谐参数 σ 的影响，因此不能保证系统在任意初始条件下都能被成功激发至 SMR 状态。为此，本小节旨在探讨系统进入 SMR 的充分条件。基于完整的慢变流形方程 (16)，通过分析系统的相平面轨迹来考察失谐参数 σ 的影响。其核心在于，判断不同失谐参数下系统的相轨迹是否能够收敛至描述 SMR 的稳定极限环[23-24]（如图 3 所示的红色闭合回线），而非陷入其他稳态解。系统的相关全局动力学行为及分岔特性如图 5 所示。

图 5 直观地揭示了失谐参数 σ 对系统动力学行为的决定性作用。当 $\sigma=0$ 时（如图 5(a) 与 (b)），系统展现出稳定的 SMR。从零初始条件出发的数值解轨迹（蓝色曲线）显示，系统状态首先运动至上稳定分支的鞍结分岔点 N_1，随即“跳跃”至下稳定分支；接着沿下稳定分支运动至分岔点 N_2 后再次“跳跃”回到上稳定分支，从而形成一个不被其他不动点捕获的、稳定极限环。其对应的相图 5(b) 也表明，这是一个吸引整个相空间的稳定极限环。然而，当 σ 增大至 5 时（如图 5(c) 与 (d)），尽管系统仍满足 SMR 存在的必要条件（即折奇点存在），但全局动力学特性已改变。此时，SMR 极限环失去了其吸引力，从零初始条件出发的解轨迹被吸引至低能量稳态不动点，σ 的增大使 SMR 最终消失。

上述数值结果表明，SMR 的成功激发需要一个更严格的充分条件。为了从理论上精确描述该条件，可借鉴相图的几何特性构造一个庞加莱映射 (Poincaré map) f：$\Theta\to\Theta$。此处，Θ 为慢流形下稳定分支上选定的一段横截面（初始区间，如图 5(b) 和 (d) 中红色线段所示）。该映射 f 描述了从 Θ 上任意一点出发的相轨迹，在经历一次完整的“跳跃-运动”循环后再次回到该区间的位置。根据微分方程解的唯一性，该映射的性质直接决定了 SMR 的稳定性：若映射 f 是一一到上的映射（one to one and onto），即 $f(\Theta)=\Theta$，则意味着所有轨迹都能回归，形成稳定的 SMR 极限环（对应图 5(a) 和 (b) 的情形）；反之，若 f 为一一映射，则轨迹最终会收敛至其他不动点，导致 SMR 消失。因此，通过分析此映射的性质，即可确定 SMR 存在的充分条件。定义各路径为 $B^1\to C^1$、$C^1\to D^1$、$D^1\to A^1$、$A^1\to B^1$，各路径映射为 f_1、f_2、f_3、f_4。映射 f_2 和 f_4 是类似的，这两个映射对应于稳定分支上的“缓慢”运动，可通过对式 (16) 积分得到。对于“跳跃”部分的映射 f_1 和 f_3，可利用“跳跃”前后 $C(\tau_1)$ 的不变性预测落点的坐标，如下式所示：

$$\begin{cases} Z_{A^1}=\dfrac{8\left(1-\sqrt{1-3\eta_2^2}\right)}{9\Omega} \\ Z_{C^1}=\dfrac{8\left(1+\sqrt{1-3\eta_2^2}\right)}{9\Omega} \\ \theta_{C^1}=\theta_{B^1}-\arctan\left(\dfrac{9\eta_2\sqrt{1-3\eta_2^2}}{1-15\eta_2^2+\sqrt{1-3\eta_2^2}}\right) \\ \theta_{A^1}=\theta_{D^1}-\arctan\left(\dfrac{9\eta_2\sqrt{1-3\eta_2^2}}{-1+15\eta_2^2+\sqrt{1-3\eta_2^2}}\right) \end{cases} \tag{24}$$

式中，Z_{A^1} 和 Z_{C^1} 为“跳跃”落点的幅值坐标；θ_{C^1} 和 θ_{A^1} 为“跳跃”后的幅角坐标；θ_{B^1}、θ_{D^1} 为“跳跃”前的幅角坐标。将各路径依次组合，即 $f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1=f$，便可得到各路径的映射和 $\Theta\to\Theta$ 的映射，具体如



(a) 系统慢变运动轨迹 (σ=0)
(a) Motion trajectory of slow-flow amplitude of the system (σ=0)

(b) 系统慢变相图 (σ=0)
(b) Slow-flow phase portrait (σ=0)

(c) 系统慢变运动轨迹 (σ=5)
(c) Motion trajectory of slow-flow amplitude of the system (σ=5)

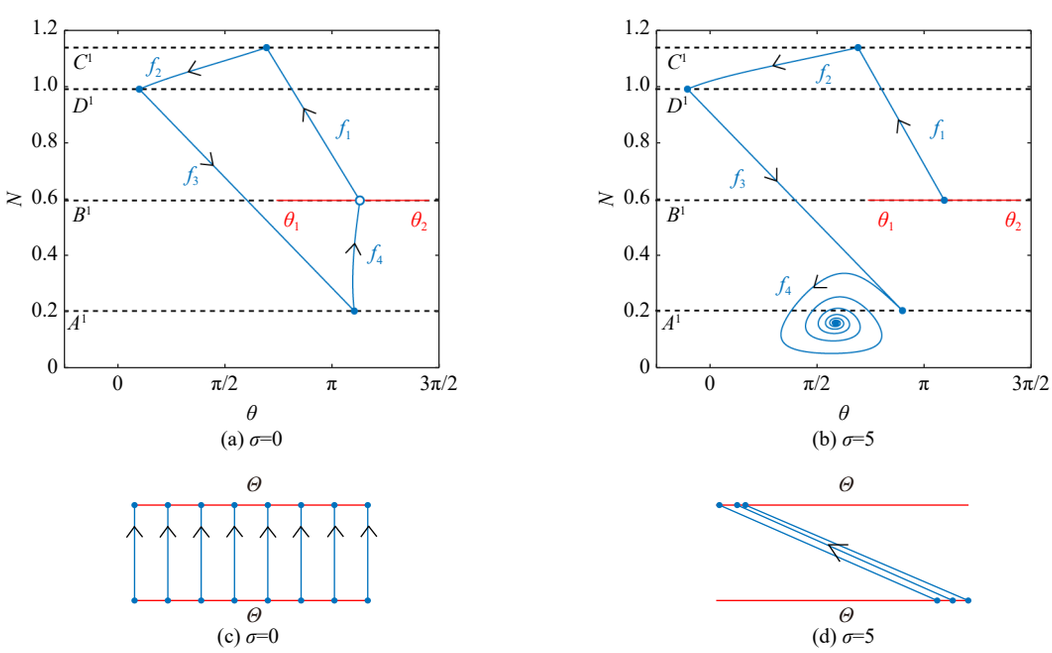
(d) 系统慢变相图 (σ=5)
(d) Slow-flow phase portrait (σ=5)

图 5　系统慢变流形（R=2, Ω=4/3, A=0.8, η_2=0.2, ε=0.01）

Fig. 5　Slow-flow manifold of the system (R=2, Ω =4/3, A=0.8, η_2=0.2, ε=0.01)

图 6 所示。

图 6 中的庞加莱映射为判断 SMR 的充分条件提供了直观的几何判据。在满足必要条件（即折奇点存在条件）且失谐参数$\sigma=0$时，庞加莱映射f表现为从初始区间 Θ 的一一到上映射，如图 6(c) 所示。这意味着 Θ 是一个不变集，从该区间出发的任何轨迹在经历一次循环后都将返回此区间，从而确保了 SMR 稳定极限环的全局吸引性和鲁棒性。然而，当失谐参数增大至 $\sigma=5$ 时，系统的全局动力学结构发生了质变，相平面上（图 6(b)）在原极限环附近出现了一个新的稳定焦点。这导致庞加莱映射的像$f(\Theta)$仅为 Θ 的一个微小子集（如图 6(d)），绝大部分轨迹被稳定焦点捕获而无法返回。更重要的是，即便有少数轨迹返回，该映射的迭代也将使其迅速逃离，表



(a) σ=0

(b) σ=5

(c) σ=0

(d) σ=5

图 6　庞加莱映射（R=2, Ω=4/3, A=0.8, η_2=0.2, ε=0.01）

Fig. 6　Poincaré map (R=2, Ω=4/3, A=0.8, η_2=0.2, ε=0.01)

明此时的 SMR 周期解已失去稳定性。以上分析明确了 SMR 的充分条件：不仅需要足够的能量输入，还必须将失谐参数 σ 控制在极小的范围内，以避免其他吸引子的出现，破坏 SMR 极限环的稳定性。

4 理论仿真与验证

前续章节已深入探讨了系统产生 SMR 的内在机理，并分别从理论上确立了其所需的必要条件（确保 SMR 动力学结构的存在）与充分条件（确保 SMR 极限环的稳定性）。在此完备的理论框架基础上，本节的核心任务是回归工程应用，系统性地分析 LNES 的关键设计参数，即杠杆放大比 R 对 SMR 的影响。为实现这一目标，借助系统的慢流形方程即式 (16)，通过数值仿真来考察不同放大比 R 与失谐参数 σ 组合下系统相空间的全局动力学演化特性。通过绘制一系列相轨迹来直观展示 R 和 σ 的耦合作用，具体分析如图 7 所示。

图 7 系统性地揭示了放大比 R 与失谐参数 σ 对 SMR 的耦合影响。在所有子图中，外激励幅值 A=0.8 的设定确保了 SMR 存在的必要条件得以满足，图中灰色曲线为慢流形，图 7(j) 展示了系统在零初始条件下的实际演化路径。首先，如图 7(a)~(c) 所示，当系统处于精确的 1∶1 主共振状态（σ=0）时，无论放大比 R 取何值，系统都能被成功激发至 SMR 状态，其运动轨迹最终都将收敛至作为稳定吸引子的 SMR 极限环。然而，一个关键的分化现象出现了：当 σ=2 时，LNES 系统（R=1）的 SMR 如预期般消失，轨迹被

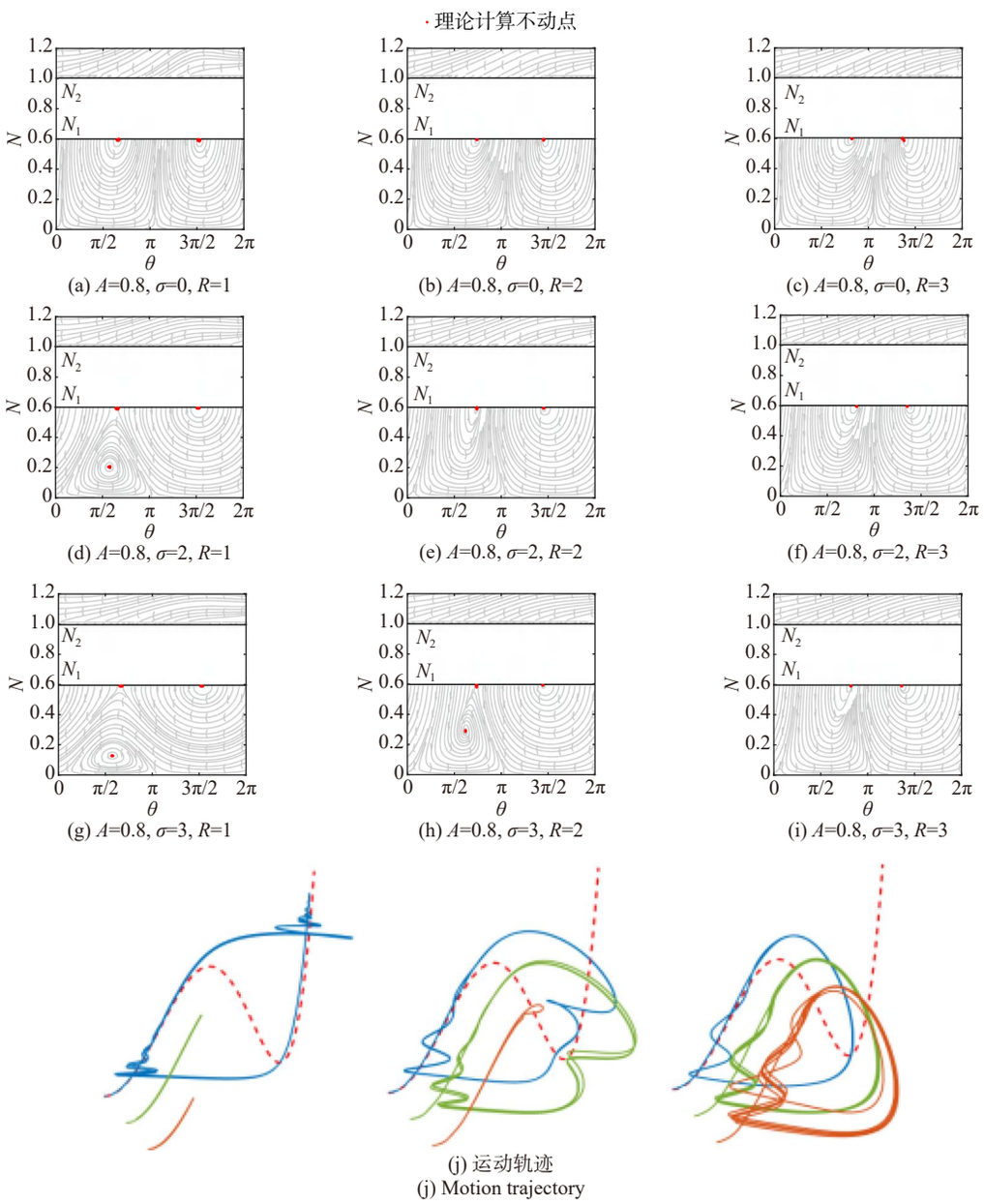


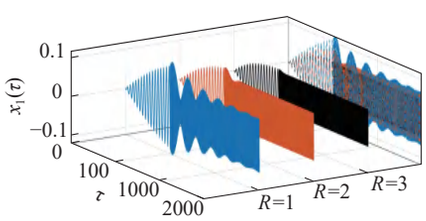
图 7 系统慢变相图与运动轨迹（Ω=4/3, η_2=0.2, ε=0.01；系统的零点集的结构对于上述参数的变化具有不变性）

Fig. 7 Slow-flow phase portrait and motion trajectory (Ω=4/3, η_2=0.2, ε=0.01; The structure of the system's zero set is invariant to changes in the aforementioned parameters)

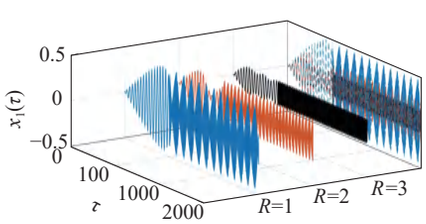
低能稳态解捕获（图 7(d)）；但对于 R=2 和 R=3 的系统，SMR 极限环依然保持其吸引力，系统成功维持了高效的能量转移（图 7(e) 和 (f)）。当进一步增大失谐参数至σ=3 时，这一趋势更加明显，此时仅有放大比 R=3 系统能够抵抗强失谐的影响并维持住 SMR（图 7(i)）。因此杠杆放大装置的引入从根本上改善了非线性能量阱的性能，成功打破了 SMR 严格依赖于精确 1∶1 主共振的严苛条件。随着放大比 R 的增大，系统对失谐参数 σ 的敏感性被显著降低，SMR 的有效工作带宽得到了拓宽。这意味着，在满足能量输入的前提下，LNES 在面对工程实际中普遍存在的频率漂移和不确定性时，表现出更强的鲁棒性，因而更易于在现实场景中被激发和应用。

上述基于相平面的分析已从理论上揭示了放大比 R 在拓宽 SMR 工作带宽、增强系统鲁棒性方面的优越性。为从时域角度进一步印证这一关键发现，并直观地展示放大装置对主结构振动的实际抑制效果，对基于系统的原始无量纲动力学方程（式 (5)）进行数值积分，得到不同外激励振幅 A 与放大比 R 工况下主结构的位移时程响应曲线，如图 8 所示。

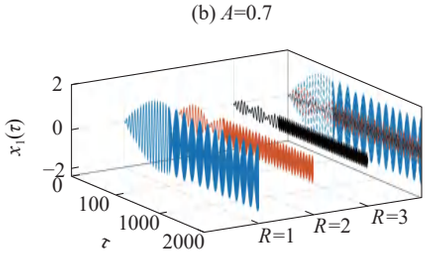
图 8 的时域仿真结果直观地验证并深化了前述理论分析的结论。首先，图中清晰地表明，增大放大比 R 能有效抑制主结构的峰值位移，特别是在激励幅值 A 足够大，即足以触发 SMR 的工况下（图 8(b) 和 (c)）减振效果尤为显著。其次，在失谐（σ=1）的条件下



(a) A=0.14



(b) A=0.7



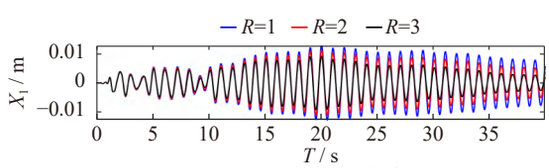
(c) A=3.2

图 8　主结构的位移时程曲线 (Ω=4/3, η_2=0.2, ε=0.02, σ=1)

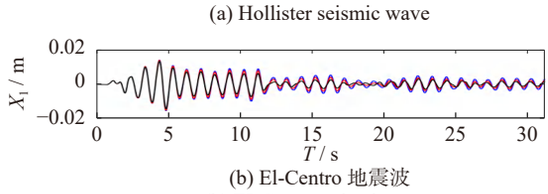
Fig. 8　Displacement time-history curves of the main structure (Ω=4/3, η_2=0.2, ε=0.02, σ=1)

进行，当 R 较小时系统响应呈现出不稳定的拍振现象，而 R=3 时的响应则相对趋于稳定，这再次证明了放大装置能够极大增强 SMR 对频率失谐的鲁棒性。值得注意的是：随着仿真时间的增长，图中观察到的拍振具有双重属性，当激励能量不足以触发 SMR 时（如 A=0.14 工况），拍振仅为一种长时间的瞬态响应，最终会衰减消失；而当 SMR 被成功激发时（如 A=0.7 和 A=3.2 工况），这种稳定的拍振本身就是 SMR 的稳态动力学特征。然而，简谐激励是一种理想化的平稳输入。为了全面评估放大装置在真实工程环境下的性能，检验其在面对非平稳、宽频带激励时的有效性，采用真实的地震波作为输入。为进行验证，本文选取了 4 种具有不同频谱特性的典型地震记录作为输入，分别为 Hollister 波、El-Centro 波、Taft 波和 Friuli 波，通过求解原系统方程（式 (3)），可以得到系统在不同地震波作用下的时程响应和 LNES 相对 NES 的减振指标，具体分析如下：

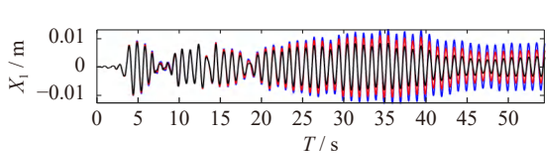
上述图 9 及减振指标对比表 3，说明在不同地震波下，LNES 对于主结构位移的减振性能均随着放大比 R 的增大而显著提升。从表 3 中可以清晰地看



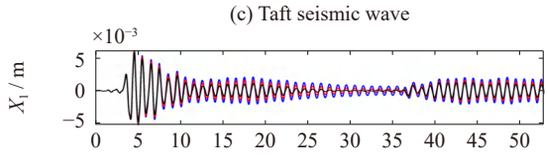
(a) Hollister 地震波
(a) Hollister seismic wave



(b) El-Centro 地震波
(b) EI-Centro seismic wave



(c) Taft 地震波
(c) Taft seismic wave



(d) Friuli 地震波
(d) Friuli seismic wave

图 9　四种地震波下不同放大比的 LNES 控制下的主结构位移时程曲线（m_1=1 kg, m_2=0.01 kg, k_1=39.48 N/m, k_2=0.56 N/m, c_1=0.0628 N·s/m, c_2=0.0126 N·s/m）

Fig. 9　Displacement time-history curves of the main structure of four seismic excitations with a LNES under different amplification ratios (m_1=1 kg, m_2=0.01 kg, k_1=39.48 N/m, k_2=0.56 N/m, c_1=0.0628 N·s/m, c_2=0.0126 N·s/m)

出，随着 R 从 1 增加到 3，主结构的峰值位移与位移均方根均呈现出持续下降的趋势，其中在 Hollister 波激励下，R=3 相比于 R=1（传统 NES）的均方根减振率达到了 35.600%，峰值减振率也达到了 27.392%，减振效果十分显著。这一结果有力地证明了前续章节中基于基础简谐激励下得出的理论分析结论，即放大装置能增强 SMR 的鲁棒性并拓宽其有效工作频带范围，在面对非平稳、宽频带的随机地震激励时依然适用，从而为具有放大装置的非线性能量阱的工程应用提供了坚实的理论依据。

表 3 减振指标对比

Tab. 3 Comparison of vibration damping indicators

地震波	峰值位移/ m			位移均方根/ m			峰值减振率/ %		均方根减振率/ %	
	R=1	R=2	R=3	R=1	R=2	R=3	R=2	R=3	R=2	R=3
Hollister	0.01273	0.01113	0.00924	0.00613	0.00509	0.00395	12.586	27.392	17.058	35.600
El-Centro	0.01549	0.01516	0.01439	0.00441	0.00374	0.00313	2.090	7.113	15.189	29.072
Taft seismic	0.01314	0.01107	0.00964	0.00544	0.00466	0.00367	15.775	26.626	14.323	32.498
Friuli	0.00613	0.00605	0.00590	0.00154	0.00129	0.00109	1.394	3.758	16.137	29.298

5 结 论

本文针对一种带有放大装置的杠杆型非线性能量阱减振系统（LNES），建立了其在基底简谐激励下的减振系统动力学模型。通过运用复变量平均法与多尺度法，系统地推导了该系统的慢变流形方程，并从理论上深入探讨了系统产生 SMR 的必要条件与充分条件。在此基础上，通过对简谐激励和随机地震波激励下 LNES 系统的数值仿真验证了理论分析的正确性，并揭示了杠杆放大装置对 NES 性能的提升机理与实际效果。主要结论如下：

（1）放大比 R 改变了 SMR 的触发条件，但未改变其内在结构。理论分析表明，放大比 R 的引入并不会改变系统鞍结分岔点的位置（N_1, N_2），即 SMR 的内在动力学结构保持稳定。然而，R 的增大会等比例地、显著地提高触发 SMR 所需的外部激励幅值阈值（A_1, A_2）。这意味需要更高的能量输入来“激活”其最佳性能。

（2）SMR 的稳定性严格依赖于频率调谐，其充分条件受失谐参数 σ 主导。研究发现，SMR 的稳定极限环仅在失谐参数 σ 极小（趋近于 0）时才能成为系统的全局吸引子。当 σ 增大时，相平面中会出现新的稳定焦点作为吸引子，它将“捕获”原本应进入 SMR 的系统轨迹，从而破坏 SMR 的完善性，使其失效。

（3）放大装置成功打破了传统 NES 的 SMR 对精确 1∶1 共振的依赖，极大增强了系统的鲁棒性。增大放大比 R 能够显著降低系统对失谐参数 σ 的敏感性。仿真结果清晰地表明，在传统 NES（R=1）因频率失谐而失效的工况下，LNES 系统（R=2, 3）依然能够维持稳定的 SMR。这从根本上拓宽了 SMR 的有效工作带宽，解决了传统 NES 在面对频率漂移时不稳定的关键难题。

（4）LNES 在真实地震激励下表现出卓越且稳健的减振性能。在 4 种不同特性的真实地震波激励下，数值仿真结果一致地表明，随着放大比 R 的增大，LNES 对于主结构位移的峰值和均方根值的减振性能逐步提高。具体而言，相较于传统 NES（R=1），LNES（R=3）对于主结构位移均方根值减振率提高了 35.600%。这有力地证明了本文提出的理论在非平稳、宽频带的随机地震激励下的适用性，为 LNES 在减震工程中的应用提供了坚实的理论依据。

参考文献：

[1] 刘中坡，乌建中，王菁菁，等. 轨道型非线性能量阱对高层结构脉动风振的控制仿真 [J]. 振动工程学报，2016，29(6)：1088-1096.
LIU Zhongpo，WU Jianzhong，WANG jingjing，et al. Simulation of track nonlinear energy sink for wind-induced vibration control in high-rise building[J]. Journal of Vibration Engineering，2016，29(6)：1088-1096.

[2] 熊怀，孔宪仁，刘源. 一类立方非线性吸振器的能量传递和耗散研究及参数设计 [J]. 振动工程学报，2015，28(5)：785-792.
XIONG Huai，KONG Xianren，LIU Yuan. Energy transfer and dissipation of a class of nonlinear absorber and its parameter design[J]. Journal of Vibration Engineering，2015，28(5)：785-792.

[3] 刘艮，张伟. 非线性能量阱在悬臂薄板振动抑制中的应用研究 [J]. 振动工程学报，2019，32(5)：786-792.
LIU Gen，ZHANG Wei. Vibration suppression of cantilever thin plates using nonlinear energy sink[J]. Journal of Vibration Engineering，2019，32(5)：786-792.

[4] 张也弛，孔宪仁，张红亮. 非线性耦合振子间的靶能量传递研究：保守系统中的完全能量传递 [J]. 振动与冲击，2012，31(1)：150-155.
ZHANG Yechi，KONG Xianren，ZHANG Hongliang. Targeted energy transfer among coupled nonlinear oscilla-

tors：complete energy exchange in a conservative system[J]. Journal of Vibration and Shock，2012，31(1)：150-155.

[5] 张也弛，孔宪仁. 非线性耦合振子间产生靶能量传递的初始条件 [J]. 哈尔滨工业大学学报，2012，44(7)：21-26.
ZHANG Yechi，KONG Xianren. Initial conditions for targeted energy transfer in coupled nonlinear oscillators[J]. Journal of Journal of Harbin Institute of Technology，2012，44(7)：21-26.

[6] STAROSVETSKY Y，GENDELMAN O V. Bifurcations of attractors in forced system with nonlinear energy sink：the effect of mass asymmetry[J]. Nonlinear Dynamics，2010，59(4)：711-731.

[7] GENDELMAN O V，STAROSVETSKY Y，FELDMAN M. Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink. Ⅰ：description of response regimes[J]. Nonlinear Dynamics，2008，51(1)：31-46.

[8] STAROSVETSKY Y，GENDELMAN O V. Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink. Ⅱ：optimization of a nonlinear vibration absorber[J]. Nonlinear Dynamics，2008，51(2)：47-57.

[9] GKIMPRIXIS A，TUBALDI E，DOUGLAS J. Evaluating alternative approaches for the seismic design of structures[J]. Bulletin of Earthquake Engineering，2020，18(9)：4331-4361.

[10] SILVA A，MACEDO L，MONTEIRO R，et al. Earthquake-induced loss assessment of steel buildings designed to Eurocode 8[J]. Engineering Structures，2020，208：110244.

[11] BERTON S，BOLANDER J E. Amplification system for supplemental damping devices in seismic applications[J]. Journal of Structural Engineering，2005，131(6)：979-983.

[12] CONSTANTINOU M，TSOPELAS P，HAMMEL W，et al. Toggle-brace-damper seismic energy dissipation systems[J]. Journal of Structural Engineering，2020，127：105-112.

[13] WANG M，SUN F F，YANG J Q，et al. Seismic protection of SDOF systems with a negative stiffness amplifying damper[J]. Engineering Structures，2019，190：128-141.

[14] ZHOU Q，PAN W，LAN X. Analysis of amplification effect and optimal control of the toggle-style negative stiffness viscous damper[J]. Buildings，2024，14(6)：1625.

[15] XI C Y，ZHENG H，MI Y Z，et al. Lever-type inertial amplification plates for low-frequency vibration reduction[J]. Thin-Walled Structures，2023，192：111131.

[16] GAO L，MAK C M，CAI C Z. Low-frequency vibration attenuation of metamaterial sandwich plate with lever-type inertial amplified resonators[J]. Thin-Walled Structures，2024，199：111827.

[17] ZANG J，ZHANG Y W. Responses and bifurcations of a structure with a lever-type nonlinear energy sink[J]. Nonlinear Dynamics，2019，98(2)：889-906.

[18] ZANG J，YUAN T C，LU Z Q，et al. A lever-type nonlinear energy sink[J]. Journal of Sound and Vibration，2018，437：119-134.

[19] ZHAO Q M，TAN Y G，SUN M G，et al. Performance of strengthened accelerated oscillator damper for vibration control of bridges[J]. Applied Sciences，2024，14(15)：6732.

[20] WANG P C，CHEN J. Nonlinear rotational inertial double-tuned mass damper for reducing human-induced floor vibration with frequency detuning[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2022，172：109016.

[21] MANEVITCH L I. The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables[J]. Nonlinear Dynamics，2001，25(1)：95-109.

[22] 符文彬，唐驾时. 强迫 Duffing 振动系统的主共振鞍结分岔控制 [J]. 振动工程学报，2004，17(3)：365-368.
FU Wenbin，TANG Jiashi. Primary resonance saddle-node bifurcation control of forced duffing system[J]. Journal of Vibration Engineering，2004，17(3)：365-368.

[23] 张瑜，张文，乐源. 飞机前起落架模型的 Hopf 分岔及控制研究 [J]. 动力学与控制学报，2024，22(8)：13-22.
ZHANG Yu，ZHANG Wen，YUE Yuan. Hopf bifurcation analysis and bifurcation control of aircraft nose landing gear system[J]. Journal of Dynamics and Control，2024，22(8)：13-22.

[24] STROGATZ S H. Nonlinear Dynamics and Chaos：with Applications to Physics，Biology，Chemistry，and Engineering Studies in Nonlinearity[M]. Boulder：Westview Press，2001.

第一作者：罗一帆(1992—)，男，博士，讲师。
E-mail：ceyfluo@hnust.edu.cn

通信作者：孙洪鑫(1980—)，男，博士，教授。
E-mail：cehxsun@hnust.edu.cn

充液流动管道低频带隙特性与振动控制

刘明利[1]，肖文宇[2]，罗 宇[3]，罗傲尘[3]，王新阳[1]，
龚凌云[3]，陈星文[2]，高鹏林[3]，瞿叶高[3]

（1. 山东核电有限公司，山东 烟台 265116；2. 上海核工程研究设计院股份有限公司，上海 200233；
3. 上海交通大学机械系统与振动全国重点实验室，上海 200240）

摘要：针对工业输流管道低频宽带振动控制需求，本文研究了不同流速下充液管道局域共振带隙特性与调控方法。采用 Timoshenko 梁理论和柱塞流模型建立了考虑转动惯性、流体作用力及多自由度谐振子的充液管道动力学模型，基于能带理论系统研究了流体流速、谐振子组合方式及阻尼参数对局域共振带隙的影响规律。研究表明，流-固耦合效应使管道带隙边界频率向低频偏移，随着流速增加，流体导致管道的阻尼耗散作用增强，带隙附近的共振响应得到明显抑制。此外，通过对谐振子串并联组合方式与阻尼进行协同设计可以显著拓宽振动衰减频带，对两自由度并联谐振子（阻尼比为 0.15），通过优化设计可以使管道在 200~2000 Hz 内的共振峰传递率比非控制管道降低超 30 dB。本文研究可为核电、石化等领域输流管道的低频宽带振动控制提供理论设计依据。

关键词：充液管道；Timoshenko 梁；局域共振带隙；振动控制
中图分类号：O327；O328 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202506003

Low-frequency bandgap characteristics and vibration control of fluid-conveying pipelines

LIU Mingli[1], XIAO Wenyu[2], LUO Yu[3], LUO Aochen[3], WANG Xinyang[1],
GONG Lingyun[3], CHEN Xingwen[2], GAO Penglin[3], QU Yegao[3]

（1.Shandong Nuclear Power Co.，Ltd.，Yantai 265116，China；
2.Shanghai Nuclear Engineering Research & Design Institute Co.，Ltd.，Shanghai 200233，China；
3.State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration，Shanghai Jiao Tong University，Shanghai 200240，China）

Abstract: To address the demand for low-frequency broadband vibration control in industrial fluid-conveying pipelines，this study investigates the bandgap characteristics and tuning methods of locally resonant pipes under different flow velocities. A dynamic model of fluid-conveying pipes is developed based on the Timoshenko beam theory and plug flow model，incorporating rotational inertia，fluid-induced forces，and multi-degree-of-freedom resonators. Using Bloch band theory，the influences of flow velocity，resonator configuration，and damping parameters on locally resonant bandgaps are systematically analyzed. The results demonstrate that fluid-structure coupling shifts the bandgap boundary frequencies toward lower frequencies. As the flow velocity increases，the damping dissipation effect induced by the fluid is enhanced，significantly suppressing resonance responses near the bandgap. Furthermore，synergistic design of the series-parallel configuration and damping of resonators can substantially broaden the vibration attenuation bandwidth. For a two-degree-of-freedom parallel resonator (damping ratio=0.15)，optimized design reduces the resonance peak transmissibility of the pipe by more than 30 dB within the frequency range of 200~2000 Hz compared to uncontrolled pipes. These findings provide theoretical design guidelines for low-frequency broadband vibration control in fluid-conveying pipelines for nuclear power，petrochemical，and related industries.

Keywords: fluid-conveying pipeline; Timoshenko beam; locally resonant bandgap; vibration control

输流管道被广泛应用于核电、能源化工和航空航天等工业领域[1-3]，在动力装置和流体等复杂多源激励作用下，充液管道在长寿命周期内要承受严酷复杂的流-固耦合振动，可能诱发结构疲劳失效，导

收稿日期：2025-06-03；**修订日期：**2025-08-06
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (12202267)；机械系统与振动全国重点实验室自主课题 (MSVZD202404)；上海市市级科技重大专项资助课题

致灾难性事故并造成重大的人员财产损失[4]。因此, 充液管道的振动特性与控制始终是学术界和工业界关注的核心问题[5-7]。管道振动控制的主要思路是利用动力吸振器(含线性和非线性吸振器)、隔振器和阻尼器等通过能量转移或耗散机制降低受保护结构的振动响应[8-14]。

吸隔振装置通常用于离散系统, 存在频率适配与低频耗散性能不足的问题, 制约了其在连续结构低频宽带振动控制中的应用。超材料/超结构概念的兴起为管道低频振动控制提供了思路[8], 研究者主要是借助布拉格散射机制[10,15]与局域共振机制[13,16]开展周期性管道结构设计与低频宽带振动控制研究。针对细长管道, 一些学者通过结合以上两种机制实现带隙拓展[17-21], 但受附加质量等限制, 通常难以大范围拓宽减振频带。HU 等[19]采用两相材料交替分布设计周期性管道结构, 再通过引入谐振子同时实现布拉格带隙和局域共振带隙。对于短管道, 受晶格常数限制, 布拉格散射带隙通常位于高频段, 研究者多采用周期谐振子实现低频振动控制[21-23]。MIRANDA 等[21]设计了附加多自由度谐振器阵列的管道结构, 基于 Timoshenko 梁理论研究了管道的多带隙振动衰减特性, 但多重带隙是通过增加机械振子数目实现的, 附加质量会显著增加。局域共振可以增强阻尼的耗散作用[22,24], HAN 等[24]采用高阻尼橡胶构建多向谐振单元, 在 46~75 Hz 范围内显著削弱了管道中横波和纵波引起的共振响应。学者们已围绕带隙拓宽开展了大量研究工作, 但仍难以完全解决低频宽带设计问题。

在管道超结构建模方面, 现有工作多是在无流体或非流动假设下, 研究管道结构本身的带隙特性和动力学行为, 未能充分考虑流-固耦合效应的影响。实际上, 流-固耦合作用对带隙宽度和振动特性有着显著影响[25-27]。比如, LIU 等[26]基于 Euler 梁模型揭示了轴向载荷与水压对管道振动响应的影响规律和机制。FERNANDES 等[27]同样采用 Euler 梁理论研究了充液管道的带隙特性, 发现流速增加会压缩局域共振带隙宽度, 流体的影响在带隙设计中不可忽略。结构建模以 Euler 梁理论为主, 但 Euler 梁理论适用于细长管道, 在预测短管道(如受支撑管道)高频振动时存在显著误差; Timoshenko 梁理论考虑了转动惯性与剪切变形的影响, 是更为精确的理论模型[28-29], 但由于计算上的复杂性, 在充液周期管道建模分析方面未被充分重视。

针对上述不足之处, 本研究结合 Timoshenko 梁理论与柱塞流模型 (plug flow model), 构建了包含流体-管道-谐振子完备对象的动力学理论分析框架; 柱塞流模型能够充分考虑重质流体对结构的力学作用, Timoshenko 梁考虑了管道剪切变形、结构和流体转动惯量的影响, 两者结合可为受约束短管道的流-固耦合振动控制提供有效分析工具。本文进一步发展了基于平均法和有限元法的能带及频响计算方法, 系统研究了转动惯性、流体流速、阻尼和谐振子串并联方式对带隙特性的影响规律, 提出流动工况下兼顾带宽与振动控制效果的优化策略。

1　充液管道动力学理论建模

如图 1 所示, 本文考虑周期性布置多自由度谐振单元的均质充液管道, 管内流体以恒定速度 U 向右流动, 谐振子间距为 a, 谐振子以串联或并联形式组成多自由度谐振结构。本文采用 Timoshenko 理论描述管道在横向载荷作用下的弯曲变形与动力学响应, 相比于 Euler 梁理论, 该模型充分考虑了流体转动惯性的影响, 能够更为准确地刻画充液管道的振动特性。充液管道必须考虑流体作用力的影响, 本文采用柱塞流模型来简化流-固耦合分析, 该模型假设平直管道内流体各处的流速保持一致, 这是管道单相流充分发展后稳定状态的一种合理近似。周期排列的共振结构可简化为弹簧-质量-阻尼谐振子, 通过弹簧回复力与梁产生动力学相互作用。

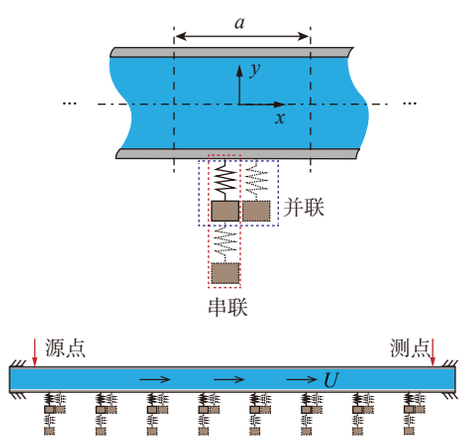


图 1　附加周期谐振结构的充液管道模型

Fig. 1　The model of a fluid-conveying pipe with periodically attached resonators

为了深入揭示附加周期谐振结构充液管道的动力学特性, 本文参考 PAÏDOUSSIS[30]提出的管道理论对图 1 所示周期结构进行理论建模, 模型涉及的几何与物理参数如表 1 所示。图 2 选取充液管道微元 δs 进行受力分析, s 为管道变形后中性轴的曲线坐标, 对于小幅振动, 管道横向位移 w 远小于管长 L, 因此 $s \approx x$, x 为管道未受扰动时中性轴的方向, y 为横向挠曲变形方向。流体微元的受力情况如图 2(a) 所示, 考虑管内压力 p、管道对流体的法向作用力 $F_A \delta s$

和壁面剪切力$qS\delta s$, 其中F_{A}为单位长度无黏流体的横向作用力, q为壁面剪切应力, S为管道内壁周长。根据牛顿第二定律, 可导出流体微元在x和y方向上的力平衡方程:

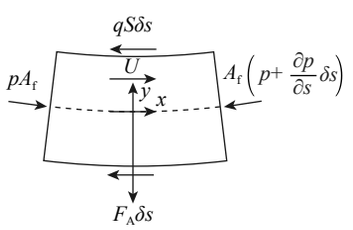
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x}A_{\mathrm{f}} - qS + F_{\mathrm{A}}\dfrac{\partial w}{\partial x} = Ma_{\mathrm{fx}} \\ -F_{\mathrm{A}} - qS\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(A_{\mathrm{f}}p\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = Ma_{\mathrm{fy}} \end{cases} \tag{1}$$

式中, a_{fx}和a_{fy}分别表示流体微元在轴向和横向上的加速度。

表 1 流体-管道-谐振子耦合模型参数

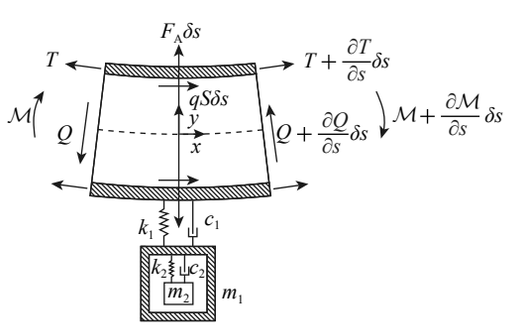
Tab. 1 Parameters of the fluid-pipe-resonator coupling model

参数	符号	参数	符号
挠度	w	横截面转角	ψ
管道横截面积	A_{p}	流体横截面积	A_{f}
剪切刚度	GA_{p}	弯曲刚度	EI_{p}
Timoshenko 剪切系数	k'	流体流速	U
管道单位长度质量	m	流体单位长度质量	M
管道单位长度转动惯量	$\bar{I}_{\mathrm{p}}$	流体单位长度转动惯量	$\bar{I}_{\mathrm{f}}$
谐振子质量	m_1、m_2	弹簧刚度	k_1、k_2
阻尼	c_1、c_2	振子位移	u_1、u_2



(a) 流体微元

(a) An infinitesimal element of the enclosed fluid



(b) 附加谐振子的管道微元

(b) An infinitesimal element of the pipe

图 2 充液管道微元受力示意图

Fig. 2 An infinitesimal element of the pipe and the enclosed fluid showing the equilibrium of forces

对管道微元进行受力分析, 其受到轴向张力T、横向剪切力Q、弯矩$\mathcal{M}$、流体法向力$F_{\mathrm{A}}\delta s$和切向作用力$qS\delta s$的共同作用, 如图 2(b) 所示。依据力和力矩平衡关系, 得到如下动力学方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} + qS - F_{\mathrm{A}}\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(Q\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} + F_{\mathrm{A}} + qS\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = ma_{\mathrm{py}} \\ \dfrac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} + Q + (pA_{\mathrm{f}} - T)\chi = \left(\bar{I}_{\mathrm{f}} + \bar{I}_{\mathrm{p}}\right)\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{cases} \tag{2}$$

式中, a_{py}为管道微元的横向加速度。

根据 Timoshenko 理论, 剪切应变$\chi = Q/(k'GA_{\mathrm{p}})$与横截面转角$\psi$满足几何变形关系$\mathrm{d}w/\mathrm{d}x = \psi + \chi$。不考虑张力和管内压力条件下, 充液管道的动力学方程可化简为:

$$\begin{cases} F_{\mathrm{A}} + k'GA_{\mathrm{p}}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) = m\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ EI_{\mathrm{p}}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k'GA_{\mathrm{p}}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) = \left(\bar{I}_{\mathrm{f}} + \bar{I}_{\mathrm{p}}\right)\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{cases} \tag{3}$$

可以发现, Timoshenko 梁充分考虑了管道结构和内部流体转动惯量的影响。假设流体流速恒定$\mathrm{d}U/\mathrm{d}t = 0$, 可采用 PAÏDOUSSIS[30] 导出的柱塞流模型, 流体作用力为:

$$F_{\mathrm{A}} = -M\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + U^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w \tag{4}$$

式中, 等式右边从左到右分别表示流体惯性力、科里奥利力和流体在管道弯曲部分流动时产生的离心力。该模型略去了流-固耦合界面处的流动细节, 较为简洁地描述了小变形管道中单相稳态流动对结构的力学作用。

对于附加谐振子的周期管道, 方程 (3) 中还需要考虑梁与谐振子的相互作用。以如图 2(b) 所示的两自由度串联谐振子为例, 建立流体-管道-谐振子全耦合理论模型。质量块的绝对位移表示为u_i, 其中$i = 1,2$, 梁与振子的连接处x_0受到弹簧施加的集中载荷为:

$$F_{\mathrm{r}} = \left(k_1 y_1 + c_1\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)\delta\ (x - x_0) \tag{5}$$

式中, $y_1 = u_1 - w_0$; $y_2 = u_2 - u_1$; w_0为梁在连接处的挠度; $\delta\ (x)$为狄拉克函数。综合考虑谐振子与充液管道的力平衡关系, 可得如下流体-管道-谐振子耦合动力学方程:

$$\begin{cases} -M\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U^2\dfrac{\partial w^2}{\partial x^2}\right) + k'GA_{\mathrm{p}}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \\ \left(k_1 y_1 + c_1\dfrac{\partial y_1}{\partial t}\right)\delta\ (x - x_0) = m\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ EI_{\mathrm{p}}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k'GA_{\mathrm{p}}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) = \left(\bar{I}_{\mathrm{f}} + \bar{I}_{\mathrm{p}}\right)\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ -k_1 y_1 - c_1\dfrac{\partial y_1}{\partial t} + k_2 y_2 + c_2\dfrac{\partial y_2}{\partial t} = m_1\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(y_1 + w_0) \\ -k_2 y_2 - c_2\dfrac{\partial y_2}{\partial t} = m_2\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(y_2 + y_1 + w_0) \end{cases} \tag{6}$$

从上述方程不难发现, 重质流体可引入显著的惯性效应, 流速的影响体现在科里奥利力和离心力; 周期分布的谐振结构通过弹簧对 Timoshenko 梁施加

集中力作用, 从而影响充液管道的流-固耦合振动。对于上述方程, 将与第二个谐振子相关的参数置零, 很容易得到单谐振子模型, 对于两自由度并联谐振子的情形, 分别针对每个谐振子单独建立方程, 此处不再赘述。

假设谐振子位于单胞坐标原点 $x_0=0$, 根据表 2 的无量纲参数对方程 (6) 进行无量纲处理, 可得:

$$\begin{cases}(\Lambda-u^2)\dfrac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}-\Lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}+\gamma_1 q_1\delta(\xi)=\dfrac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}+2\sqrt{\beta}u\dfrac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\tau}\\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\Lambda\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi}-\psi\right)=\sigma\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}\\ -\gamma_1 q_1-d_1\dfrac{\partial q_1}{\partial\tau}+\gamma_2 q_2+d_2\dfrac{\partial q_2}{\partial\tau}=\beta\beta_1\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}(q_1+\eta_0)\\ -\gamma_2 q_2-d_2\dfrac{\partial q_2}{\partial\tau}=\beta\beta_2\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}(q_1+q_2+\eta_0)\end{cases}\tag{7}$$

式中, η_0为谐振子连接处梁的挠度。

表 2　流体-管道-谐振子耦合系统无量纲参数

Tab. 2　Dimensionless parameters of fluid-pipe-resonator coupling system

参数	符号	参数	符号
轴向坐标	$\xi=\dfrac{x}{a}$	时间	$\tau=\sqrt{\dfrac{EI_\mathrm{p}}{M+m}}t\Big/a^2$
梁挠度	$\eta=\dfrac{w}{a}$	流速	$u=\sqrt{\dfrac{M}{EI_\mathrm{p}}}Ua$
振子位移	$q_i=\dfrac{y_i}{a}$	惯量比	$\sigma=\dfrac{\bar{I}_\mathrm{f}+\bar{I}_\mathrm{p}}{(M+m)a^2}$
流体质量比	$\beta=\dfrac{M}{M+m}$	刚度比	$\Lambda=\dfrac{k'GA_\mathrm{p}}{EI_\mathrm{p}}a^2$
振子质量比	$\beta_i=\dfrac{m_i}{Ma}$	谐振子阻尼	$d_i=\dfrac{c_i a}{\sqrt{EI_\mathrm{p}(M+m)}}$
弹簧劲度系数	$\gamma_i=\dfrac{k_i a^3}{EI_\mathrm{p}}$	阻尼比	$\zeta_i=\dfrac{c_i}{2\sqrt{k_i m_i}}$

2　充液管道能带与频响计算方法

基于上述动力学方程, 采用时频域分析方法研究充液流动管道的振动特性, 对于周期性管道结构, 借助 Bloch 定理可获得弯曲波传播的频散特性。本文采用平均法与有限元法计算充液管道的频散曲线。

2.1　平均法

平均法的核心思想是在 Bloch 波假设下, 通过积分将连续结构集总等效处理, 在保留关键动力学特性的情况下简化计算。考虑一个单胞, 假设充液管道内弹性波传播满足如下谐波解:

$$\begin{cases}\eta(\xi,\tau)=\bar{\eta}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_\mathrm{B}\xi}\\ \psi(\xi,\tau)=\bar{\psi}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_\mathrm{B}\xi}\end{cases}\tag{8}$$

式中, 无量纲轴坐标$\xi\in[-0.5, 0.5]$; $k_\mathrm{B}\in[-\pi, \pi]$为 Bloch 波数; j为虚数单位。将谐波解代入方程 (7) 中, 沿单胞长度方向积分, 获得一组以无量纲时间τ为变量的常微分方程组。进一步, 假设各离散自由度具有时谐解:

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\bar{\eta}(\tau)\\ \bar{\psi}(\tau)\\ q_1(\tau)\\ q_2(\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H\\ \Psi\\ Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega\tau}\tag{9}$$

式中, Ω为无量纲频率。将时谐解代入常微分方程组, 化简后得到如下代数方程:

$$\boldsymbol{M}(k_\mathrm{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\tag{10}$$

矩阵$\boldsymbol{M}$各元素如下:

$$\boldsymbol{M}(k_\mathrm{B})=\begin{pmatrix}M_{11} & -2\mathrm{j}\Lambda\sin(k_\mathrm{B}/2) & \gamma_1 & 0\\ jk_\mathrm{B}\Lambda & \sigma\Omega^2-k_\mathrm{B}^2-\Lambda & 0 & 0\\ \beta\beta_1\Omega^2 & 0 & \beta\beta_1\Omega^2-\gamma_1 & \gamma_2\\ \beta\beta_2\Omega^2 & 0 & \beta\beta_2\Omega^2 & \beta\beta_2\Omega^2-\gamma_2\end{pmatrix}\tag{11}$$

其中,

$$M_{11}=\left[\frac{2}{k_\mathrm{B}}\Omega^2+4u\sqrt{\beta}\Omega-2k_\mathrm{B}\left(\Lambda-u^2\right)\right]\sin\left(\frac{k_\mathrm{B}}{2}\right)\tag{12}$$

沿布里渊区扫略波矢k_B, 采用数值方法求解特征方程$\det(\boldsymbol{M})=0$, 即可得到充液管道的能带结构。

2.2　有限元法

有限元法是更为精确的计算方法, 借助商用有限元软件 COMSOL Multiphysics 的偏微分方程模块可对充液管道的能带特性和频响特性进行数值分析。具体使用时, 设置自由变量(η,ψ,q_1,q_2), 使用一维偏微分方程和常微分方程写入动力学控制方程, 使用“弱贡献”对梁施加集中力(弹簧回复力和外界激励力)。

为了验证所建立理论模型和求解方法的正确性, 本文考虑 YU 等[16]设计的附加单自由度谐振子的周期管道, 采用文献中的几何和材料参数进行数值计算。该文献基于 Timoshenko 梁模型和传递矩阵法研究了非充液管道的能带特性, 主要参数包括: 铝管内半径$R_\mathrm{i}=7\times10^{-3}$ m, 外半径$R_\mathrm{o}=1\times10^{-2}$ m, 点阵常数$a=7.5\times10^{-2}$ m, 谐振子弹簧刚度$k_1=1.65\times10^5$ N/m, 集中质量$m_1=4.37\times10^{-2}$ kg, 剪切系数$k'=0.925$, 其余参数详见文献 [16]。图 3 展示了平均法、有限元法与文献 [16] 结果的差异, 可以看出各种计算结果几乎完全一致, 验证了本文理论方法的准确性。平均法较为简单, 具有很好的准确性, 后续分别采用平均法和有限元法计算能带结构和频域响应。

3　低频带隙特性与振动控制

本节基于图 1 中物理模型研究流体、谐振子组合方式及阻尼参数对局域共振带隙和振动响应的影

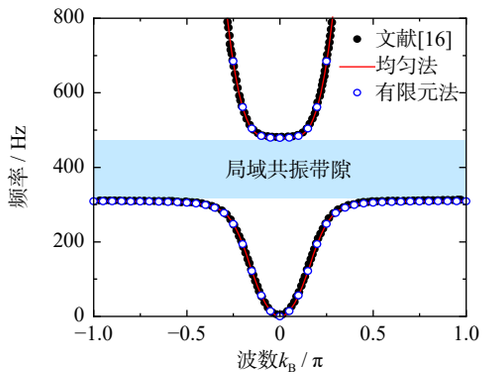


图 3 本文计算的能带结构与参考文献结果对比

Fig. 3 Comparison of the band structure calculated in this paper with the results from the reference literature

响规律。通过空管道与充液管道的对比，阐明流-固耦合效应的影响，进一步研究谐振子组合方式和阻尼协同减振机理与优化设计策略。

3.1 流-固耦合效应的影响

方程 (6) 直观展示了流动流体对管道振动的影响，流体除了增加惯性效应，其运动还会引入离心力（U^2项）和科里奥利力（U项），与管道产生相互作用。通过对比空管道与充液管道，揭示流体对周期结构能带结构及振动传递率的影响。如图 1 所示，对于有限长管道，在左端施加集中力激励，在右端对称位置处探测响应位移，定义振动传递率为：

$$T = 20\lg\left|\frac{\eta_r}{\eta_s}\right| \tag{13}$$

式中，η_s和η_r分别为激励处和探测处的振动位移。首先，考虑不含谐振子的均匀管道，图 4 对比展示了空管道与无流动充液管道的频散特性与振动传递率。左图频散曲线结果显示，流体惯性效应略微降低了弯曲波在管道中的传播速度；右图振动传递率结果表明，由于充液管道惯性增加，所有模态频率向低频

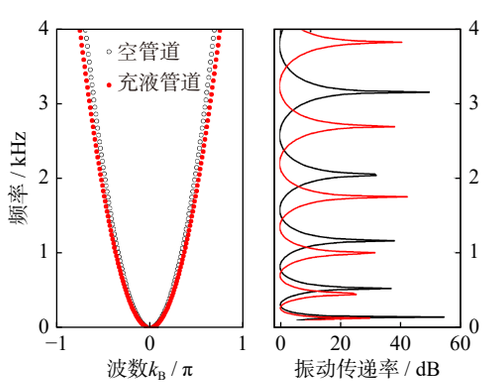


图 4 空管道与充液管道频散曲线及振动传递率对比（未布置谐振子）

Fig. 4 Comparison of dispersion curves and vibration transmissibility between empty pipe and fluid-conveying pipe (without resonators)

偏移，高阶模态频率对惯性变化更为敏感。

接下来，考虑周期排布单自由度谐振子的管道，频响分析采用包含 8 个单胞的短管道，两端为固支约束。图 5 展示了空管道、静态充液管道以及流速为 30 m/s 的充液管道的能带结构与振动传递率，结果表明，各种情况下局域共振机制均可引入低频带隙，带隙下边界取决于谐振子共振频率，对流体参数变化不敏感。与之不同，带隙上边界随流体参数变化产生了显著区别，流体惯性效应使带隙上边界朝低频偏移，静态充液管道带隙宽度降低约 9.1%。此外，流动介质在系统中引入了非互易性，导致带隙上边界附近的频散曲线表现出轻微的非对称性。相较于静态流体，流动工况会引入流体阻尼效应，从方程 (6) 可知，流体科里奥利力经流-固耦合作用在管道中引入阻尼损耗（流速的一次方项包含关于时间的一阶偏导数），该效应导致带隙附近共振峰出现了明显的振动抑制现象。

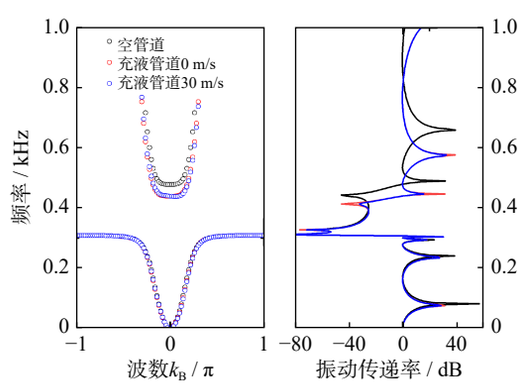


图 5 空管道与充液管道能带结构及振动传递率对比（周期排布谐振子）

Fig. 5 Comparison of band structures and vibration transmissibility between empty pipe and fluid-conveying pipe (with periodically attached resonators)

为了更加清晰地阐述流速的影响，图 6 绘制了振动传递率频谱随流速变化彩图，可见流速增加不

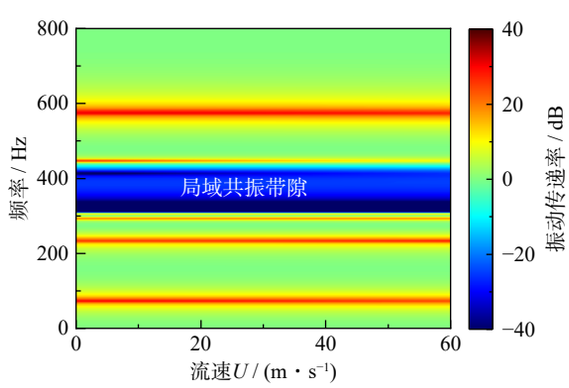


图 6 流速对振动传递率的影响

Fig. 6 The vibration transmissibility spectrum changing with flow velocity

会显著影响带隙范围, 但会降低带隙附近共振峰的振动传递率。例如, 447 Hz 处振动传递率在 0 与 60 m/s 工况下呈现 16.5 dB 的差异; 远离带隙的共振峰则表现出弱流速敏感性, 振动传递率在 0 与 60 m/s 工况下仅表现出 1~5 dB 的差异。

3.2　点阵常数和阻尼对抑振性能的影响

局域共振带隙打开位置由谐振子共振频率决定, 带隙宽度却与多种因素相关, 点阵常数(反映了谐振子排布密度)是其中一个重要因素。仍以附加单自由度振子的充液管道(管内流速 30 m/s)为研究对象, 保持管道总长度与约束方式不变, 通过改变谐振子数量研究带隙宽度的变化规律。为了便于量化分析, 定义带隙相对带宽为:

$$W_{\mathrm{gap}}=2\frac{f_{\max}-f_{\min}}{f_{\max}+f_{\min}} \tag{14}$$

式中, $f_{\max}$和$f_{\min}$分别表示带隙上、下边沿频率。图 7 展示了均匀排布的谐振子数量 N=2、4、6、8、12 时管道的振动传递率谱, 可以发现, 随着振子数量增加, 带隙上边沿向高频拓展, 带隙相对宽度从 13.7% 提升至 43.4%。然而, 带隙拓宽是以增加谐振子排布密度为代价的, 工程应用中需要对两者进行权衡取舍。从经济性考虑, 应该在满足振动控制需求的前提下, 尽可能减少附加谐振子的数目。

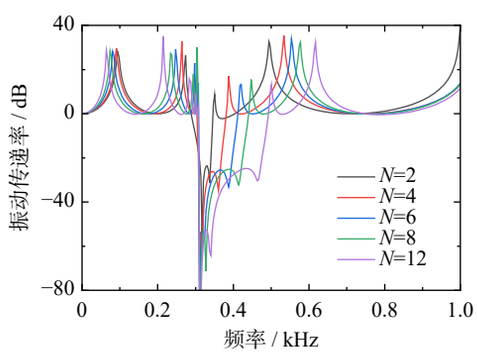


图 7　谐振子排布密度对振动传递率的影响

Fig. 7　Effect of the number of resonators on vibration transmissibility

阻尼是衰减振动能量的常用手段, 但却存在低频性能不足的问题, 实现低频局域共振带隙与阻尼的协同抑振具有重要意义。为此, 考虑在单自由度谐振子中引入阻尼, 根据实际情况设定阻尼比ζ_1的变化范围为(0,0.15), 阻尼参数与材料、温度、摩擦机构类型等密切相关。图 8 展示了谐振子阻尼对振动传递率的影响, 可以看到两个主要特性: (1) 阻尼能够在较宽频率范围内抑制管道的共振响应, 带隙附近共振抑制现象最为显著。随着阻尼比从 0 增至 0.15, 241.7、571.4 和 1041.0 Hz 共振峰处振动传递率衰减约 10~20 dB。显然, 局域共振机制通过提升能量密度增强了附近频率范围的能量耗散; (2) 阻尼能够一定程度拓宽带隙, 但也会减弱带隙范围内的振动衰减率。随着阻尼比从 0 增至 0.15, 带隙范围(传递率<0 dB)由初始的 306.7~436.6 Hz 拓宽至 281.7~511.5 Hz, 相对带宽W_{gap}增加约 23.0%, 与此同时, 带隙内振动传递率增加, 带隙减振效果减弱。因此, 从提升振动控制效果而言, 应当充分利用局域共振机制与阻尼的协同作用, 在低频带隙带宽和通带振动传递率之间取得良好平衡。

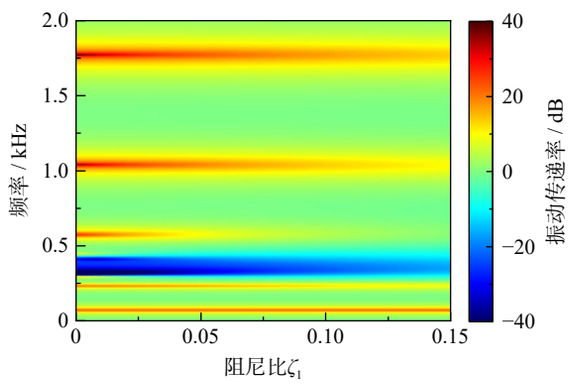


图 8　谐振子阻尼比 ζ_1 对振动传递率的影响

Fig. 8　The influence of the resonator's damping ratio ζ_1 on the vibration transmissibility

3.3　充液管道抑振性能综合优化

基于图 8 中结果, 本节采用多自由度谐振子, 并综合考虑谐振子串并联组合方式和阻尼参数的影响, 充分利用局域共振机制与阻尼的协同作用实现充液管道低频宽带振动控制目的。除了增加振子 2, 本节算例其余参数与图 8 保持相同。

首先, 考虑以串联方式组合(见图 2(b))的两自由度谐振子, 弹簧刚度 $k_2=3.02\times10^5$ N/m, 集中质量 $m_2=3.06\times10^{-2}$ kg, 图 9 展示了充液管道振动传递率随阻尼比ζ_1的变化过程, 计算中设置振子 2 的阻尼比

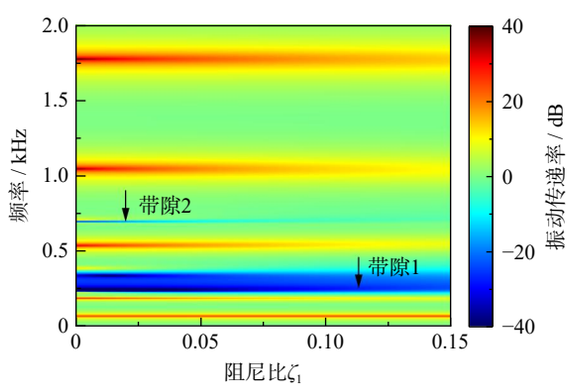


图 9　周期充液管道振动传递率随阻尼比ζ_1的变化过程(管道上周期排布以串联方式组合的两自由度谐振子)

Fig. 9　Vibration transmissibility of a fluid-conveying pipe changing with damping ratio ζ_1(Two-degree-of-freedom resonators are periodically arranged in series on the pipe)

$\zeta_2=0$。计算结果表明，两自由度谐振子打开了 2 个局域共振带隙：第 1 带隙主要来自于振子 1 共振模式的贡献，由于两个自由度的耦合作用，相比于图 8 中结果，该带隙范围向低频移动，第 2 带隙由振子 2 的共振模式主导，该振子并不直接与管道产生相互作用，因此带隙宽度比较狭窄，且带隙容易被阻尼效应破坏。综上，串联方式总体减振效果与单自由度比较接近，增加阻尼仅抑制了第 1 带隙附近的几个共振峰。

对于以并联方式组合的两自由度谐振子，两个自由度通过管道变形间接产生相互作用，振子共振模态的耦合作用比较微弱，带隙打开位置各自独立，容易实现双频协同调控。计算中设置振子 2 弹簧刚度 $k_2=1.21\times10^6$ N/m，集中质量 $m_2=3.06\times10^{-2}$ kg，图 10 展示了附加并联两自由度谐振子充液管道的振动传递率随阻尼比ζ的变化过程，该算例中设置 $\zeta=\zeta_1=\zeta_2$。与图 8 中单自由度结果相比，此时第 1 带隙相对带宽 W_{gap}变窄，但却在 1100 Hz 附近打开了一个较宽的第 2 带隙。值得关注的是，随着阻尼比的增加，阻尼与两个局域共振带隙的协同作用在 200~2000 Hz 范围内显著抑制了各个共振峰的振动响应，低频宽带抑振效果十分明显。并联方式可看作各个振子的独立作用，此时管道共包含 16 个谐振子，需牺牲结构紧凑性并引入较大的附加重量，工程实用性较差。

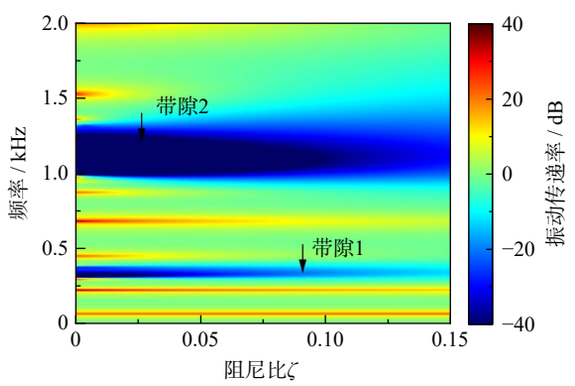
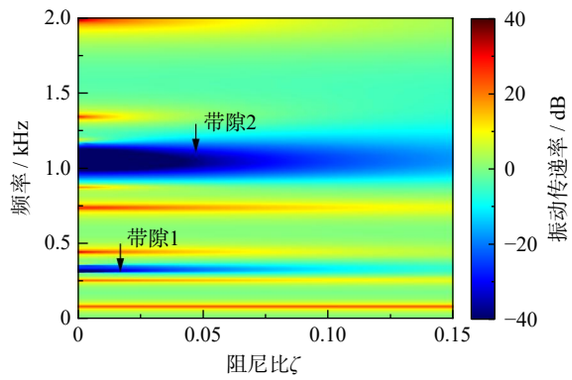


图 10 周期充液管道振动传递率随阻尼比ζ的变化过程（管道上周期排布以并联方式组合的两自由度谐振子）

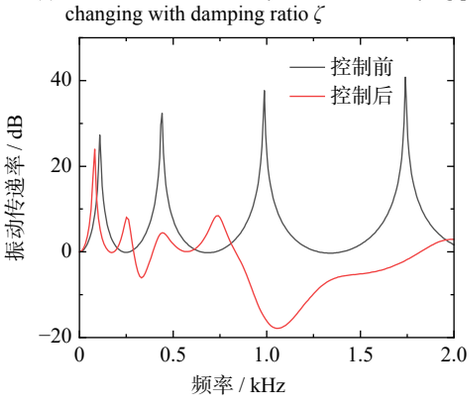
Fig. 10 Vibration transmissibility of a fluid-conveying pipe changing with damping ratio ζ (Two-degree-of-freedom resonators are periodically arranged in parallel on the pipe)

为了在双带隙-阻尼协同抑振与工程实用性间进行平衡，本文提出改进型并联构型，在图 8 模型基础上，使共振频率为 f_1与 f_2的谐振子交替均布排列，维持充液管道的双带隙特性，同时减少谐振子数量。图 11(a) 展示了充液管道振动传递率随阻尼比ζ的变化过程，计算设置$\zeta=\zeta_1=\zeta_2$。计算结果表明，谐振子数目减少会降低带隙宽度，但因双重局域共振带隙的存在，阻尼效应仍旧可以在宽频带范围内显著抑制共振峰响应。为便于对比，图 11(b) 单独展示了充液管道在控制前后的振动传递率，其中“控制前”表示未布置任何谐振子，“控制后”为图 11(a) 中$\zeta=0.15$时的结果。控制后 200~2000 Hz 低频宽带范围内振动衰减效果十分显著，共振峰传递率降低超过 30 dB，为工业输流管道低频宽带减振提供了可行方案。



(a) 周期充液管道振动传递率随阻尼比ζ的变化过程

(a) Vibration transmissibility of a fluid-conveying pipe changing with damping ratio ζ



(b) 充液管道在施加控制措施前后的振动传递率对比

(b) Comparison of vibration transmissibility of fluid-conveying pipes before and after resonators are attached

图 11 由不同频率谐振子交替排列构成的周期充液管道振动传递率频谱

Fig. 11 Vibration transmissibility spectrum of a periodic fluid-conveying pipe composed of alternating resonators of different frequencies

需要指出的是，流-固耦合效应对双谐振子系统的影响与图 4 和 5 中结论一致：流体附加质量对管道振动的影响主要体现在系统惯性的增加，会整体降低管道的模态频率并减小带隙；流速的影响主要表现为流体通过科里奥利力引入阻尼效应，抑制带隙附近的共振谱线，此处不作为设计变量具体讨论。

4 结 论

本文采用 Timoshenko 梁理论和柱塞流模型建立了周期充液管道的动力学理论模型，系统研究了流体流速、谐振子组合方式和阻尼对低频局域带隙和

振动传递特性的影响规律和机理。主要结论包括: (1) 重质流体会显著提高充液管道的惯性作用力, 流-固耦合效应会降低管道模态频率; (2) 管内流体流动效应不可忽略, 其通过科里奥利力与管道产生相互作用, 对管道振动产生阻尼衰减作用, 抑制局域共振带隙附近的共振峰; (3) 两自由度谐振子的组合方式对充液管道的减振性能影响显著, 并联方式容易打开双重局域共振带隙, 局域共振机制可以增强阻尼对带隙附近共振峰的衰减作用, 显著提升充液管道的低频宽带抑振性能。本研究可为核电、石化等领域输流管道的宽频减振设计提供理论借鉴。

参考文献:

[1] KWAG S，EEM S，KWAK J，et al. Mitigation of seismic responses of actual nuclear piping by a newly developed tuned mass damper device[J]. Nuclear Engineering and Technology，2021，53(8)：2728-2745.

[2] LIU E B，WANG X J，ZHAO W W，et al. Analysis and research on pipeline vibration of a natural gas compressor station and vibration reduction measures[J]. Energy & Fuels，2021，35(1)：479-492.

[3] GAO P X，YU T，ZHANG Y L，et al. Vibration analysis and control technologies of hydraulic pipeline system in aircraft：a review[J]. Chinese Journal of Aeronautics，2021，34(4)：83-114.

[4] DING H，JI J C. Vibration control of fluid-conveying pipes：a state-of-the-art review[J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)，2023，44(9)：1423-1456.

[5] LI S J，KARNEY B W， LIU G M. FSI research in pipeline systems–a review of the literature[J]. Journal of Fluids and Structures，2015，57：277-297.

[6] PAÏDOUSSIS M P. Pipes conveying fluid：a fertile dynamics problem[J]. Journal of Fluids and Structures，2022，114：103664.

[7] 陈伟，曹润青，胡嘉纯，等. 细长输流管道大变形动力学研究进展 [J]. 力学进展，2025，55(1)：113-174.
CHEN Wei，CAO Runqing，HU Jiachun，et al. Recent advances in research on large-deformation dynamics of slender pipes conveying fluid[J]. Advances in Mechanics，2025，55(1)：113-174.

[8] 刘江伟，郁殿龙，温激鸿，等. 周期附加质量充液管路减振特性研究 [J]. 振动与冲击，2016，35(6)：141-145.
LIU Jiangwei，YU Dianlong，WEN Jihong，et al. Vibration reduction properties research of pipes conveying fluid with periodically added mass[J]. Journal of Vibration and Shock，2016，35(6)：141-145.

[9] DING H，JI J，CHEN L Q. Nonlinear vibration isolation for fluid-conveying pipes using quasi-zero stiffness characteristics[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2019，121：675-688.

[10] GENG Q，KONG L Y，YANG X W，et al. Phononic crystal pipe with periodically attached sleeves for vibration suppression[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2023，251：108344.

[11] 庄秋阳，季宏丽，邹宇琪，等. 基于环状螺旋声学黑洞的管道结构振动抑制研究 [J]. 振动工程学报，2024，37(9)：1501-1512.
ZHUANG Qiuyang，JI Hongli，ZOU Yuqi，et al. Vibration suppression of pipeline structure based on circular spiral acoustic black hole[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(9)：1501-1512.

[12] CAO Y B，YAN G，LU J J，et al. Vibration mitigation and dynamics of pipeline system with nonlinear soft clamp by a nonlinear energy sink[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics，2025，170：104990.

[13] WU J H，ZHU H Z，SUN Y D，et al. Reduction of flexural vibration of a fluid-filled pipe with attached vibration absorbers[J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping，2021，194：104525.

[14] 唐冶，高传康，丁千，等. 输流管道动力学与控制的最新进展 [J]. 动力学与控制学报，2023，21(6)：18-30.
TANG Ye，GAO Chuankang，DING Qian，et al. Review on dynamic and control of pipes conveying fluidan[J]. Journal of Dynamics and Control，2023，21(6)：18-30.

[15] LIANG F，YANG X D. Wave properties and band gap analysis of deploying pipes conveying fluid with periodic varying parameters[J]. Applied Mathematical Modelling，2020，77：522-538.

[16] YU D L，LIU Y Z，WANG G，et al. Flexural vibration band gaps in Timoshenko beams with locally resonant structures[J]. Journal of Applied Physics，2006，100(12)：124901.

[17] LIANG F，CHEN Y，KOU H J，et al. Hybrid Bragg-locally resonant bandgap behaviors of a new class of motional two-dimensional meta-structure[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids，2023，97：104832.

[18] YU D L，WEN J H，ZHAO H G，et al. Vibration reduction by using the idea of phononic crystals in a pipe-conveying fluid[J]. Journal of Sound and Vibration，2008，318(1-2)：193-205.

[19] HU B，ZHANG Z F，YU D L，et al. Broadband bandgap and shock vibration properties of acoustic metamaterial fluid-filled pipes[J]. Journal of Applied Physics，2020，128(20)：205103.

[20] 蒋璇，柴怡君，耿谦，等. 散射体固液形态下超材料带隙特性分析 [J]. 振动工程学报，2023，36(3)：825-836.
JIANG Xuan，CHAI Yijun，GENG Qian，et al. Analysis of band gap characteristics of metamaterials in the solid-liquid state of scatterers[J]. Journal of Vibration Engineering，

2023，36(3)：825-836.

[21] MIRANDA JR E J P，DOS SANTOS J M C. Flexural wave band gaps in multi-resonator elastic metamaterial Timoshenko beams[J]. Wave Motion，2019，91：102391.

[22] WANG G，WAN S K，HONG J，et al. Enhancement of the vibration attenuation characteristics in local resonance metamaterial beams：theory and experiment[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2023，188：110036.

[23] WAN S K，LI L L，WANG G，et al. A novel locally resonance metamaterial cylindrical shell with tower-shaped lattice for broadband vibration suppression[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2024，216：111510.

[24] HAN D H，JIA Q，GAO Y Y，et al. Local resonance metamaterial-based integrated design for suppressing longitudinal and transverse waves in fluid-conveying pipes[J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)，2024，45(10)：1821-1840.

[25] WU J H，SUN Y D，SU M Z，et al. Fluid-structure interaction and band gap analysis of periodic composite liquid-filled pipe[J]. Composite Structures，2023，304：116444.

[26] LIU J W，YU D L，ZHANG Z F，et al. Flexural wave bandgap property of a periodic pipe with axial load and hydropressure[J]. Acta Mechanica Solida Sinica，2019，32(2)：173-185.

[27] FERNANDES R，EL-BORGI S，YAZBECK R，et al. Non-dimensional analysis of the bandgap formation in a locally resonant metamaterial pipe conveying fluid[J]. Applied Mathematical Modelling，2022，106：241-258.

[28] ALI SABAHI M，SAIDI A R. An analytical investigation on nonlinear vibrations and stability of Timoshenko pipes conveying two-phase flow[J]. Thin-Walled Structures，2024，198：111749.

[29] TAN X，DING H，CHEN L Q. Nonlinear frequencies and forced responses of pipes conveying fluid via a coupled Timoshenko model[J]. Journal of Sound and Vibration，2019，455：241-255.

[30] PAÏDOUSSIS M P. Fluid-Structure Interactions：Volume 1：Slender Structures and Axial Flow[M]. 2nd ed. Amsterdam：Elsevier，2014.

第一作者：刘明利(1983—)，男，硕士，高级工程师。

通信作者：高鹏林(1990—)，男，博士，副教授。

E-mail：gaopl@sjtu.edu.cn

多因素影响陶俑修复品包装系统动力学特性研究

李国志[1,4]，陈佳怡[1,4]，雒波波[2]，王蕊蕊[1,4]，王东峰[2]，李文凤[3]

（1. 陕西科技大学轻工科学与工程学院，陕西 西安 710021；2. 秦始皇帝陵博物院，陕西 西安 710021；
3. 陕西科技大学设计与艺术学院，陕西 西安 710021；4. 中国轻工业功能印刷与运输包装重点实验室，陕西 西安 710021）

摘要：文物因造型各异且具备不可复制性，不仅难以通过破坏性试验获取准确脆值，而且其自身（尤其陶俑修复品这类含复杂结构与断裂修复部位的易碎陶质文物）易在外部作用下受损，导致脆值确定成为文物防护的核心难题。为解决这一难题，本文以该类陶俑为研究对象，聚焦多因素影响下的陶俑修复品包装系统动力学模型构建：针对陶俑断片，建立含 n 个易损件的系统动力学模型；针对陶俑整体结构，建立含有集中质量悬臂梁易损件的系统动力学模型；综合上述 2 种模型，构建陶俑整体的多因素非线性系统动力学模型，并构建其系统的动力学方程。利用四阶-龙格库塔法与 Newmark 法，以含有 3 个断片易损件的 50 cm 武士俑为例，对整体多因素动力学模型进行数值求解。研究在确定缓冲材料的情况下，不同易损部件在外部激励下的响应，以预测陶俑的脆值范围，判断易损件的破损情况。试验结果表明分析结果具有较高的可靠性，且该破损评估方法可以有效界定陶俑文物的脆值范围，为陶质文物防护包装设计提供方法借鉴。

关键词：易损件；动力学模型；动力学特性；陶制品
中图分类号：TB485.3 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508074

Dynamic characteristics of packaging systems for repaired warrior figurines under multiple factors

LI Guozhi[1,4], CHEN Jiayi[1,4], LUO Bobo[2], WANG Ruirui[1,4], WANG Dongfeng[2], LI Wenfeng[3]

（1.College of Bioresources Chemical and Materials Engineering，Shaanxi University of Science and Technology，Xi’an 710021，China；
2.Emperor Qinshihuang’s Mausoleum Site Museum，Xi’an 710021，China；3.School of Art and Design，Shaanxi University of Science and Technology，Xi’an 710021，China；4.Key Laboratory of Functional Printing and Transport Packaging of China National Light Industry，Xi’an 710021，China）

Abstract: Cultural relics，owing to their diverse forms and irreplaceable nature，are difficult to determine for brittleness through destructive testing. Their fragile ceramic structures-particularly those of repaired clay figurines with complex geometries and restored fracture sites—are highly susceptible to damage from external forces，making the determination of brittleness a core challenge in cultural heritage protection. To address this issue，this study focuses on constructing a dynamic model for the packaging system of repaired clay figurines considering multiple influencing factors. First，a dynamic model for a system containing n fragile components is established to represent the vulnerable fragments of clay figurines. Then，a system dynamics model with fragile components of lumped-mass cantilever beams is developed for the overall structure of terracotta figurines. These two models are subsequently integrated to form a comprehensive multi-factor nonlinear system dynamics model for the entire ceramic figurine，from which the governing system equations are derived. Finally，using the fourth-order Runge-Kutta method and the Newmark method，the complete multi-factor dynamics model is numerically solved，taking as an example a 50 cm warrior figurine containing three fragile components. The study analyzes the responses of different vulnerable components under external excitation with a given cushioning material to assess their potential damage. Experimental validation shows that the analysis results are highly reliable. The results indicate that this damage assessment method can effectively define the brittleness range of ceramic figurine artifacts，providing a valuable methodological reference for the design of protective packaging for ceramic cultural relics.

Keywords: fragile component; dynamic model; dynamic characteristics; ceramic artifact

收稿日期：2025-08-15；**修订日期：**2025-10-13
基金项目：陕西省科技厅陕西省创新能力支撑计划项目 (2025JC-GXPT-022)；秦始皇帝陵博物院青年开放课题 (Qkfkt202404)

当前，文博产业蓬勃发展，相关政策大力推动文物的合理利用和保护，做好文物包装运输对保障文物安全、推动文化交流意义重大。为全面提升文物保护利用，可移动文物的科学包装及相关研究引起业内人士的广泛关注。文物的唯一性、不完整性与脆弱性，导致其破损强度难以直接用工业产品的评估方法衡量。建立有效的文物破损评估方法已成为制约文物包装科学性和文物外展事业发展的关键问题。

国内外对陶制工艺品或文物的包装研究多针对文物的运输包装注意事项[1-2]和陶瓷材料力学性能[3-4]。在陶制品的力学特性方面，方海峰等[5]采用瞬态测试系统，对现有的唐三彩包装结构进行了破损评估，改进了缓冲包装的不合理之处；谢利等[6]提出为了不对产品试样进行破坏性试验，可通过经验估算法确定具有较高价值的陶瓷制品的产品脆值。这两种方法的局限性在于：试验法不适用于文物，经验估算法对于具有复杂结构的产品不具有一般性[7]。目前，已有学者指出对产品破损的分析可以由整体转向局部薄弱环节与复杂结构[8-10]，这些部位往往是产品的易损部件。在包装系统的动力学模型方面，针对易损部件，高德等[11]将杆式易损部件处理为均匀分布的弹性体，构建刚性-弹性体的非线性耦合模型与运动微分方程，为此类问题提供了算法；乔杨等[12]建立含有两个易损件的动力学方程，求解在半正弦脉冲激励下的产品破损曲线，揭示了易损件位移现象的本质；杨松平等[13]将运输包装随机振动模型化，结合关键部件为两自由度正切型包装系统建立了系统的加速度响应谱求解方法。此外还有学者以简支梁等其他结构的单因素易损部件为研究对象，建立系统动力学模型[14-16]。然而，在文物脆值研究中，脆值会受到不同易损件的影响，因此需建立能反映各类易损件共同作用的综合力学模型。

综上，对于陶制文物的力学特性，可聚焦于其易损部位，结合包装系统动力学模型展开研究。本文以典型的可移动文物陶俑为研究对象，探讨破损的各类影响因素，针对陶俑的脆弱部件建立其综合多因素的包装系统动力学模型。总结出用于提高预测陶俑类文物修复品力学特性精度的方法，为异形文物保护以及系统包装方案的设计提供方法借鉴。

1 动力学模型建立

1.1 影响因素分析

陶俑力学性能受自身特性与外部因素共同作用，分为如表 1 所示的宏观和微观两方面。

表 1 影响因素

Tab. 1 Influential factors

影响因素		影响程度
微观	气孔	小
	微裂纹	小
宏观	结构	大
	断裂	大
	其他	较小

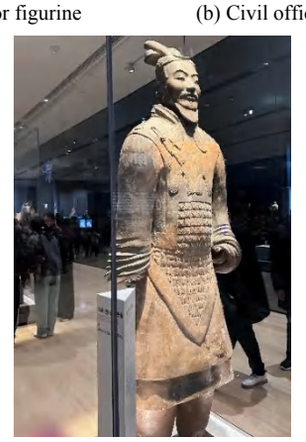
微观因素主要包括结构内不均气孔、烧制微裂纹[17]，因对陶俑整体影响较弱，故一般不予考虑。宏观因素上，图 1 中陶俑躯干、头部为壳状结构，脚部及相连踏板为实心；该结构便于陈列支撑，但运输时，壳体受外力作用易碎裂（较实体结构）。多数陶俑为立式且饰冠、动作略有差异。本文重点从结构与断裂这两个显著宏观因素进行分析。



(a) 武士俑
(a) Warrior figurine



(b) 文官俑
(b) Civil official figurine



(c) 将军俑
(c) General figurine

图 1 陶俑实物典型结构图

Fig. 1 Typical structural features of terracotta figurines

1.1.1 整体结构因素的影响

陶俑多采用分段制作的工艺，其躯干、四肢等部位的连接处，因结构突变形成的应力集中点会降低整体抗冲击能力。平躺运输状态下，如图 1 陶俑典型结构图所示，陶俑腿部与躯干的衔接处截面面积突然减小，构成如图 2 陶俑模型所示的悬臂梁结构，并带有集中质量，在受到外力振动或碰撞时，极易产

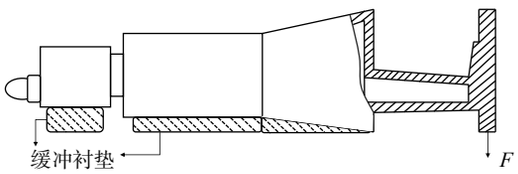


图 2　平躺运输状态下陶俑结构图

Fig. 2　Schematic diagram of forces on a terracotta figurine during horizontal transport

生断裂。这种复杂结构大大降低了陶俑脆值。

通过预仿真验证上述关于结构因素的分析。以陶俑的典型代表武士俑为例，建立其完整三维模型，使用 ANSYS Workbench 的瞬态结构模块进行脆值仿真。采用六面体 Solid186 单元对模型进行网格划分，以陶俑运输状态下的受力方向作为半正弦脉冲加速度载荷的设置方向进行加载求解。

图 3 为武士俑等效应力云图，从图中可以看出，武士俑的裙腿交界处出现应力集中，最大应力在腿根部位，因此仿真法可验证腿根部位是陶俑整体结构中的薄弱部位。

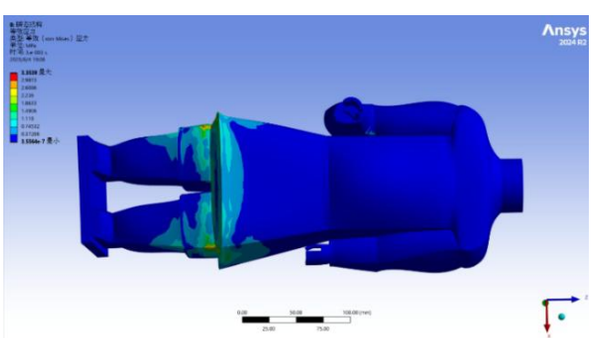


图 3　武士俑等效应力云图（最大加速度 90*g*）

Fig. 3　Equivalent stress contour of warrior figurine at 90*g*

1.1.2　多易损部位的影响

陶俑修复品大多为碎块或断裂片，需要后期通过胶粘剂进行连接。断裂后粘接会破坏陶俑整体的连续性，且粘接处的结合强度难以完全恢复至原始状态，在振动、碰撞等外力作用下，易产生破损点。因此，断裂件极有可能是陶俑的脆弱部件。

同样，通过预仿真对上述分析进行验证。以图 4 中 50 cm 武士俑修复品为例，建立其三维模型，使用 ANSYS Workbench 的瞬态结构模块进行脆值仿真。具体方法与 1.1.1 节中结构因素的仿真方法一致。此外，该修复品含有主体和断裂片等多个部件，需要将接触设置为绑定接触。

图 5 为武士俑修复品等效应力云图，从图中可以看出，由于断裂残缺，断片与主体连接部位存在缺口，缺口处截面突然变小，导致局部应力显著高于平均应力。因此判定陶俑中的残断片为整体结构中的易损部件。



图 4　武士俑修复品

Fig. 4　Restored warrior figurine

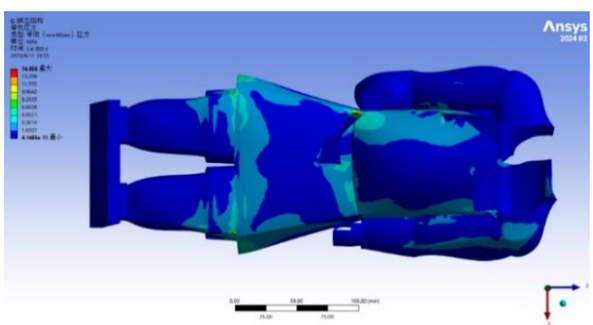


图 5　武士俑修复品等效应力云图（最大加速度 90*g*）

Fig. 5　Equivalent stress contour of restored warrior figurine at 90*g*

1.2　系统动力学模型

模型构建需平衡计算效率与力学真实性，结合陶俑修复品的结构特性、修复工艺与运输工况，针对性简化非关键因素及复杂形态；忽略影响较弱的微观因素，针对宏观层面的断片、腿部悬臂梁易损件，建立陶俑平躺运输动力学模型。

1.2.1　基于多断片易损件的系统动力学模型

传统脆值理论是将产品简化为单个易损部件加产品主体模型，当易损部件的响应加速度超过某个临界值时，产品即发生破损。

然而在实际场景中，产品通常包含多个易损部件。当产品包装系统受到外界激励时，激励会通过包装结构传递至产品主体，主体再经由与各易损部件的连接结构将激励传导至易损部件[17]。此时，产品是否发生破损并不取决于易损部件脆值的绝对大小，而是由哪个易损部件的响应加速度峰值率先超过其脆值决定。

对于含有多个断片易损件的陶俑复制品，单块断片质量较小，与陶俑主体粘接相连，其自身形变对陶俑整体响应的影响可忽略。故将各断片简化为集中质量块，通过等效刚度与陶俑主体连接，各易损件之间没有直接作用关系。可建立如图 6 所

示，含 n 个易损部件的产品非线性包装系统冲击动力学模型。

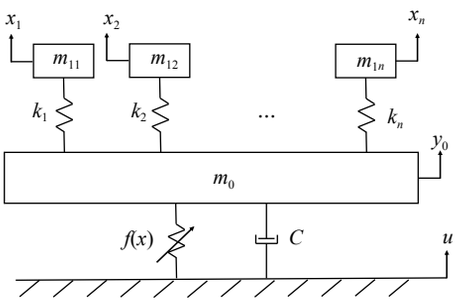


图 6 含 n 个易损部件的包装系统动力学模型

Fig. 6 Dynamic model of a packaging system with n fragile components

图 6 中，$m_{11},m_{12},\cdots,m_{1n}$ 分别表示 1,2,$\cdots$,n 号断片易损件质量；m_0 为主体质量；$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 分别表示易损件与主体之间连接的等效弹性系数；C 为缓冲材料等效阻尼；$f(x)$ 为包装系统非线性弹性特性；本文包装系统中使用的缓冲材料的力学特征可表达为 $f(x)=k_0x+ex^3$，其中，e 为缓冲材料刚性系数增加率；u 为外部输入的脉冲激励位移，即包装系统的绝对位移。基于上述模型，建立包含 n 个易损部件的产品非线性包装系统冲击动力学统一方程如下：

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1=k_1(y_0-x_1) \\ m_2\ddot{x}_2=k_2(y_0-x_2) \\ \quad\vdots \\ m_n\ddot{x}_n=k_n(y_0-x_n) \\ m_0\ddot{y}_0=k_0(u-y_0)-\sum\limits_{i=1,2,\cdots,n}k_i(x_i-y_0)+C(\dot{u}-\dot{y}_0)+ \\ \qquad e(u-y_0)^3 \end{cases} \tag{1}$$

初始条件：$y_{0,1,2,\cdots,n}(0)=0$，$\dot{y}_{0,1,2,\cdots,n}(0)=0$；对于外部激励位移 u，$\ddot{u}$ 为外部输入冲击加速度。这里采用与实际运输条件下的冲击波形最为接近的半正弦脉冲激励作为输入激励[18-19]，脉冲激励加速度幅值 $\ddot{u}_m$ 为：

$$\ddot{u}(t)=\begin{cases} \ddot{u}_m\sin\dfrac{\pi t}{t_0},0\leqslant t\leqslant t_0 \\ 0,t>t_0 \end{cases} \tag{2}$$

1.2.2 基于集中质量悬臂梁易损件的系统动力学模型

根据分析中结构的薄弱部位，由图 2 可以得出，在平躺运输状态下，陶俑腿部与主体构成带有集中质量的悬臂梁结构。陶俑腿部为中空陶质结构，脚部踏板为均匀分布的实心直四棱柱，平躺运输状态下受力均匀。因此，可将腿部简化为“两段并联的空心圆柱体”，陶俑脚部连接的实心踏板可简化为与并联圆柱体相连的集中质量，陶俑主体与悬臂梁易损件之间为刚性连接。可建立如图 7 所示带有集中质量悬臂梁易损件的缓冲包装系统，采用龙格-库塔法与有限元法结合的数值算法求解动力学方程。

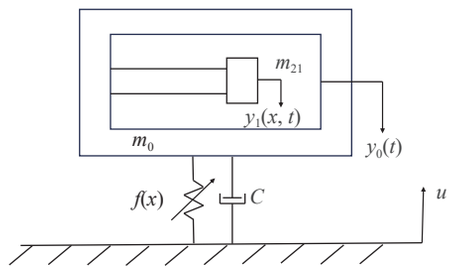


图 7 带集中质量悬臂梁易损件的包装系统动力学模型

Fig. 7 Dynamic model of a packaging system with concentrated mass cantilever beam fragile components

模型中 m_{21} 和 m_0 分别为悬臂梁自由端带有的集中质量和主体质量，悬臂梁与主体 m_0 为刚性连接；$y_0(t)$ 和 $y_1(x,t)$ 分别为主体和悬臂梁易损件的绝对位移，其他参数均与前文相同。基于上述模型，可建立带有集中质量悬臂梁易损件的动力学方程。

主体动力学方程建立：由于陶俑腿部易损件中的集中质量并非远小于主体质量，易损件对主体存在剪力作用，因此，需要考虑主体与易损件之间的耦合作用。对于带有集中质量的杆式易损件，考虑易损件对主体的影响，跌落冲击条件下主体的动力学方程为：

$$m_0\ddot{y}_0+k_0(u-y_0)+e(u-y_0)^3+C(\dot{u}-\dot{y}_0)+EI\left.\frac{\partial^3y_1(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0}=0 \tag{3}$$

初始条件：$y_0(0)=0$，$\dot{y}_0(0)=0$；对于外部激励位移 u，与前文相同。

建立易损件动力学方程：离散悬臂梁易损件为 n 个单元，单元节点依次为 1, 2, $\cdots$, i, i+1, $\cdots$, n, n+1。根据拉格朗日方程建立如下易损件的动力学方程：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}_{21}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{w}_{21}=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

通过降阶法消去奇异矩阵的无效自由度：分别消去全局质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的第 1、2 行和第 1、2 列，得到全局有效质量矩阵 $\boldsymbol{M}^*$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^*$，易损件动力学方程为：

$$\boldsymbol{M}^*\ddot{\boldsymbol{w}}_{21}+\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{w}_{21}=\ddot{y}_0(t)\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{v} \tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{w}_{21}=\boldsymbol{u}_{21}-y_0(t)\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}_{21}$ 为易损件对于主体的相对位移，$\boldsymbol{u}_{21}$ 为易损件的绝对位移，$\boldsymbol{v}$=[1 0 1 0$\cdots$1 0 1 0]^{T} 为位移模式向量，描述易损件随主体的刚体运动分量；$\ddot{\boldsymbol{u}}_{21}$ 为易损件的绝对加速度；$\ddot{\boldsymbol{w}}_{21}$ 为易损件相对于主体的相对加速度；$\ddot{y}_0(t)$ 为主体绝对加速度。

1.3 基于多因素的整体动力学模型

由于陶俑整体受到断裂易损件和悬臂梁易损件的共同作用，结合 2 种动力学模型，建立如图 8 所示同时含有 n 个易损部件和带有集中质量悬臂梁的多因素整体动力学模型。模型中，断片易损部件为与陶俑主体通过等效刚度相连接的集中质量；陶俑腿部与脚部踏板简化为带有集中质量的悬臂梁结构，

且悬臂梁为两端空心圆柱体, 与主体刚性连接。

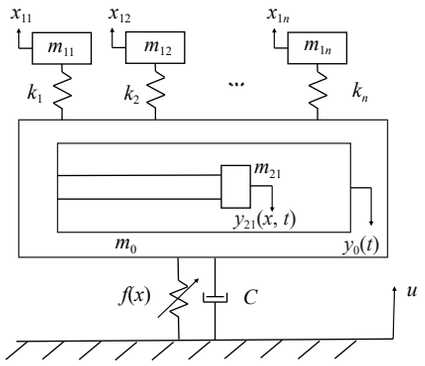


图 8　多因素的整体动力学模型

Fig. 8　Multifactorial holistic dynamics model

模型中$m_{11},m_{12},\cdots,m_{1n}$分别表示 1,2,$\cdots$,$n$ 号断片易损部件; $m_{11},m_{12},\cdots,m_{1n}$之间无直接作用, 与主体$m_0$通过等效刚度连接; m_{21}为悬臂梁易损件带有的集中质量, 悬臂梁为两段并联的空心圆柱, 与主体m_0为刚性连接; m_0为产品主体的质量; u 为外部输入的脉冲激励位移。其他相关参数与前文相同。基于上述模型, 建立整体陶俑的非线性包装系统冲击动力学统一方程如下:

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{x}_{11} = k_1(y_0 - x_1) \\ m_{12}\ddot{x}_{12} = k_2(y_0 - x_2) \\ \quad\vdots \\ m_{1n}\ddot{x}_{1n} = k_n(y_0 - x_n) \\ m_0\ddot{y}_0 = k_0(u - y_0) + \sum\limits_{i=1,2,\cdots,n}^{n} k_i(x_i - y_0) + C(\dot{u} - \dot{y}_0) + \\ \qquad e(u - y_0)^3 - V_1 \end{cases} \tag{6}$$

初始条件: $y_{0,1,2,\cdots,n}(0) = 0$, $\dot{y}_{0,1,2,\cdots,n}(0) = 0$; 外部激励位移$u$与前文相同。

V_1为悬臂梁易损件根部对主体的剪力:

$$V_1 = EI\left.\frac{\partial^3 y_{21}(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0} \tag{7}$$

悬臂梁易损件动力学方程与 1.2.2 节中相同。

主体动力学方程求解: 离散悬臂梁易损件模型后, 需先通过有限差分法计算易损件对主体的反作用力项, 再代入主体方程耦合求解, 采用龙格-库塔法迭代求解主体位移$y_0(t)$和主体加速度$\ddot{y}_0(t)$。

易损件动力学方程求解: 对于断片易损件, 采用四阶龙格-库塔法可求解出其加速度; 对于悬臂梁易损件, 陶俑腿部为细长空心圆柱体, 悬臂梁易损件的数值模型采用欧拉-伯努利梁单元。实际冲击下, 腿部主要绕与躯干衔接的固定端发生弯曲变形。通过 Newmark 法求解悬臂梁易损件相对位移$\boldsymbol{w}_{21}$, 具体公式推导与求解优化过程可参考文献 [20-21]。

由于本文中悬臂梁易损件为两段并联的空心圆柱体。两段空心圆柱对称并联, 平躺运输状态下受力均匀, 无明显局部质量突变, 总抗弯刚度与质量刚度均为单段的两倍。需对文献 [20-21] 中易损件全局质量矩阵与全局刚度矩阵公式进行修改:

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{C}^{i\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_1^i\boldsymbol{C}^i, \quad \boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{C}^{i\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_1^i\boldsymbol{C}^i \tag{8}$$

式中, $\boldsymbol{C}^i$为第 i 个单元的提取矩阵, $\boldsymbol{k}_1^i = 2\boldsymbol{k}^i, \boldsymbol{m}_1^i = 2\boldsymbol{m}^i$。$\boldsymbol{k}_1^i$与$\boldsymbol{m}_1^i$分别为刚度矩阵与单元质量矩阵[20], 可表示为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_0^i &= \frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & 2l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{m}_0^i &= \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

第 i 个单元提取矩阵$\boldsymbol{C}^i$ 为如下 4(2n +2) 的矩阵[20]:

$$\boldsymbol{C}^i = \begin{bmatrix} & & & & \text{第}i\text{列} & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

式中, E 和 ρ 分别为材料弹性模量和密度; A 为易损件截面面积; l=L/n 为单元长度, 其中, L 为悬臂梁长度; I 为单段空心圆柱截面惯性矩, 计算公式如下:

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \tag{10}$$

根据悬臂梁易损件的位移求解易损件内应力, 易损件内应力公式如下:

$$\sigma = -\frac{1}{4}E(D + d)\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \tag{11}$$

式中, D 与 d 分别为陶俑腿部空心圆柱的外、内直径。

2　脆值判断

2.1　破损判断标准

对于断片易损件, 在已知外部输入激励和易损件脆值情况下, 可以求解出断片易损件所受到的加速度响应。为解决陶俑修复品包装系统的防护设计问题, 以“脆值”作为断片易损件抗冲击能力的核心量化指标。脆值为产品不发生物理或功能损伤时所能承受的最大加速度值。若某个易损部件的响应加速度峰值率先超过其脆值, 则可判断产品发生破损。

对于带有集中质量悬臂梁易损件, 在已知外部输入激励与材料许用应力的情况下, 可以得到悬臂梁易损部件的绝对和相对加速的响应。计算易损件内应力, 如果内应力超过陶俑材料的许用应力, 则可判断产品发生破损。

通过控制外部输入激励，根据两种易损件的破损判断方法，判断该易损件是否发生破损，只要任意易损件发生破损，则可判断陶俑已经发生破损。

2.2 脆值范围确定

根据上述破损判断标准可判断陶俑复制品在不同外部激励情况下的破损情况。图 9 为脆值判断流程图，结合破损标准可判断陶俑的脆值范围，判断方法如下:

步骤一：确定材料参数与易损件参数。陶土材料相关参数与缓冲材料刚度系数通过材料的压缩、拉伸试验确定。易损件参数中，断片易损件脆值与刚度系数分别通过脆值仿真试验和刚度仿真测试获得，悬臂梁尺寸通过游标卡尺测量。

步骤二：多因素整体模型。输入相关参数，根据 1.3 节中的多因素模型动力学方程，可求解两类易损件的响应。

步骤三：激励加载与响应计算。加载激励幅值低于预期脆值，其中断片加速度用四阶龙格-库塔法，悬臂梁应力用 Newmark 法求解。

步骤四：临界点锁定与脆值范围确定。循环迭代，每次提升激励幅值 5~10 m/s^2，重复计算响应与破损判断，直至首次出现破损；发生首次破损时和其前一次迭代的主体加速的峰值为产品的脆值范围。

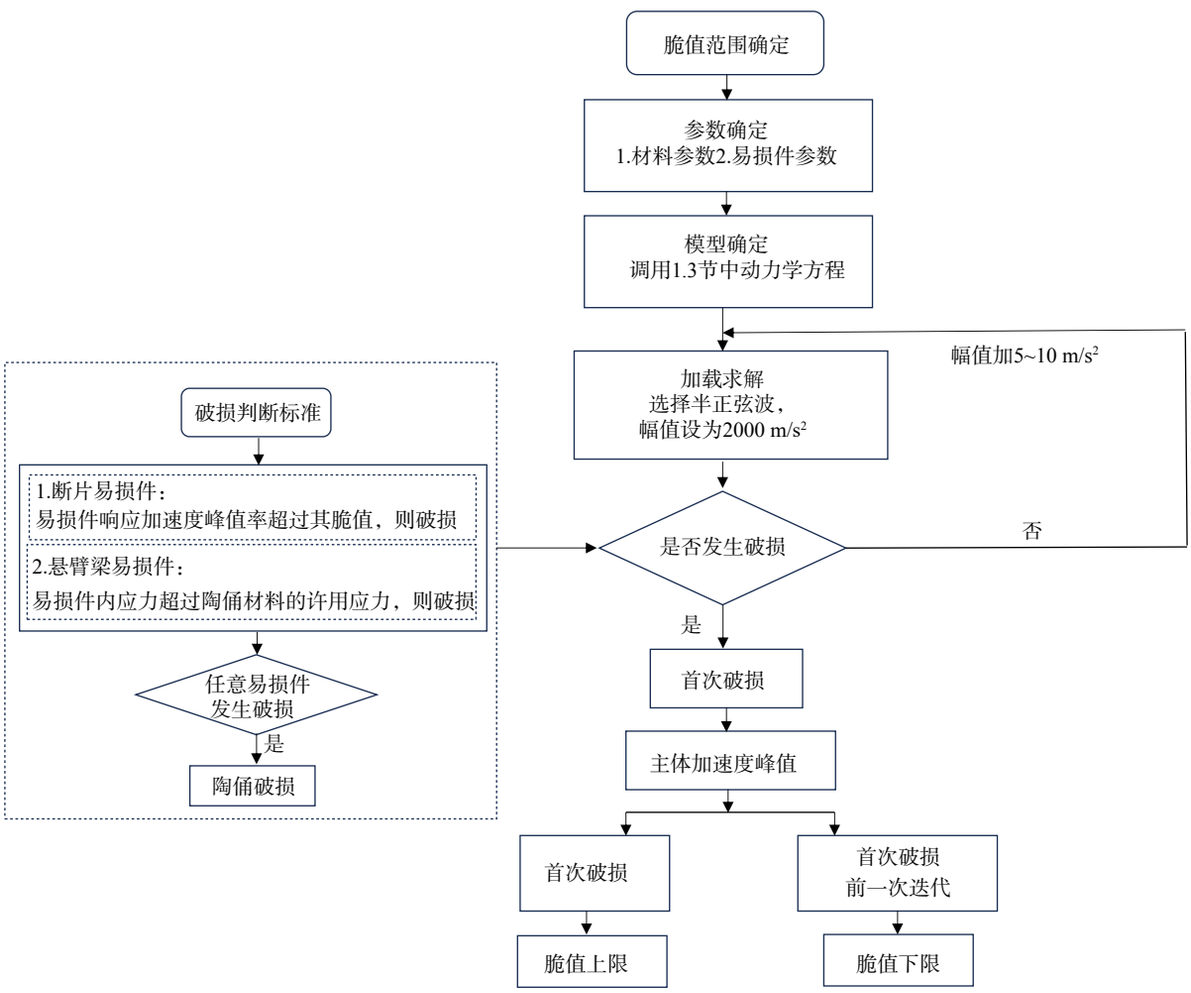


图 9 脆值判断流程

Fig. 9 Fragility value determination process

3 数值求解与验证

3.1 数值求解

以图 4 所示含有 3 个断片的 50 cm 武士俑为例进行计算分析。

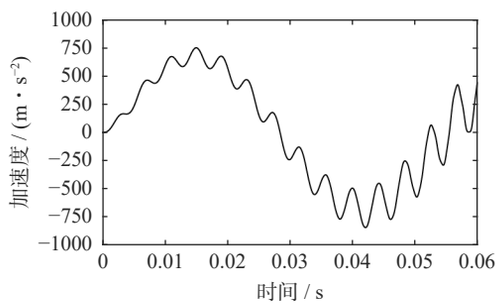
确定模型参数，腿部两悬臂梁均为空心圆柱，参数相同：悬臂梁截面外径 D=0.035 m、内径 d=0.015 m、长 L=0.1 m；经试验测得陶土材料：密度 ρ=1600 kg/m^3、弹性模量 E=1091.76 MPa、许用内应力 σ=10.39 MPa。缓冲材料相关初始常数与质量参数如表 2 所示，在 MATLAB 中运用四阶龙格-库塔法和 Newmark 法对方程式进行数值求解。

当脉冲激励幅值 $\ddot{u}_m$ 提升到 3035 m/s^2 时，发生了首次破损，主体加速的峰值为 840.82 m/s^2。对于断片易损件，可以得到如图 10 所示 m_{11}、m_{12}、m_{13}、m_0 的加

表 2　相关模型参数

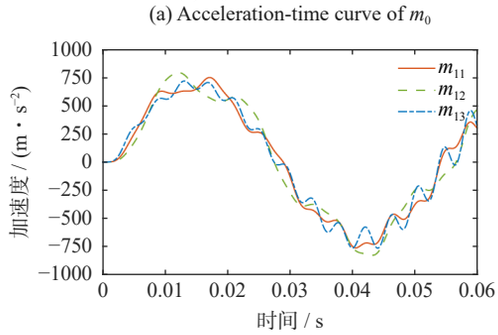
Tab. 2　Related model parameters

质量/kg	刚度/(N·m^{-1})	阻尼系数/(N·s·m^{-1})	刚度系数增加率/(N·m^{-3})	脆值/g
m_{11}=0.0256	11179.77	0	—	103
m_{12}=0.0358	8762.48	0	—	87
m_{13}=0.0398	32750.58	0	—	92
m_0=2.8460	115290	0.1	298570	—
m_{21}=0.2940	—	—	—	—



(a) m_0的加速度-时间曲线

(a) Acceleration-time curve of m_0



(b) m_{11}、m_{12}、m_{13}的加速度-时间曲线

(b) Acceleration-time curves of m_{11}, m_{12}, m_{13}

图 10　m_{11}、m_{12}、m_{13}、m_0的加速度-时间曲线

Fig. 10　Acceleration-time curves of m_{11},m_{12},m_{13},m_0

速度-时间曲线。此时 m_{11}、m_{12}、m_{13}、m_0 的最大加速度如表 3 所示。断片易损件的最大加速度均未超过其脆值，可以判断三个断片易损件均未发生破损。

表 3　断片易损件m_{11}、m_{12}、m_{13}最大加速度

Tab. 3　Maximum acceleration of fragile part m_{11},m_{12},m_{13}

	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_0
最大加速度/(m·s^{-2})	756.97	823.34	760.94	840.82

对于陶俑腿部带集中质量的悬臂梁易损件，悬臂梁根部产生了最大内应力，为 10.40 MPa。其跌落冲击响应如图 11 所示。悬臂梁易损件相对位移、绝对加速度和内应力最值如表 4 所示。

当脉冲激励幅值提升到 3035 m/s^2 时，悬臂梁根部最大内应力超过了陶俑材料的许用应力（σ = 10.39 MPa）。可以判断，陶俑试样发生了破损，并且破损部位为悬臂梁根部及陶俑腿根部位；主体加速度达到 840.82 m/s^2 时，陶俑试样发生了首次破损，破

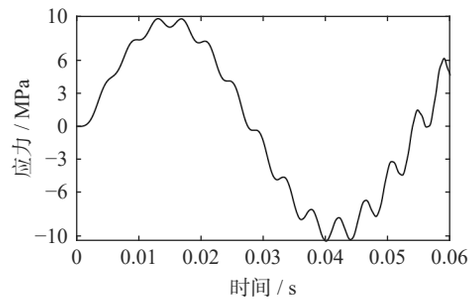


图 11　悬臂梁易损件根部应力

Fig. 11　Stress at the root of cantilever beam fragile components

表 4　悬臂梁易损件m_{21}响应最值

Tab. 4　The response value of the cantilever beam fragile component m_{21}

	相对位移/mm	绝对加速度/(m·s^{-2})	易损件内应力/MPa	主体加速度/(m·s^{-2})
最大值	1.110	857.47	10.40	840.82
位置	自由端	自由端	根部	—

损部位为悬臂梁根部及陶俑腿根部位，陶俑试样中的断片易损件均未发生破损。

首次破损前一次迭代的激励幅值$\ddot{u}_m$为 3030 m/s^2，此时主体加速度为 839.45 m/s^2，悬臂梁根部最大内应力为 10.39 MPa，未超过材料的许用应力；m_{11}、m_{12}、m_{13} 的最大加速度分别为 745.12、785.20、706.89 m/s^2，均未超过其脆值，此时产品没有发生破损。

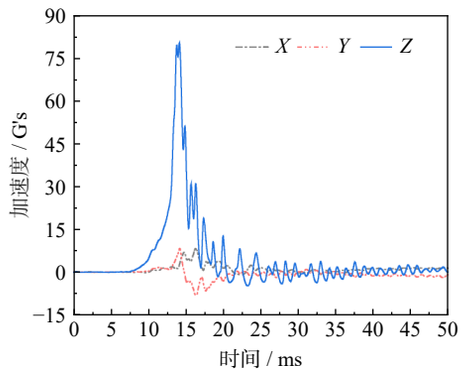
综上，采用发生首次破损时和其前一次迭代的主体加速的峰值为该陶俑的脆值范围。动力学模型仿真得出的试样的脆值范围为 839.45~840.82 m/s^2，且破损部位为陶俑腿根部。

3.2　试验验证与分析

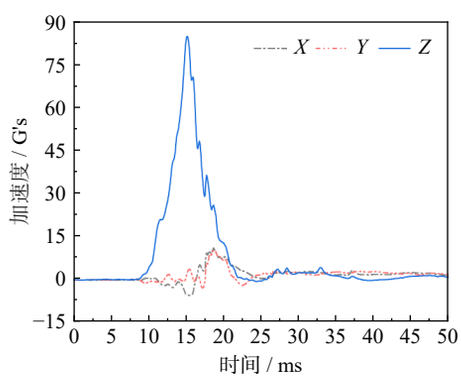
使用零跌落试验机，根据 GB/T 8171—2008《使用缓冲包装材料进行的产品机械冲击脆值试验方法》[22] 的规定对试样进行跌落试验。

在试验过程中，保证试样的跌落工况与仿真模型工况一致，将量程±2000g、灵敏度为 10 mV/g 的 Lansmont 的 TP3 系统加速度传感器胶粘安装在陶俑主体上，测量陶俑跌落破损前后的主体加速度。

陶俑试样破损前的加速度峰值为 80.41g（如图 12(a) 所示），陶俑试样破损后的加速度峰值为 85.05g（如图 12(b) 所示），破损部位为大腿根部，断片易损件均未发生破损（如图 13 所示）。图 12 中，X、Y、Z 表示加速度传感器采集的 X、Y、Z 方向。由此可以看出，试验法得出的 50 cm 武士俑试样的脆值范围为：80.41g~85.05g（换算为加速度单位即为 788.02~833.49 m/s^2）。且腿部易损件比断裂修复部位先发生损坏。



(a) 破损前加速度响应
(a) Pre-failure acceleration response



(b) 破损后加速度响应
(b) Post-failure acceleration response

图 12 跌落试验加速度响应

Fig. 12 Drop test acceleration response



图 13 陶俑试样破损图

Fig. 13 Damaged pottery figurine sample image

动力学模型得出的陶俑试样的脆值范围为839.45~840.82 m/s^2, 高值区间的误差<1%。破损部位为陶俑腿根部, 与试验法测得的破损部位相同。

综上, 仿真结果与修改后的试验测量值在核心趋势与临界值上高度一致, 验证了多因素动力学模型的正确性, 可为陶俑包装系统的抗冲击设计提供有效依据。对于模型与试验结果间存在的小幅差异, 其成因可能源于对微观因素的忽略或对缓冲材料动态力学特性的简化处理。后期研究可引入微观缺陷修正系数并采用缓冲材料动态本构模型, 以减小模型误差。

4 结 论

本文以构建陶俑修复品多因素耦合整体包装动力学模型为核心, 基于该模型计算与分析, 进一步提出陶俑修复品的脆值判断方法, 并结合试验对模型的有效性及脆值判断方法的可靠性进行验证。

(1)明确陶俑力学薄弱因素, 建立单因素影响动力学模型。分别构建含多易损件和带有集中质量悬臂梁易损件的系统动力学模型。

(2)构建多因素耦合的动力学模型。结合多易损件与悬臂梁易损件两种模型, 建立多因素的整体包装动力学模型, 并构建其系统的动力学方程。预测陶俑修复品的脆值范围, 判断其破损情况。

(3)提出陶俑脆值确定的量化方法并验证。建立“分易损件临界判据+激励迭代寻优”的脆值确定流程, 并进行数值求解。最后, 通过脆值试验, 验证了该多因素包装系统动力学模型的可靠性。

综上所述, 证明了该方法可以有效提高预测陶俑修复品力学特性的精度。突破传统单因素易损件模型局限, 首次将陶俑的不同易损部件纳入同一耦合模型, 明确两类易损件的动力学协同效应, 为复杂修复文物的力学特性分析提供框架; 在对陶质文物保护方面以及设计文物系统包装方案具有指导性的作用。

参考文献:

[1] 朱群芳, 王毅菲, 王丛丛. 文物物流文献综述 [J]. 物流技术, 2020, 39(8): 1-7.
ZHU Qunfang, WANG Yifei, WANG Congcong. Literature review of cultural relics logistics[J]. Logistics Technology, 2020, 39(8): 1-7.

[2] 冯旭蓉, 雷佳. 文物藏品陆路运输安全问题探析 [J]. 中国航务周刊, 2023(27): 74-76.
FENG Xurong, LEI Jia. Analysis on the safety of land transportation of cultural relics collection[J]. China Shipping Gazette, 2023(27): 74-76.

[3] SAVVOVA O V, TOPCHYI V L, BABICH O V, et al. Effect of the structure of lithium-silicate glasses on the mechanical properties of transparent glass-ceramic materials[J]. Strength of Materials, 2018, 50(6): 874-879.

[4] PIA G, CASNEDI L, IONTA M, et al. On the elastic deformation properties of porous ceramic materials obtained by pore-forming agent method[J]. Ceramics International, 2015, 41(9): 11097-11105.

[5] 方海峰, 薛伟. 陶瓷工艺品缓冲包装的力学特性与包装设计研究 [J]. 森林工程, 2008, 24(3): 56-58.
FANG Haifeng, XUE Wei. Mechanical characteristics and packaging design of buffering package of ceramic artworks[J].

Forest Engineering，2008，24(3)：56-58.

[6] 谢利，杨娓娓，申民昌. 陶瓷制品运输包装设计 [J]. 包装工程，2007，28(12)：107-110.
XIE Li，YANG Weiwei，SHEN Minchang. Design of transport package for ceramics[J]. Packaging Engineering，2007，28(12)：107-110.

[7] 李国志，刘迪，雒波波，等. 多因素影响下红陶制品脆值的研究与应用 [J]. 包装学报，2023，15(6)：1-8.
LI Guozhi，LIU Di，LUO Bobo，et al. Research and application of fragility of red pottery products under influence of multiple factors[J]. Packaging Journal，2023，15(6)：1-8.

[8] 郑小霞，陈广宁，任浩翰，等. 基于改进 VMD 和深度置信网络的风机易损部件故障预警 [J]. 振动与冲击，2019，38(8)：153-160.
ZHENG Xiaoxia，CHEN Guangning，REN Haohan，et al. Fault detection of vulnerable units of wind turbine based on improved VMD and DBN[J]. Journal of Vibration and Shock，2019，38(8)：153-160.

[9] 张炜，薛飞，卢富德，等. 考虑易损件物品-EPE 缓冲系统冲击响应分析 [J]. 振动与冲击，2015，34(9)：116-119.
ZHANG Wei，XUE Fei，LU Fude，et al. Impact-response analysis of the system composed of critical component and EPE cushion[J]. Journal of Vibration and Shock，2015，34(9)：116-119.

[10] 李国志，李元吉，孙德强，等. 基于缓冲包装系统的气体采样设备改进设计与验证 [J]. 包装工程，2025，46(3)：245-252.
LI Guozhi，LI Yuanji，SUN Deqiang，et al. Improved design and verification of gas sampling equipment based on buffer packaging system[J]. Packaging Engineering，2025，46(3)：245-252.

[11] 高德，卢富德. 基于杆式弹性易损部件的非线性系统跌落冲击研究 [J]. 振动与冲击，2012，31(15)：47-49.
GAO De，LU Fude. Drop impact analysis of packaging system with bar type elastic critical components[J]. Journal of Vibration and Shock，2012，31(15)：47-49.

[12] 乔杨，王军. 缓冲包装设计引起的易损件移动现象的力学原理 [J]. 包装工程，2017，38(21)：74-78.
QIAO Yang，WANG Jun. Mechanical principle of quick-wear parts moving phenomenon caused by cushioning packaging design[J]. Packaging Engineering，2017，38(21)：74-78.

[13] 杨松平，王志伟. 运输包装随机振动的加速度响应谱分析 [J]. 振动与冲击，2023，42(16)：37-46.
YANG Songping，WANG Zhiwei. Acceleration spectrum analysis for transport packaging under random vibration[J]. Journal of Vibration and Shock，2023，42(16)：37-46.

[14] 高德，卢富德. 考虑转动的双曲正切与正切组合模型缓冲系统冲击响应研究 [J]. 振动工程学报，2012，25(1)：6-11.
GAO De，LU Fude. The shock response of hyperbolic tangent and tangent comprehensive model on cushion system considering rotary motion[J]. Journal of Vibration Engineering，2012，25(1)：6-11.

[15] 伍瑾，卢富德，王彪，等. 易损件在连续跌落冲击载荷作用下的动力学响应 [J]. 振动与冲击，2023，42(20)：275-279.
WU Jin，LU Fude，WANG Biao，et al. Dynamic response of vulnerable part under the continuous drop impact loads[J]. Journal of Vibration and Shock，2023，42(20)：275-279.

[16] 卢富德，许晨光，高德，等. 悬臂梁易损部件在矩形加速度脉冲激励下的动力学响应与有限元分析 [J]. 振动与冲击，2016，35(5)：191-195.
LU Fude，XU Chenguang，GAO De，et al. Shock response and finite element analysis of critical components with cantilever beam type under action of a rectangular acceleration pulse[J]. Journal of Vibration and Shock，2016，35(5)：191-195.

[17] 龚江宏. 陶瓷材料脆性断裂的显微结构效应 [J]. 现代技术陶瓷，2021，42(5)：287-428.
GONG Jianghong. Microstructural effects in brittle fracture of ceramics[J]. Advanced Ceramics，2021，42(5)：287-428.

[18] 纪秋平. 含泵头日化瓶类装配件冲击损坏评价研究 [D]. 无锡：江南大学，2020.
JI Qiuping. Damage boundary evaluation approach for multi-component coupled daily chemicals bottle with pump head[D]. Wuxi：Jiangnan University，2020.

[19] YANG S P，LIU Z C. Reliability analysis for product package via probability density function of acceleration random response[J]. Journal of Vibration and Control，2024，30(7-8)：1841-1854.

[20] 郝蒙，陈安军. 非线性系统带集中质量悬臂梁易损件跌落冲击特性 [J]. 振动与冲击，2015，34(15)：162-167.
HAO Meng，CHEN Anjun. Dropping shock characteristics of a cubic nonlinear system with a cantilever beam type elastic critical component attaching a concentrated tip mass[J]. Journal of Vibration and Shock，2015，34(15)：162-167.

[21] 陈安军. 非线性包装系统跌落冲击问题变分迭代法 [J]. 振动与冲击，2013，32(18)：105-107.
CHEN Anjun. Variational iteration method for dropping shock problem of a cubic non-linear packaging system[J]. Journal of Vibration and Shock，2013，32(18)：105-107.

[22] 全国包装标准化技术委员会 (SAC/TC 49). 使用缓冲包装材料进行的产品机械冲击脆值试验方法：GB/T 8171—2008[S]. 北京：中国标准出版社，2008.
National Technical Committee on Packaging Standardization (SAC/TC 49). Test method for mechanical shock fragility rating of products using packaging cushioning materials：GB/T 8171—2008[S]. Beijing：China Standards Press，2008.

第一作者：李国志(1979—)，男，博士，副教授。
E-mail：liguozhi@sust.edu.cn

通信作者：王东峰(1978—)，男，硕士，副研究馆员。
E-mail：673249116@qq.com

考虑非线性与不确定性的货物-包装-车辆耦合系统建模与优化

郑益谦[1,2,3]，肖庚宇[1,2,3]，王志伟[1,2,3]，李嘉豪[1,2,3]

（1. 暨南大学包装工程学院，广东 珠海 519070；2. 暨南大学产品包装与物流广东普通高校重点实验室，广东 珠海 519070；
3. 暨南大学包装工程研究所，广东 珠海 519070）

摘要：针对公路运输中多层堆码货物的振动损伤问题，建立货物-包装-车辆耦合动力学模型，系统分析了非线性包装参数与多源不确定性因素共同作用下的振动传递机理。综合考虑包装刚度/阻尼非线性，公路等级与堆码配置（层数/质量/质心位置）等不确定性，提出多层堆码包装优化方案。结果表明：多层货物-车辆耦合效应会引入新的共振峰并放大既有振动，堆码层数和路面等级的提高均会加剧顶层货物振动；包装非线性刚度和阻尼对全频段振动产生显著影响，而堆码货物的质心位置偏移会以对称或非对称方式改变响应特性。相比传统确定性优化方法，本文提出的不确定性优化方案虽在减振指标上略逊色，但具有更强的鲁棒性和工程适用性。

关键词：运输包装；包装优化；多层堆码；车货耦合
中图分类号：U461.4；O324 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202509001

Modeling and optimization of cargo-packaging-vehicle coupled systems incorporating nonlinearities and uncertainties

ZHENG Yiqian[1,2,3], XIAO Gengyu[1,2,3], WANG Zhiwei[1,2,3], LI Jiahao[1,2,3]

（1.College of Packaging Engineering，Jinan University，Zhuhai 519070，China；2.Key Laboratory of Product Packaging and Logistics of Guangdong Higher Education Institutes，Jinan University，Zhuhai 519070，China；
3.Packaging Engineering Institute，Jinan University，Zhuhai 519070，China）

Abstract: This study addresses vibration damage in multi-layer stacked cargo during road transport by developing a coupled cargo-packaging-vehicle dynamic model. The effects of nonlinear packaging parameters and multi-source uncertainties (road conditions，stacking configuration，and mass distribution) are analyzed. Results indicate that cargo-vehicle coupling introduces new resonance peaks and amplifies existing vibrations，particularly at the top layer. Nonlinear stiffness and damping significantly affect vibration responses，while center-of-mass offsets alter response patterns symmetrically/asymmetrically. Compared to deterministic methods，the proposed uncertainty-based optimization offers slightly reduced attenuation but greater robustness and practical applicability for real transport scenarios.

Keywords: transportation packaging; packaging optimization; multi-layer stacking; vehicle-cargo coupling

运输包装动力学是保障产品包装设计有效性与可靠性的理论基础。传统运输包装设计，关注在给定运输激励下如何降低传递到产品的加速度峰值，使响应加速度小于产品脆值，以保证产品不被损坏[1]。然而，传统包装动力学的研究对象局限于“货物-包装”本身，其激励输入是由路面运输实车信号采集获得。通过将加速度传感器布置在车身中心或边角位置[2]，测试运输过程中车身的加速度时间历程信号，处理得到加速度功率谱密度，并在实验室振动台上进行模拟运输试验[3]。这种评估方式本质上忽略了运输车辆与货物之间的动力学耦合效应，简单地将车辆系统视为激振源。然而，货物作为惯性质量，尤其是多层堆码货物，在运输振动过程中会对车身产生动态的惯性力，这个动态力会改变车身的运动状态，反过来又会影响货物本身的振动响应[4]。因此，在进行运输包装动力学设计时，车辆-货物-包装之间的力学耦合效应是不可忽略的。

然而，现有车辆动力学方面的研究大都将车辆

收稿日期：2025-09-01；**修订日期：**2025-09-28
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (52405106, 50775100)；中国博士后科学基金资助项目 (2024M761169)；国家资助博士后研究人员计划资助项目 (GZC20230960)

视为整体, 研究车辆与外界交互系统之间的相互作用, 如车辆-桥梁[5]、车辆-弓网[6]和车辆-轨道[7]之间的耦合, 较少关注车辆作为系统本身的耦合效应。货物与车身常被视为同一集中质量, 将货物的振动等同为车-货整体的振动响应, 这会造成货物垂向/侧倾/俯仰加速度响应的预测误差。依据这类模型设计的包装刚度/阻尼可能会由于参数不匹配, 反而放大了货物的振动。部分研究者关注到了货物-车辆之间的耦合。

余政涛[8]基于 ADAMS 软件分析了道路-车辆-货物系统的动力学响应模型, 分析了不同堆码高度对振动响应的影响。WANG 等[9-10]采用逆子结构理论构建车辆-货物的多体动力学模型, 计算了特定路面下的货物响应。王启利等[11]提出利用虚拟质量法获取运载体-货物界面频响函数的方法, 建立了更加完备的耦合动力学模型。黄美琪等[12]研究车身-货物之间的耦合效应, 对比了不同货物刚度、阻尼对货物垂向/侧倾/俯仰振动响应的影响。在此基础上, 欧阳日上等[13]进一步考虑了非平稳路面激励下车辆-货物耦合效应, 研究了使货物稳定性最佳的双层堆码货物的质量比与刚度比。

这些研究推动了包装动力学理论的发展, 然而, 现有模型仍存在三处不足: 一是, 包装模型的参数被假设为线性的, 而实际包装件的刚度和阻尼往往呈现非线性[14]; 二是, 未考虑运输过程中的不确定性因素, 例如, 路面不平度和货物质量会随运输工况变化, 货物质心位置可能由于摆放不正偏离车身中心[15]; 三是, 未考虑多层堆码货物之间的耦合情况, 而多层堆码在实际运输中更为常见, 堆码层数应视为变量[16]。

为此, 本文综合考虑货物运输过程中的非线性与不确定性因素, 建立适用于任意堆码层数的货物-包装-车辆耦合动力学模型, 分析包装件刚度、阻尼非线性和运输环境因素不确定性对包装耦合系统的影响规律, 提出不确定性包装参数优化方案, 研究结果对运输包装设计具有重要的参考价值。

1　多层堆码货物-包装-车辆耦合动力学模型

1.1　多层堆码货物动力学模型

本文模型中, 利用分布刚度和分布阻尼描述货物包装力学特性, 忽略各层货物之间以及货物-车身之间水平方向的摩擦效应。假设多层堆码货物共有 $n(n\geqslant 0)$ 层, 每一层货物均可视为具有垂直、俯仰和侧倾三个自由度的集中质量。在第 i 层货物质心 O_{hi} 处建立平行于车身坐标系 O_b-$x_0y_0z_0$ 的货物坐标系 O_{hi}-$x_iy_iz_i$。第 i 层货物坐标与第 i–1 层货物坐标的转换关系可表示为:

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x,\ y_i = y_{i-1} + \Delta y,\ z_i = z_{i-1} + \Delta z \tag{1}$$

式中, Δx、Δy和Δz分别为货物质心到车身质心在 x、y 和 z 方向的距离。假设 n 层堆码货物的质心都处于车身侧倾轴上, 则Δy=0。当 i=1 时, 最底层货物与车身之间的距离Δx=–L_9, Δz=L_{10}/n; 当 $i\neq 1$ 时, 表示各层堆码货物之间的距离Δx=0, Δz=L_{10}/n。其中, L_9 为货物质心到车身质心在 x 轴方向的距离, L_{10} 为货物到车身质心在 z 轴方向的距离。

在货物任意区域内, 车身-货物之间的垂向相对变形量可表示为:

$$\Delta h_i = (z_{i-1} + \theta_{i-1}x_{i-1} + \varphi_{i-1}y_{i-1}) - (z_i + \theta_i x_i + \varphi_i y_i) \tag{2}$$

式中, φ_i 和 θ_i 分别表示第 i 层货物的侧倾与俯仰角度。在垂直方向上, 第 i 层货物受到的弹性力与阻尼力的合力为:

$$\begin{aligned} F_{hi} = &\int_{-L_8}^{L_8}\int_{-L_7}^{L_7}\left(K_h\Delta h_i + C_h\Delta\dot{h}_i\right)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i = \\ &4L_7L_8K_h(z_{i-1} - z_i + \Delta x\theta_{i-1} + \Delta y\varphi_{i-1}) + \\ &4L_7L_8C_h(\dot{z}_{i-1} - \dot{z}_i + \Delta x\dot{\theta}_{i-1} + \Delta y\dot{\varphi}_{i-1}) \end{aligned} \tag{3}$$

式中, K_h 和 C_h 分别为包装件的分布刚度和分布阻尼。在俯仰与侧倾方向上, 第 i 层货物所受到的由弹性力与阻尼力引起的俯仰与侧倾力矩分别为:

$$\begin{aligned} M_{hpi} = &\int_{-L_7}^{L_7}\int_{-L_8}^{L_8}(K_h\Delta h_i + C_h\Delta\dot{h}_i)x_i\mathrm{d}y_i\mathrm{d}x_i = \\ &\frac{4}{3}L_7^3L_8\left[K_h(\theta_{i-1} - \theta_i) + C_h(\dot{\theta}_{i-1} - \dot{\theta}_i)\right] \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} M_{hri} = &\int_{-L_8}^{L_8}\int_{-L_7}^{L_7}(K_h\Delta h_i + C_h\Delta\dot{h}_1)y_i\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i = \\ &\frac{4}{3}L_7L_8^3[K_h(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + C_h(\dot{\varphi}_{i-1} - \dot{\varphi}_i)] \end{aligned} \tag{5}$$

式中, L_7 和 L_8 分别为货物质心到纵、横向边界的距离。设 n 层堆码货物总质量为 m_h, 各层货物质量均匀分布, 第 i (i=1,2,⋯,n) 层货物质量为 m_i=m_h/n, 第 i 层货物绕 y 轴和 x 轴的转动惯量分别为 J_{pi}/n 和 J_{ri}/n。多层堆码货物动力学模型可以表示为:

$$\begin{cases} m_i\ddot{z}_i - F_{hi} + F_{hi+1} = 0 \\ J_{pi}\ddot{\theta}_i - M_{hpi} + M_{hpi+1} = 0 \\ J_{ri}\ddot{\varphi}_i - M_{hri} + M_{hri+1} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

1.2　货物-包装-车辆耦合动力学模型

货物通过包装系统与车身耦合 (i=0 表示车身)。车身同时受到来自最底层货物、驾驶室和悬架系统的作用力, 产生垂向、俯仰和侧倾三个自由度的运动, 如图 1 所示, 其振动微分方程可表示为:

$$\begin{cases} m_0\ddot{z}_0 + F_{h1} - F_c + \sum_{j=1}^{4}F_{sj} = 0 \\ J_{p0}\ddot{\theta}_0 + M_{hp1} - L_6F_c - L_9F_{h1} + \\ \quad L_1(F_{s1} + F_{s2}) - L_2(F_{s3} + F_{s4}) = 0 \\ J_{r0}\ddot{\varphi}_0 + M_{hr1} + L_5F_c - L_{10}F_{h1} + \\ \quad L_3(F_{s1} + F_{s4}) - L_4(F_{s2} + F_{s3}) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

式中，m_0 为车身质量；F_{h1} 为最底层货物-车身耦合作用力；F_c 为驾驶室-车身耦合作用力；F_{sj} (j=1, 2, 3, 4) 为悬架-车身耦合作用力；J_{p0} 和 J_{r0} 分别为车身绕 y 轴和 x 轴的转动惯量；L_1 和 L_2 分别为前、后车轮与俯仰轴的距离；L_3 和 L_4 分别为左、右车轮与侧倾轴的距离。

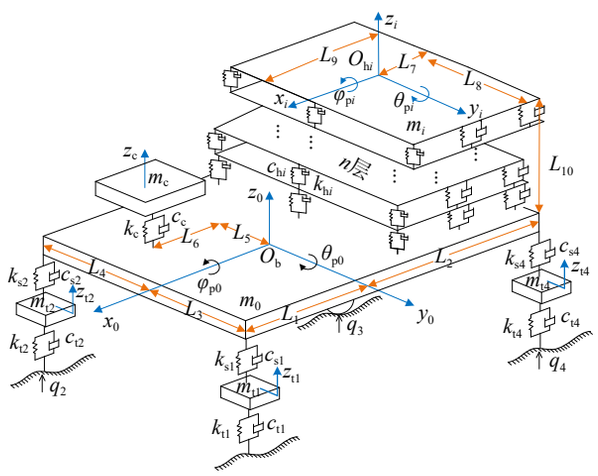


图 1 多层堆码货物-包装-车辆耦合动力学模型

Fig. 1 Multi-tiered stacked cargo-packaging-vehicle coupled dynamics model

驾驶室的垂向振动微分方程为：

$$m_c\ddot{z}_c + F_c = 0 \tag{8}$$

轮胎的垂向振动微分方程为：

$$m_{tj}\ddot{z}_{tj} - F_{sj} + F_{tj} = 0 \tag{9}$$

其中，

$$\begin{cases} F_c = F_{ck} + F_{cc} \\ F_{ck} = k_c(z_c - z_0 - L_6\theta_p + L_5\varphi_p) \\ F_{cc} = c_c(\dot{z}_c - \dot{z}_0 - L_6\dot{\theta}_p + L_5\dot{\varphi}_p) \end{cases} \tag{10}$$

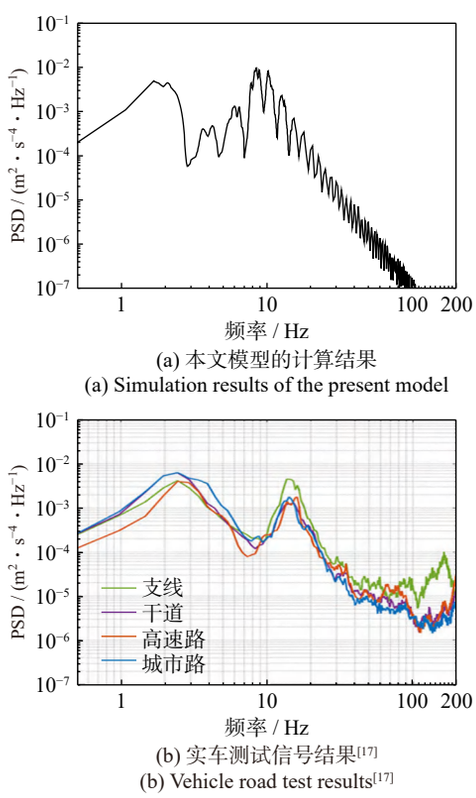
$$\begin{cases} F_{sj} = k_{sj}(z_{sj} - z_{tj}) + c_{sj}(\dot{z}_{sj} - \dot{z}_{tj}) \\ F_{tj} = k_{tj}(z_{tj} - q_j) + c_{tj}(\dot{z}_{tj} - \dot{q}_j) \end{cases} \tag{11}$$

式中，z_0、z_c、z_{tj} 和 q_j 分别为车身、驾驶室、轮胎和路面垂向位移 (下标 j=1,2,3,4 分别表示左前、右前、右后、左后位置)；φ_p 和 θ_p 分别表示车身的侧倾与俯仰角度；m_c、k_c 和 c_c 分别为驾驶室质量、悬置刚度和阻尼；m_{tj}、k_{tj} 和 c_{tj} 分别为轮胎质量、刚度和阻尼；k_{sj} 和 c_{sj} 分别为悬架刚度和阻尼；L_5 和 L_6 分别为驾驶室与车辆俯仰轴和侧倾轴的距离。悬架与车身连接点的相对变形量 z_{sj} 为：

$$\begin{cases} z_{s1} = z_0 + L_1\theta_0 + L_3\varphi_0 \\ z_{s2} = z_0 + L_1\theta_0 - L_4\varphi_0 \\ z_{s3} = z_0 - L_2\theta_0 - L_4\varphi_0 \\ z_{s4} = z_0 - L_2\theta_0 + L_3\varphi_0 \end{cases} \tag{12}$$

随机路面激励的生成方法与货物、车辆模型参数详见文献 [12]。

考虑实车测试成本较高，将本文模型仿真结果与现有文献实车测试结果比较，以验证所建模型的有效性，如图 2 所示。文献 [17] 所述的测试车辆为大型厢式货车，货物均匀分布于货厢内，货物通过包装与车身接触。利用分布刚度与分布阻尼描述货物包装的垂向力学特性，搭建考虑驾驶室的车辆垂向动力学模型，该模型参数对标试验车辆参数，具体可见文献 [12]。将基于 C 级路面激励条件计算得到的单层货物-车身耦合模型车身垂向 PSD 仿真结果与文献 [17] 提供支线路况的实测信号进行了对比分析。对比结果表明：(1) 车身垂向 PSD 主要共振频率均在 1~3 Hz 和 9~11 Hz 范围内；(2) 测试与仿真的共振峰在幅值上接近；(3)PSD的整体变化趋势保持一致。而模型误差主要来源于两方面：一是本文路面激励输入基于滤波白噪声法构建，而实际路面存在一些非高斯的信号；二是本文模型为有限自由度的离散质量-弹簧-阻尼简化模型，而实际车辆更为复杂。总体而言，所建模型具有较高的准确性，可用于后续耦合分析。



(a) 本文模型的计算结果
(a) Simulation results of the present model

(b) 实车测试信号结果[17]
(b) Vehicle road test results[17]

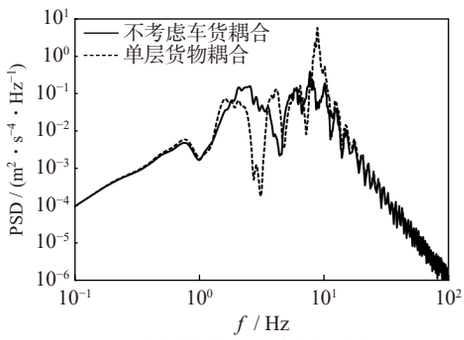
图 2 本文模型计算结果与实车测试的车身 PSD 对比

Fig. 2 Comparison of vehicle frame PSD between the present model and vehicle road test

2 多层堆码耦合振动影响分析

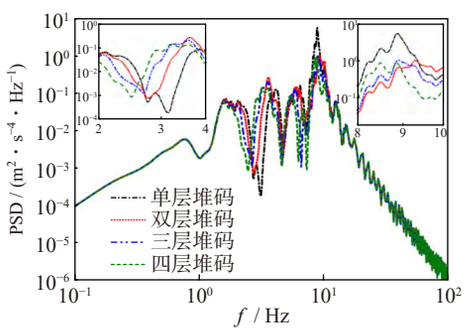
2.1 多层堆码对车身振动的影响

在随机路面激励下，相同货物总质量，不同堆码层数 n 的车身垂向加速度结果如图 3 所示。包括两个显著现象：



(a) 单层堆码车身垂向加速度PSD

(a) Single-layer stacking vertical acceleration PSD of vehicle body



(b) 多层堆码车身垂向加速度PSD

(b) Multi-layer stacking vertical acceleration PSD of vehicle body

图 3　不同堆码层数的车身垂向加速度 PSD 对比

Fig. 3　Comparison of vertical acceleration PSD of vehicle body across different stacking layers

(1) 考虑车辆-货物耦合, 车身垂向加速度 PSD 曲线在 3~4 Hz 附近出现了一个新的波峰。这是考虑货物垂向自由度后引入的新共振峰, 相比于不考虑耦合情况, 单层货物耦合的车身垂向加速度 PSD 响应峰值更高, 尤其是在 9~10 Hz 附近的峰值从 0.37 $m^2/s^4/Hz$ 增大到 1 $m^2/s^4/Hz$ 以上。这表明忽略车-货耦合将很大程度低估车身的振动响应。

(2) 随着货物堆码层数的增加, 车身垂向加速度 PSD 共振峰在 1~2 Hz 附近(簧上质量固有频率)基本不变, 在 4 Hz 附近(货物固有频率)略有增加, 在 9~10 Hz 附近(簧下质量固有频率)显著增大。此外, 随着堆码层数继续增加, 车身的垂向加速度 PSD 曲线变化愈加不明显, 表明堆码层数对于车身垂向振动响应的影响是有限的。而相比于侧倾与俯仰角加速度振动, 货物的垂向振动是导致货物损伤的主要因素。因此, 下文分析将主要关注多层堆码对于货物自身垂向振动响应的影响。

2.2　多层堆码对货物振动的影响

货物的顶、中、底层货物的垂向加速度 PSD 差异明显。为研究不同堆码层数对货物耦合的影响, 保持车辆载货条件不变情况下更改货物层数。三层堆码货物质量为 m_i=5000/3 kg, 绕 y 轴和 x 轴的转动惯量分别为 J_{p0}=8333/3 kg·m^2 和 J_{r0}=2733/3 kg·m^2, 包装分布刚度与分布阻尼分别为 390000 N/m^3 和 883 N·s/m^3。图 4 中, 在路面激励频率的主要范围内 (1~10 Hz), 三层堆码货物的振动响应呈现顶层>中层>底层的规律, 而在 10 Hz 以上频率段的规律相反。这个现象在实车测试文献 [8-9, 16] 中有提及, 但未从在机理上解析。从耦合模型角度可解释该现象: 在低频区域, 各层货物同运动相位接近, 由于顶层自由度最大、所受约束最小, 导致振动能量向顶层累积, 呈现顶层>中层>底层的响应规律; 在高频区域振动传递受刚度控制, 底层因直接与车体耦合、边界约束最强, 最先产生振动响应, 而后能量被逐级衰减, 因此响应强度反向呈现为底层>中层>顶层。实际上, 堆码货物每增加一层, PSD 曲线共振峰数量增加一个, 这与堆码货物自由度数规律一致。考虑三层堆码货物-包装-车辆模型的动力学耦合后, 除去簧下质量-簧上质量的两个主要共振峰值外, 还出现了三个额外的共振区间 Peak 1、Peak 2 和 Peak 3。对比三层堆码货物的内共振区间幅值可知, 每一层货物的垂向振动均以自身共振频率所在峰值为主导。顶、中、底层货物占主导的共振区间的共振频率为 2.3 Hz<3.2 Hz<6.1 Hz, 幅值为 0.05 $m^2/s^4/Hz$>0.12 $m^2/s^4/Hz$>0.75 $m^2/s^4/Hz$。然而, 顶层的最高峰值未必是所有堆码层中最大的, 这还与系统结构参数有关, 文献 [16] 中的模拟运输振动试验结果也印证了这一点。

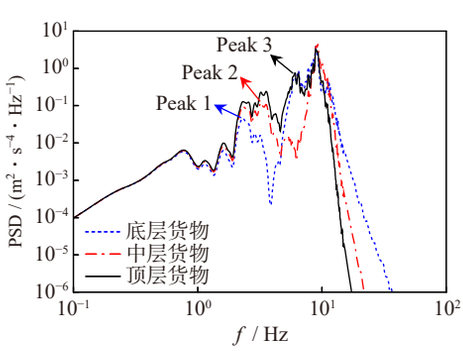


图 4　不同堆码层货物的垂向加速度 PSD 对比

Fig. 4　Comparison of vertical acceleration PSD for cargo at different stacking layers

总体而言, 顶层货物的垂向加速度 PSD 曲线在全频段中整体最高, 中层次之, 底层最小。三者的均方值依次为 4.9854、4.8920 和 4.4571 m^2/s^4, 呈现自上而下递减趋势, 该值反映了各层在分析频段内振动总能量的大小。值得注意的是, 在实际应用中, 出于包装规格标准化与货物装卸便利性的考虑, 多层堆码货物通常采用相同规格的包装类别。因此, 在对多层堆码货物进行包装设计时, 应选取振动响应最大的顶层货物作为分析对象, 以避免因设计余量不足而导致货物损伤。

2.3 包装参数非线性对货物振动的影响

包装材料的力学行为，如泡沫塑料的滞回特性或衬垫的结构刚度，呈现出明显的非线性特征[14]，这一特性决定了包装系统在大幅值振动下的动态响应。假设货物包含三次非线性分布刚度、阻尼，货物的垂向作用力与侧倾、俯仰作用力矩分别为：

$$\begin{aligned}F_{hi}=&\int_{-L_8}^{L_8}\int_{-L_7}^{L_7}(\eta_{ki}+\eta_{ci})\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i=\\&4K_hL_7L_8\left[\gamma\left(\gamma^2+L_7^2\Delta\theta^2+L_8^2\Delta\varphi^2\right)\right]+\\&4C_hL_7L_8\left[\dot\gamma\left(\dot\gamma^2+L_7^2\Delta\dot\theta^2+L_8^2\Delta\dot\varphi^2\right)\right]\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}M_{hpi}=&\int_{-L_7}^{L_7}\int_{-L_8}^{L_8}(\eta_{ki}+\eta_{ci})\,x_i\mathrm{d}y_i\mathrm{d}x_i=\\&4K_hL_7^3L_8\Delta\theta\left(\gamma^2+\frac{L_7^2\Delta\theta^2}{5}+\frac{L_8^2\Delta\varphi^2}{3}\right)+\\&4C_hL_7^3L_8\Delta\dot\theta\left(\dot\gamma^2+\frac{L_7^2\Delta\dot\theta^2}{5}+\frac{L_8^2\Delta\dot\varphi^2}{3}\right)\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}M_{hri}=&\int_{-L_8}^{L_8}\int_{-L_7}^{L_7}(\eta_{ki}+\eta_{ci})\,y_i\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_i=\\&4K_hL_7L_8^3\Delta\varphi\left(\gamma^2+\frac{L_7^2\Delta\theta^2}{3}+\frac{L_8^2\Delta\varphi^2}{5}\right)+\\&4C_hL_7L_8^3\Delta\dot\varphi\left(\dot\gamma^2+\frac{L_7^2\Delta\dot\theta^2}{3}+\frac{L_8^2\Delta\dot\varphi^2}{5}\right)\end{aligned}\tag{15}$$

其中，

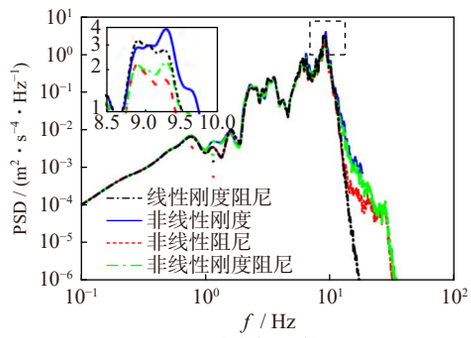
$$\begin{cases}\eta_{ki}=K_h\Delta h_i+K_{hn}\Delta h_i^3\\ \eta_{ci}=C_h\Delta\dot h_i+C_{hn}\Delta\dot h_i^3\end{cases}\tag{16}$$

式中，K_{hn} 和 C_{hn} 分别为非线性分布刚度项和非线性分布阻尼项。第 i 层与第 i–1 层货物的垂向位移差 $\gamma=z_{i-1}-z_i+\Delta x\theta_{i-1}$；俯仰角度差 $\Delta\theta=\theta_{i-1}-\theta_i$；侧倾角度差 $\Delta\varphi=\varphi_{i-1}-\varphi_i$。

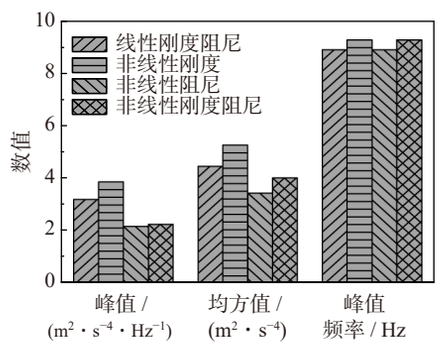
由图 5(a) 可见，包装非线性刚度使顶层货物垂向振动响应在全频域段显著增加，但对峰值的增幅较小；非线性阻尼则主要抑制了峰值处的响应，同时增大了高频段的 PSD。总体而言，包装非线性刚度或非线性阻尼都显著影响货物峰值与整体响应。为了综合评估包装参数非线性对多层堆码货物振动的影响，选取货物振动加速度 PSD 曲线的峰值、PSD 曲线与频率轴的包围面积，即均方值（反映振动能量，单位 m^2/s^4 或 g^2）作为指标，从局部和整体两个维度来评估对货物振动响应的影响。

由图 5(b) 可见，非线性刚度增大顶层货物的 PSD 峰值和均方值，非线性阻尼反之。包装刚度、阻尼的非线性对货物峰值频率的影响很小，这是因为共振频率主要取决于准静态刚度值（线性刚度）。

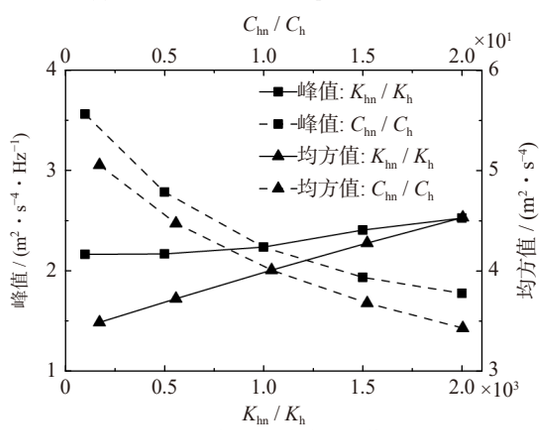
由图 5(c) 可见，非线性项与线性项比值增大，包装参数非线性程度增强，顶层货物 PSD 峰值与均方根值随着非线性刚度比 K_{hn}/K_h 的增大而增加，随着非线性阻尼比 C_{hn}/C_h 的增大而减小，在实际设计中需考虑不同包装材料的非线性特性。



(a) 垂向加速度PSD
(a) Vertical acceleration PSD



(b) 峰值与均方值指标
(b) Peak value and mean-square value index



(c) 刚度/阻尼非线性比值
(c) Stiffness/damping nonlinear ratio

图 5 考虑包装非线性的顶层货物垂向加速度 PSD 对比

Fig. 5 Comparison of vertical acceleration PSD for the top-layer cargo considering packaging nonlinearity

2.4 运输环境不确定性对货物振动的影响

除包装参数的非线性外，车辆运输环境还存在诸多不确定性因素会对货物振动产生影响，包括路面等级、货物堆码层数、货物总质量和货物质心位置等。由图 6 可见，随着路面等级的提高，各层堆码货物峰值和均方值均有提升。相较于车身振动，顶层货物的峰值和均方值在高路面等级下的振动增幅更大，货物破损的风险更高。由 2.1 节分析可知，堆码层数增加到一定程度后对车身振动的影响逐渐平缓，这与图 7 的趋势是一致的。然而，顶层货物（危险层）的 PSD 峰值与均方值随堆码层数的增幅仍显著。因此，包装设计时堆码总层数不宜过大。传统

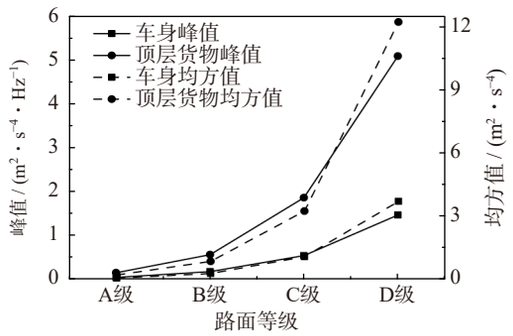


图 6　路面等级不确定性对货物垂向加速度 PSD 指标的影响

Fig. 6　Effects of road grade uncertainty on cargo vertical acceleration PSD indexes

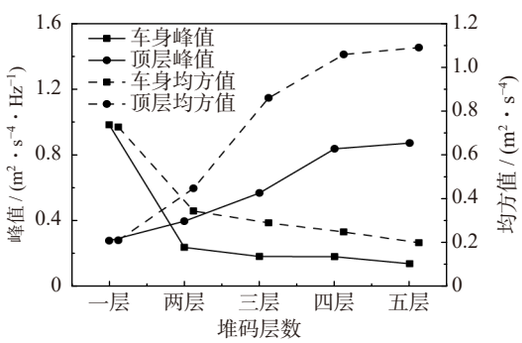


图 7　堆码层数不确定性对货物垂向加速度 PSD 指标的影响

Fig. 7　Effects of stacking layer uncertainty on cargo vertical acceleration PSD indexes

模拟运输振动试验从降低货物运输稳定性角度给出了基于试验现象的解释，本研究从顶层货物振动响应的视角补充了机理层面的解释。

运输过程中包装参数是固定的，但装载货物总质量根据实际需求变化。由图 8 可见，当货物质量较小时，顶层货物的 PSD 峰值较高，随着货物总质量的增大，顶层 PSD 峰值和均方值逐渐下降并最终趋向稳定，车身的振动响应则相反。这是由于车辆是基于满载工况进行平顺性设计的，所以空载工况下的货物振动响应相较于满载工况更大。

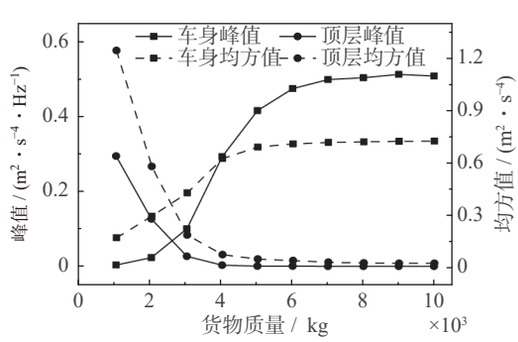
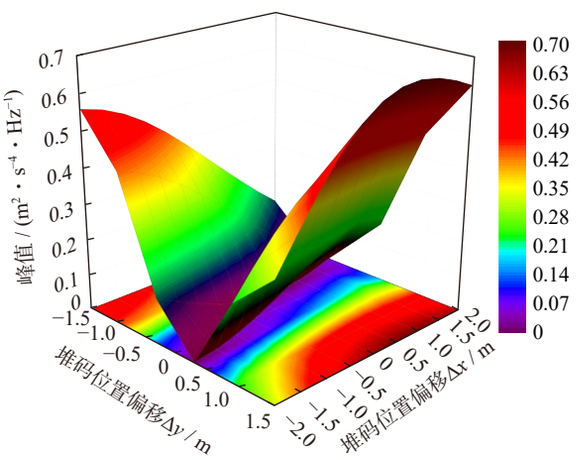


图 8　货物质量不确定性对货物加速度 PSD 指标的影响

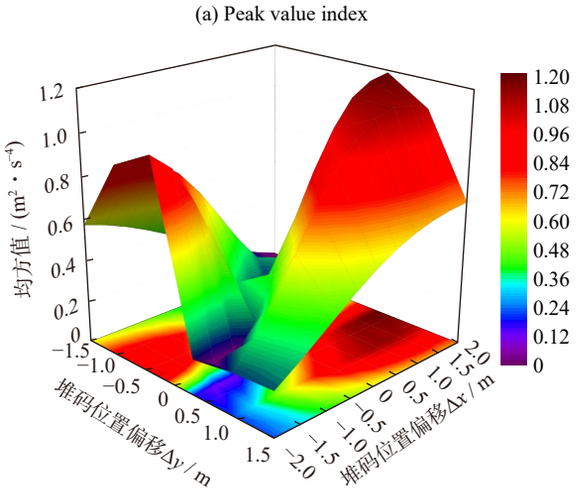
Fig. 8　Effects of cargo mass uncertainty on cargo acceleration PSD indexes

货物在装载时摆放位置存在随机性，难以保证货物质心与车身质心完全重合。由图 9 可见（图中颜色柱表示对应纵坐标数值大小），PSD 的峰值指标随堆码位置纵向偏移 Δx 呈现单侧增大，横向偏移 Δy 呈现对称增大的规律。这是因为堆码货物质心的初始位置位于侧倾轴上，并位于俯仰轴后侧。当横向左右偏移侧倾轴相同位移时，峰值响应对称；当纵向偏移靠近俯仰轴时，峰值响应减小，反之则相反。另一方面，随堆码位置纵向偏移 Δx 与横向偏移 Δy 增大，均方值呈现对角增大的规律。这是因为均方值指标衡量的是关注频域段内的振动能量特性，由于驾驶室的质心位于车辆右前方，因此当货物堆码质心位置与货物质心对角时，车身的振动响应较小，货物整体响应也相应降低。



(a) 峰值指标

(a) Peak value index



(b) 均方值指标

(b) Mean-square value index

图 9　货物质心位置不确定性对货物垂向加速度 PSD 指标的影响

Fig. 9　Effects of cargo center position uncertainty on cargo vertical acceleration PSD indexes

3　考虑参数非线性与不确定性的包装优化方案

3.1　不确定性优化模型

由上述分析可知，包装参数的非线性与运输环

境的不确定性会显著影响受关注的顶层货物振动响应峰值与均方值。现有研究中包装参数常被线性化处理，并基于特定运输工况优化，优化目标是：在确定性条件下获取最优的包装线性刚度与线性阻尼，使货物振动响应最小。确定性优化函数为：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{X}} \quad F(\boldsymbol{X})=\omega_1\frac{a_{\mathrm{peak}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})}{a_{\mathrm{peak},0}}+\omega_2\frac{a_{\mathrm{ms}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})}{a_{\mathrm{ms},0}}\\&\text{s.t.} \quad K_{\mathrm{h}}^{\mathrm{l}}\leqslant K_{\mathrm{h}}\leqslant K_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}},\ C_{\mathrm{h}}^{\mathrm{l}}\leqslant C_{\mathrm{h}}\leqslant C_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}\end{aligned}\tag{17}$$

式中，ω_1 和 ω_2 分别为峰值指标与均方值指标的权重系数；$a_{\mathrm{peak},0}$ 与 $a_{\mathrm{ms},0}$ 为优化前的指标值。$\boldsymbol{X}=\{K_{\mathrm{h}}, C_{\mathrm{h}}\}$ 为设计变量；上标“u”和“l”为设计变量的上界与下界。

然而，由于包装非线性与运输环境不确定性，计算所得的顶层货物垂向 PSD 峰值指标与均方值指标响应的加权归一化指标 F 也是区间变量：

$$F^{\mathrm{M}}=\frac{F^{+}+F^{-}}{2},F^{\mathrm{R}}=\frac{F^{+}-F^{-}}{2}\tag{18}$$

式中，F^{M} 与 F^{R} 分别为归一化指标的区间中点与区间半径；F^{+}与 F^{-}分别为该指标的区间上界与下界。

考虑包装非线性与运输环境不确定性的包装参数优化目标可以重新表述为：在不确定性条件下获取最优的包装非线性刚度与非线性阻尼，使货物振动响应区间中点与区间半径最小。不确定性优化函数可表示为：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{X}} \quad F(\boldsymbol{X})=\omega_3F^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})+\omega_4F^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})\\&\text{s.t.} \quad \boldsymbol{X}\in\left[\boldsymbol{X}^{\mathrm{l}},\boldsymbol{X}^{\mathrm{u}}\right],\ \boldsymbol{U}\in\left[\boldsymbol{U}^{\mathrm{l}},\boldsymbol{U}^{\mathrm{u}}\right]\end{aligned}\tag{19}$$

式中，ω_3 和 ω_4 分别为区间中点与区间半径的权重系数；设计变量 $\boldsymbol{X}=\{K_{\mathrm{h}}, K_{\mathrm{hn}}, C_{\mathrm{h}}, C_{\mathrm{hn}}\}$；不确定性参数 $\boldsymbol{U}=\{G_{\mathrm{q}}(n_0), n, m_{\mathrm{h}}, \Delta x, \Delta y\}$；上标“u”和“l”为区间变量的上界与下界，如表 1 所示。采用蒙特卡罗法对优化函数进行抽样求解。具体步骤如下：

表 1 设计变量与不确定性参数变化范围

Tab. 1 Variation range of design variables and uncertain parameters

	参数	定义	变化范围	单位
设计变量	K_{h}	线性分布刚度	$[1\times10^5, 5\times10^5]$	$\mathrm{N/m^3}$
	C_{h}	线性分布阻尼	$[2\times10^2, 3\times10^3]$	$\mathrm{N\cdot s/m^3}$
	K_{hn}	非线性分布刚度	$[0.39\times10^8, 7.8\times10^8]$	$\mathrm{N/m^5}$
	C_{hn}	非线性分布阻尼	$[8.83\times10^2, 1.766\times10^4]$	$\mathrm{N\cdot s/m^5}$
不确定性参数	$G_{\mathrm{q}}(n_0)$	路面不平度系数	$\{1.6, 6.4, 25.4\}\times10^5$	$\mathrm{m^3}$
	n	货物层数	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	—
	m_{h}	货物质量	$[1\times10^3, 1\times10^4]$	kg
	Δx	堆码位置纵偏移	$[-2, 2]$	m
	Δy	堆码位置横偏移	$[-1.5, 1.5]$	m

步骤 1：对 $\boldsymbol{U}$ 内第 1 个参数在其所在区间内进行抽样，得到响应 $F_{1,1}$；

步骤 2：对 $\boldsymbol{U}$ 内其他区间 $n-1$ 个参数抽样，得到一组响应 $\boldsymbol{F}_{n,1}=[F_{1,1}, F_{1,2},\cdots, F_{1,n}]^{\mathrm{T}}$；

步骤 3：重复步骤 1 和 2，进行共 m 次抽样后可得 m 组响应 $\boldsymbol{F}_n^m=[\boldsymbol{F}_{n,1}, \boldsymbol{F}_{n,2},\cdots, \boldsymbol{F}_{n,m}]^{\mathrm{T}}$；

在 m 组响应 $\boldsymbol{F}_n^m$ 中，利用式 (18) 计算出响应区间中点与区间半径，利用遗传算法寻找满足不确定性优化函数式 (19) 的最优非线性包装参数组合 $\boldsymbol{X}$。

根据上述优化方法，最终可得到三层货物堆码下的最优包装参数。该方法综合考虑包装材料非线性刚度、阻尼特性及运输环境不确定性，显著降低了顶层货物的振动水平。

不确定性参数难以获取准确的分布规律，本研究采用区间优化方法。各参数区间均基于物理约束或典型工况设定：路面不平度系数 $G_{\mathrm{q}}(n_0)$ 涵盖了最常见的 A、B、C 级路面；货物层数 n 与质量 m_{h} 的区间取实际运输中的常见值；堆码位置偏移量 Δx 与 Δy 根据货箱的实际尺寸约束获得。

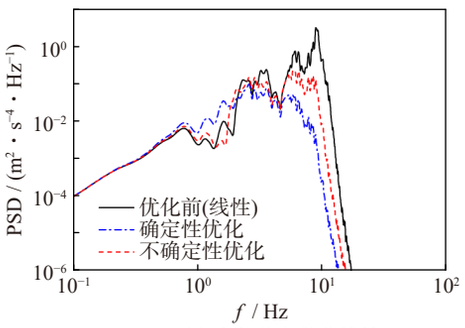
3.2 优化结果分析

优化前后的包装参数对比见表 2，在线性条件下，不确定性优化的区间中点和区间半径分别为 0.1309 和 0.1227；在非线性条件下，不确定性优化的区间中点和区间半径分别为 0.3507 和 0.2112。综合考虑包装非线性与运输环境不确定性的优化结果如图 10 所示，由图 10(a)（线性情况）与图 10(b)（非线性情况）可见，顶层货物的功率谱密度曲线中，优化前的基础模型整体响应最高，不确定性优化结果次之，而确定性优化所得的响应最低，这一趋势在非线性系统中同样保持一致。但两种优化获得的 PSD 曲线在具体频率范围的表现不同：确定性优化 PSD 曲线在 1~2 Hz 的频率段（簧上质量共振频率区间）的响应更高，在 9~10 Hz 的频率段（簧下质量共振频率区间）的响应更低，而峰值出现在 3~4 Hz 频率段（货物共振频率区间）。相比而言，不确定性优化的 PSD 曲线在整体幅值降低的基础上变化趋势与优化前更为接近。

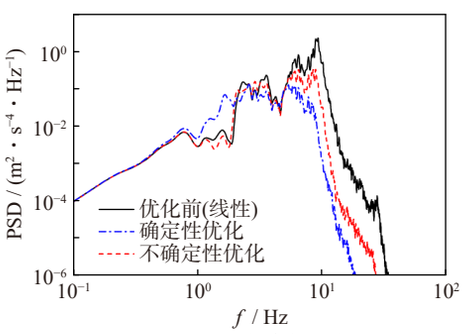
表 2 优化前后的包装参数对比

Tab. 2 Comparison of packaging parameters before and after optimization

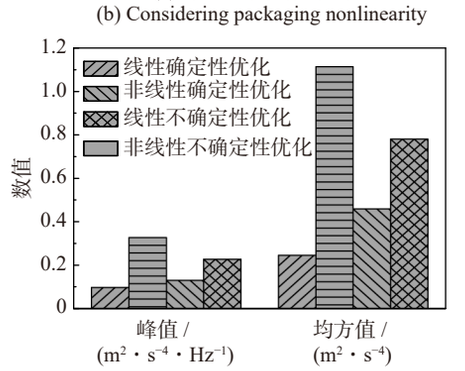
优化方法	类型	K_{h}/($\mathrm{N\cdot m^{-3}}$)	C_{h}/($\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-3}}$)	K_{hn}/($\mathrm{N\cdot m^{-5}}$)	C_{hn}/($\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-5}}$)
优化前	线性	390000	883	—	—
	非线性	390000	883	3.9×10^8	8.83×10^3
确定性优化	线性	113315	1627	—	—
	非线性	188023	1831	1.41×10^8	5.72×10^3
不确定性优化	线性	260233	1955	—	—
	非线性	311222	1902	4.57×10^8	1.53×10^3



(a) 不考虑包装参数非线性
(a) Without considering packaging nonlinearity



(b) 考虑包装参数非线性
(b) Considering packaging nonlinearity



(c) 优化指标对比
(c) Comparison of optimization index

图 10　不同优化方案结果对比

Fig. 10　Comparison of different optimization schemes

进一步地，对比峰值与均方值指标可以看出，确定性优化在特定参数条件下能够取得最优的减振效果，其 PSD 峰值指标和均方值指标最小，而不确定性优化在指标上略高于确定性结果。这是因为不确定性优化综合兼顾了减振性能最优性与稳定性，并非追求单一的指标最低的设计目标，其优势在于显著增强了系统对参数扰动的适应能力，体现出更强的鲁棒性。因此，在考虑实际工况存在波动的情况下，不确定性优化得到的包装方案能够提供更加可靠的振动控制表现。

4　结　论

本研究通过建立货物-包装-车辆耦合动力学模型，系统揭示了多层堆码货物在公路运输中的振动传递机理与响应特性，并提出多层堆码包装的不确定性优化方案。主要结论如下：

（1）多层堆码货物与车辆系统之间存在显著的耦合效应，不仅引入车身振动在 3~4 Hz 的新共振峰，还放大原有 9~10 Hz 共振响应；堆码层数增加将减弱该放大效应，但顶层货物在各层货物间始终表现出最大的内共振幅值和最小的共振频率。

（2）包装参数的非线性（刚度与阻尼）对振动响应具有重要影响。非线性刚度会全面增大振动水平，非线性阻尼可抑制主频振动但加剧高频成分，提升刚度/阻尼非线性强度会增强这种影响的程度。

（3）运输环境不确定性会影响顶层货物垂向振动响应：①随着路面等级提高，顶层货物振动显著增强，破损风险上升；②堆码层数增加会显著放大顶层货物的振动，但其对车身振动的影响在一定层数后趋于平稳；③货物总质量较小时振动响应较大，随质量增加逐渐减小并最终稳定；④堆码货物质心偏移会引发货物振动响应的对称或非对称变化。

（4）在考虑实际运输环境波动的情况下，不确定性优化方法虽未在减振指标上达到确定性优化的最优值，但通过兼顾多个不确定性因素，显著提高了包装系统的鲁棒性和适应性，更适用于实际工程应用。

（5）本文模型将货物间及货物与底板间的作用简化为均匀分布的垂向刚度和阻尼，局限性在于未考虑多层堆码货物间的相互摩擦；同时，车辆工况为匀速直线行驶，未涉及启动、制动、转弯等复杂工况下的耦合效应。

参考文献：

[1] 陈俊菲，张元标，林聪. 随机振动下产品包装系统传递路径分析 [J]. 振动工程学报，2023，36(2)：507-516.
CHEN Junfei，ZHANG Yuanbiao，LIN Cong. Transfer path analysis of product packaging system under random vibration[J]. Journal of Vibration Engineering，2023，36(2)：507-516.

[2] LAMB M J，ROUILANRD V. Characterisation of the rigid body vibration spectra of road transport vehicles[J]. Packaging Technology and Science，2025，38(1)：33-43.

[3] 卫赛超，谢晶. 不同包装方式对芒果低温模拟运输贮藏中品质及代谢的影响 [J]. 食品科学，2022，43(5)：227-234.
WEI Saichao，XIE Jing. Effects of different packaging methods on the quality and metabolism of mango fruit during simulated low-temperature transportation and storage[J]. Food Science，2022，43(5)：227-234.

[4] ZHANG J H，GUO P，LIN J W，et al. A mathematical model for coupled vibration system of road vehicle and coupling effect analysis[J]. Applied Mathematical Modelling，2016，40(2)：1199-1217.

[5] WANG S F，YU L，YANG F，et al. Effect of steel fiber distribution on the mechanical properties of UHPC caused by vehicle-bridge coupling vibration[J]. Composites Part B：Engineering，2022，245：110201.

[6] SONG Y，WANG Z W，LIU Z G，et al. A spatial coupling model to study dynamic performance of pantograph-catenary with vehicle-track excitation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2021，151：107336.

[7] AGGESTAM E，NIELSEN J C O. Simulation of vertical dynamic vehicle–track interaction using a three-dimensional slab track model[J]. Engineering Structures，2020，222：110972.

[8] 余政涛. 道路-车辆-包装耦合振动动力学建模仿真及对运输安全影响研究 [D]. 西安：长安大学，2022.
YU Zhengtao. Road-vehicle-packaging coupled vibration dynamics modeling and simulation and its impact on transportation safety[D]. Xi’an：Chang’an University，2022.

[9] WANG Z W，WANG J. Inverse substructure method of three-substructures coupled system and its application in product-transport-system[J]. Journal of Vibration and Control，2011，17(6)：943-951.

[10] WANG Z W，WANG J，ZHANG Y B，et al. Application of the inverse substructure method in the investigation of dynamic characteristics of product transport system[J]. Packaging Technology and Science，2012，25(6)：351-362.

[11] 王启利，王军，孙中振，等. 界面响应不可测的刚性耦合系统逆向子结构分析 [J]. 振动工程学报，2016，29(4)：603-608.
WANG Qili，WANG Jun，SUN Zhongzhen，et al. Inverse sub-structuring theory of rigid coupling system with incomplete measured data[J]. Journal of Vibration Engineering，2016，29(4)：603-608.

[12] 黄美琪，王志伟. 基于车辆-货物耦合作用的运输系统响应分析 [J]. 振动工程学报，2024，37(11)：1906-1916.
HUANG Meiqi，WANG Zhiwei. Response analysis of transport system based on vehicle-cargo coupling[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(11)：1906-1916.

[13] 欧阳日上，王志伟. 非平稳路面激励下车辆-堆码货物耦合系统响应分析 [J/OL]. 噪声与振动控制，1-7[2025-08-15]. https://link.cnki.net/urlid/31.1346.tb.20250707.1420.010.
OUYANG Rishang，WANG Zhiwei. Response analysis of the vehicle-stacked cargo coupling systems under non-stationary road excitation[J/OL]. Noise and Vibration Control，1-7[2025-08-15]. https://link.cnki.net/urlid/31.1346.tb.20250707.1420.010.

[14] 高德，卢富德. 考虑转动的双曲正切与正切组合模型缓冲系统冲击响应研究 [J]. 振动工程学报，2012，25(1)：6-11.
GAO De，LU Fude. The shock response of hyperbolic tangent and tangent comprehensive model on cushion system considering rotary motion[J]. Journal of Vibration Engineering，2012，25(1)：6-11.

[15] 曾台英，周龙炎，许增刚，等. 不同缓冲材料的堆码包装振动特性分析 [J]. 包装工程，2023，44(5)：262-271.
ZENG Taiying，ZHOU Longyan，XU Zenggang，et al. Vibration characteristics of stacking packaging with different buffer materials[J]. Packaging Engineering，2023，44(5)：262-271.

[16] WANG L J，XIE Z C，GAO J G，et al. Analysis of response vibration properties and quality changes of ‘Huangguan’ pears under non-Gaussian vibration[J]. Food Packaging and Shelf Life，2025，50：101560.

[17] BÖRÖCZ P，SINGH S P. Measurement and analysis of delivery van vibration levels to simulate package testing for parcel delivery in Hungary[J]. Packaging Technology and Science，2018，31(5)：342-352.

第一作者：郑益谦(1995—)，男，博士，讲师。
E-mail：zhengyiqian@jnu.edu.cn
通信作者：王志伟(1963—)，男，博士，教授。
E-mail：wangzw@jnu.edu.cn

结构动响应的自启动单解时域积分器优化

李金泽，刘耀坤，于开平，崔乃刚

（哈尔滨工业大学航天学院，黑龙江 哈尔滨 150001）

摘要：时域积分器是分析大型结构动态响应的一种常用且高效的数值求解技术。在众多积分器中，自启动单解时域积分器因其简单性而备受关注。基于积分器振幅、相位误差主项及位移局部截断误差主项的解析计算技术，本文对实现一致二阶精度的三类自启动单解时域积分器进行了系统优化：隐式算法、完全显式算法和速度隐式处理的显式算法。在隐式算法方面，优化后的OSS21*算法较原始方法显著改善了超调趋势，增强了高频耗散能力，其综合性能优于现有同阶精度的自启动单解隐式算法。对于显式算法，本文通过最小化振幅与相位误差主项的平方和，优化了在解平衡方程时的速度更新格式；同时基于位移局部截断误差分析确定了四组最优算法参数。在相同物理阻尼率下，优化后的GSSI*算法与原始方法相比表现出更小的相对周期误差，且该优势随阻尼率增大更为显著；在相同耗散量条件下，其周期误差性能亦明显优于原始方法。数值算例验证了理论分析结果，证实了所提积分器在精度、超调抑制和耗散性能方面的优越性。

关键词：时间积分法；自启动；单解；一致二阶精度；隐式；显式

中图分类号：O302；O327　　**文献标志码：**A　　DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202506051

Optimizations on self-starting single-solve time integrators for structural dynamical responses

LI Jinze, LIU Yaokun, YU Kaiping, CUI Naigang

（School of Astronautics，Harbin Institute of Technology，Harbin 150001，China）

Abstract: Time integration algorithms are widely used as efficient numerical techniques for analyzing dynamic responses of large-scale structures. Among various integrators，self-starting single-solve time integrators have attracted considerable attention due to their simplicity. Based on analytical techniques for computing the leading terms of amplitude error，phase error，and displacement local truncation error，the paper systematically optimizes three types of self-starting single-solve time integrators with identical second-order accuracy：implicit algorithms，fully explicit algorithms，and explicit algorithms with implicit treatment of velocity. For implicit algorithms，the optimized OSS21* method significantly improves overshooting tendency and high-frequency dissipation compared to the original scheme，demonstrating superior overall performance among the existing second-order self-starting single-solve implicit integrators. For explicit algorithms，the updating velocity scheme in solving equilibrium equations is optimized by minimizing the sum of squared leading terms of amplitude and phase errors，while four sets of optimal algorithmic parameters are determined based on displacement local truncation error analysis. The improved GSSI* algorithm exhibits smaller relative period errors at the same physical damping ratios，with this advantage becoming more pronounced as damping increases. Moreover，under equivalent dissipation levels，it achieves significantly better period accuracy than the original method. Numerical examples validate the theoretical analysis，confirming the optimized integrators' advantages in accuracy，overshoot，and dissipation performance.

Keywords: time integration method; self-starting; single-solve; identical second-order accuracy; implicit; explicit

结构振动问题在空间离散[1]后退化为时间连续的二阶微分(运动)方程：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{u}}(t),\boldsymbol{u}(t),t) \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{M}$为全局质量矩阵；$\boldsymbol{f}$为内外合力；$\boldsymbol{u}(t)$、$\dot{\boldsymbol{u}}(t)$和$\ddot{\boldsymbol{u}}(t)$分别为节点位移、速度和加速度向量；t表示时间变量。由于式(1)的精确解通常很难获得，因此常使用数值离散技术[2]数值求解式(1)以获得振动问题的结构动响应数据[3]。

逐步时间积分器是求解半离散运动微分方程的有效数值技术之一，且一直受到国内外学者[4-11]的关

收稿日期：2025-06-23；**修订日期：**2025-08-19

基金项目：国家自然科学基金资助项目(12502066, 12272105)；国家资助博士后研究人员计划项目(GZC20233464)；中国博士后科学基金资助项目(2024M764165)；黑龙江省博士后资助项目(LBH-Z23153)

注和发展。时域积分器的主要思想是将位移、速度和加速度在任意时刻t都满足二阶微分方程的要求降为只在某些离散时刻t_i ($i\in\mathbb{R}$)满足。在初始时刻t_0处，初始位移和初始速度已知，且将二者代入式 (1) 可计算得到初始加速度。因此，在初始时刻t_0，位移、速度和加速度都已知。时域积分器将t_0时刻的数值解合理且高效地更新到t_1时刻；如此反复，即可求解得到整个时间历程上所有离散时刻处的数值解。文献 [12] 将只需要计算初始加速度就能启动逐步积分进程的时域积分器定义为自启动时域积分器。

若时域积分器将t_n时刻的数值解更新到t_{n+1}时刻的过程中使用了一次二阶微分方程，则在求解线性动力系统时需要求解一次线性代数方程组；而在求解非线性动力系统时需要求解一次非线性代数方程组。若使用 Newton 迭代格式求解该非线性代数方程组，则时域积分器在该步更新内需要求解多次线性代数方程组。因此，时域积分器在每步更新内使用二阶微分方程的次数可以近似评估该积分器的计算量大小。例如，Newmark 法[13] 和两子步 Bathe 法[14] 在每步更新内分别使用了一次和两次二阶微分方程，因此在相同的积分步长内，前者在求解线性或非线性动力系统时计算量更小。文献 [12] 将每步更新内只使用一次二阶微分方程的这类时域积分器定义为单解时域积分器。

HUGHES 等[15]、HILBER 等[16] 给出了自启动单解时域积分器应具备的五点算法属性。结合超调属性，具有竞争性的隐式算法应具备以下特征：自启动、单解、二阶精度、无条件稳定、可控数值高频耗散和零阶超调。然而，文献 [12] 通过构造具有 11 参数的自启动单解时域积分器框架证明了两个定理：

(1) 该框架内的自启动单解隐式算法并不能同时实现一致二阶精度、零阶超调和可控数值高频耗散；即使加速度精度降为一阶，该框架仍不能同时实现零阶超调和可控数值高频耗散。

(2) 该框架内的自启动单解隐式算法不能同时实现二阶的位移和速度、零阶位移和一阶速度超调、可控数值高频耗散。

基于上述定理，文献 [12] 提出了三类自启动、单解和无条件稳定的二阶可控耗散性隐式算法 (OSS10、OSS11 和 OSS21)。这三类算法的差异性主要体现在加速度精度阶数与超调阶数方面：OSS10 算法实现一阶加速度配合一阶位移超调及零阶速度超调，OSS11 算法在一阶加速度精度下同时具备一阶位移和一阶速度超调特性，而 OSS21 算法则达到二阶加速度并兼具二阶位移超调和一阶速度超调特性。通过对比分析表明，相较于具有相同超调阶数的传统隐式算法[17-18]，OSSij 系列算法在无阻尼条件下保持数值误差一致性的同时，在有阻尼条件下展现出更优越的数值精度控制能力。需要指出的是，尽管 OSS21 算法实现了一致二阶精度和可控数值高频耗散，但它存在严重的二阶位移超调。因此，本文将在先前的工作基础[2,12] 上进一步优化 OSS21 算法以降低其超调行为。自启动单解隐式算法的最新进展可参考文献 [12,19]，不在此处赘述。

类比自启动单解隐式算法的六点算法属性，具有竞争性的显式算法[20] 也应该具备自启动、单解、一致二阶精度、尽可能大的条件稳定域、分岔点处可控数值耗散的特征。由于带标量算法参数的显式算法无法实现无条件稳定，因此显式算法的稳定性要求相较于隐式算法改为尽可能大的条件稳定域。同时，显式算法的数值耗散无法在高频处测量 (条件稳定性限制) 而只能在第一分岔点处测量。基于 11 参数的自启动单解时域积分器框架，文献 [20-21] 提出了同时实现上述五点算法属性的最优显式算法 (GSSE/I)。GSSE 算法在二阶微分方程中采用了速度的显式处理，因此它在求解任意动力学问题时都是显式的。尽管中心差分法[22] 在二阶微分方程中使用了速度的隐式处理且无数值耗散能力，但是它仍被广泛使用和讨论。因此，文献 [21] 将 GSSE 算法推广到了速度的隐式处理并因此提出了 GSSI 算法。相较于中心差分法，GSSI 算法不仅实现了分岔点处的可控数值耗散，而且还扩大了条件稳定域 (在特定用户指定参数下超过 2)。自启动单解显式算法的最新进展可参考文献 [23]。基于振幅与相位误差主项的解析计算技术[19]，本文将在 11 参数的自启动单解时域积分器框架内进一步优化 GSSE/I 算法以实现在有阻尼条件下更小的误差。

综上，本文将在已有研究工作的基础上进一步优化和发展实现一致二阶精度的自启动单解隐式和显式算法。隐式算法的优化目标在于实现一致二阶精度和可控数值高频耗散后尽可能地降低其二阶超调行为，而显式算法的优化目标在于实现一致二阶精度和分岔点处可控数值耗散后降低振幅与相位误差主项。

1 自启动单解时域积分器框架

对于线性结构振动，二阶微分方程 (1) 可以简化为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{F}(t) \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{K}$分别表示全局质量、阻尼和刚度矩阵；$\boldsymbol{F}(t)$表示已知的外力荷载。初始条件给定为：

$$\boldsymbol{u}(t_0)=\boldsymbol{u}_0,\quad \dot{\boldsymbol{u}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{u}}_0 \tag{3}$$

式中，t_0表示初始时刻。由初始时刻的式 (2) 可求解得到初始加速度$\ddot{\boldsymbol{u}}_0$，即

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}_0=\boldsymbol{F}(t_0)-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}_0-\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_0 \tag{4}$$

文献 [2,12] 构造了自启动单解时域积分器框架。首先, 利用t_n时刻的数值解和t_{n+p}时刻的二阶微分方程求解得到t_{n+p}时刻的加速度$\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+p}$:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+p}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}_{n+p}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{n+p}=\boldsymbol{F}_{n+p} \tag{5a}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{n+p}=\dot{\boldsymbol{u}}_n+\Delta t(\alpha_3\ddot{\boldsymbol{u}}_n+\alpha_4\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+p}) \tag{5b}$$

$$\boldsymbol{u}_{n+p}=\boldsymbol{u}_n+p\Delta t\dot{\boldsymbol{u}}_n+\Delta t^2(\alpha_1\ddot{\boldsymbol{u}}_n+\alpha_2\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+p}) \tag{5c}$$

式中, $p\in\mathbb{R}$和$\alpha_j\in\mathbb{R}$ $(j=1, 2, 3, 4)$为待定的算法参数; Δt为积分步长。然后, 更新t_{n+1}时刻的位移、速度和加速度:

$$\boldsymbol{u}_{n+1}=\boldsymbol{u}_n+\Delta t\dot{\boldsymbol{u}}_n+\Delta t^2(\alpha_5\ddot{\boldsymbol{u}}_n+\alpha_6\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+p}) \tag{5d}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{n+1}=\dot{\boldsymbol{u}}_n+\Delta t(\alpha_7\ddot{\boldsymbol{u}}_n+\alpha_8\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+p}) \tag{5e}$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+1}=\alpha_9\ddot{\boldsymbol{u}}_n+\alpha_{10}\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+p} \tag{5f}$$

式中, $\alpha_j\in\mathbb{R}$ $(j=5, 6, \cdots, 10)$为待定的算法参数。式 (5) 构成了自启动单解时域积分器框架且可以利用扩展的 Butcher 表描述为:

p	α_1	α_2	α_3	α_4		
	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}

(6)

每个自启动单解时域积分器都对应一个具体的 Butcher 表。

文献 [2,12] 已经对该积分算法框架进行了精度分析。该框架实现位移、速度和加速度的一致二阶精度条件为:

$$\begin{aligned}&\alpha_3=p-\alpha_4,\alpha_5=1/2-\alpha_6,\alpha_7=1-1/(2p),\\&\alpha_8=1/(2p),\alpha_9=1-1/p,\alpha_{10}=1/p\end{aligned} \tag{7}$$

参数α_2和α_4决定了时域积分器的显式和隐式属性。当$\alpha_2\neq0$且$\alpha_4\neq0$时, 框架对应了一致二阶精度的隐式算法; 当$\alpha_2=0$且$\alpha_4\neq0$时, 框架对应了一致二阶精度的速度隐式处理的显式算法; 当$\alpha_2=\alpha_4=0$时, 框架对应了一致二阶精度的完全显式算法。

2　隐式算法的优化

当$\alpha_2\neq0$且$\alpha_4\neq0$时, 式 (6) 对应了一致二阶精度的隐式算法。此时, 其 Butcher 表对应修改为:

p	α_1	α_2	$p-\alpha_4$	α_4		
	$\frac{1}{2}-\alpha_6$	α_6	$1-\frac{1}{2p}$	$\frac{1}{2p}$	$1-\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}$

(8)

数值放大矩阵的不变量A_i $(i=0, 1, 2, 3)$在数值高频极限 ($\Omega:=\omega\cdot\Delta t\to\infty$, 其中, ω为单自由度系统的固有频率) 下化简为:

$$\begin{cases}A_3^{\infty}=1\\A_2^{\infty}=\dfrac{2p\alpha_6-6p\alpha_2+p+2\alpha_1+2\alpha_2}{2p\alpha_2}\\A_1^{\infty}=\dfrac{3p\alpha_2-2p\alpha_6+1-2\alpha_1-2\alpha_2}{p\alpha_2}\\A_0^{\infty}=\dfrac{2\alpha_1+2\alpha_2+2p\alpha_6-p-2p\alpha_2}{2p\alpha_2}\end{cases} \tag{9}$$

需要注意的是, 高频极限通常是指数值频率$\Omega\to\infty$, 而非物理频率的极限$\omega\to\infty$。隐式算法实现最优可控数值高频耗散的条件[2,12] 为:

$$A_2^{\infty}=3\rho_{\infty},\quad A_1^{\infty}=3\rho_{\infty}^2,\quad A_0^{\infty}=\rho_{\infty}^3 \tag{10}$$

将式 (9) 代入式 (10) 并求解可得:

$$\begin{cases}p=\dfrac{2-\rho_{\infty}}{1+\rho_{\infty}}\\\alpha_1=\dfrac{2(1+\rho_{\infty})(2-\rho_{\infty})^2\alpha_6+\rho_{\infty}^3-3\rho_{\infty}^2+6\rho_{\infty}-6}{2(1+\rho_{\infty})^2(\rho_{\infty}-2)}\\\alpha_2=\dfrac{1}{(1+\rho_{\infty})^2(2-\rho_{\infty})}\end{cases} \tag{11}$$

式中, $\rho_{\infty}\in[0, 1]$为用户指定参数, 用于控制隐式算法在高频区域内的谱半径值。

目前, 隐式算法的α_4和α_6是未知的。文献 [12] 通过优化位移局部截断误差得到了最优的α_4和α_6参数, 但 OSS21 算法存在严重的位移超调。为了降低超调行为, 本文通过最小化振幅与相位误差确定最优的参数α_4, 通过降低超调响应确定最优的参数α_6。

利用解析计算振幅与相位误差主项的一般性方法[19], 本文隐式算法的振幅δ与相位ε误差可计算为:

$$\begin{cases}\delta=\delta_2\Delta t^2+O(\Delta t^3)\\\varepsilon=\varepsilon_2\Delta t^2+O(\Delta t^3)\end{cases} \tag{12}$$

式中, $O(\Delta t^3)$ 表示所有三阶及其更高阶项的总和; 误差主项δ_2和ε_2分别为:

$$\delta_2=\frac{2(1+\rho_{\infty})(12\rho_{\infty}\alpha_4-24\alpha_4-7\rho_{\infty}+11)\times\xi^2-3\rho_{\infty}(\rho_{\infty}-1)(2\alpha_4-3)+12\alpha_4}{6(1+\rho_{\infty})^2}\xi\omega^3 \tag{13}$$

$$\varepsilon_2=\frac{8(1+\rho_{\infty})(12\rho_{\infty}\alpha_4-24\alpha_4-7\rho_{\infty}+11)\times\xi^4+(64\rho_{\infty}^2-52\rho_{\infty}-44)\xi^2+14\rho_{\infty}-72(\rho_{\infty}+1)(\rho_{\infty}-2)\alpha_4\xi^2-11\rho_{\infty}^2-11}{24(1+\rho_{\infty})^2\sqrt{1-\xi^2}}\omega^3 \tag{14}$$

式中, ξ为单自由度系统的物理阻尼率。

定义误差总量$\Gamma=\delta_2^2+\varepsilon_2^2$并依据文献 [12] 中最小化$\Gamma$的技术得到最优的$\alpha_4$:

$$\alpha_4=\frac{\rho_{\infty}^2+2\rho_{\infty}-11}{8(\rho_{\infty}+1)(\rho_{\infty}-2)} \tag{15}$$

需要指出的是, α_4的上述取值也保证了隐式算法在求解线性结构振动时的无条件稳定。

为了分析超调响应, 计算在极限$\Delta t\to\infty$时第一个时间步的数值位移u_1^{∞}为:

$$u_1^{\infty}\approx c_2\ddot{u}_0\Delta t^2+c_1\Delta t+c_0 \tag{16}$$

式中, $\ddot{u}_0$为单自由度系统的初始加速度; c_i $(i=0, 1, 2)$为算法和结构参数的表达式且c_2主导了位移的超调

行为。为了降低其超调行为，计算$c_2=0$可得：

$$\alpha_6=\frac{(\sqrt{\rho_\infty^2+8}+\rho_\infty)(1-\rho_\infty)-4}{4(\rho_\infty+1)(\rho_\infty-2)} \tag{17}$$

本文提出了一类自启动单解隐式算法，它实现了一致二阶精度、可控数值高频耗散、无条件稳定、可接受的超调行为、最优的振幅与相位误差主项。上述过程也可以较容易地扩展到隐式算法的三参数版本 (λ_j^∞, $j=1, 2, 3$)，故此处不再赘述。

3 显式算法的优化

当$\alpha_2=0$时，式 (6) 退化为一致二阶精度的显式算法。此时，显式算法的数值放大矩阵的不变量A_i ($i=0, 1, 2, 3$)在分岔点 ($\Omega=\Omega_\mathrm{b}$) 处化简为：

$$\begin{cases}A_3^\mathrm{b}=1\\ A_2^\mathrm{b}=\dfrac{(2\alpha_1+p+2p\alpha_6)\Omega_\mathrm{b}^2+2-6p}{2p}\\ A_1^\mathrm{b}=\dfrac{-(2\alpha_1-1+2p\alpha_6)\Omega_\mathrm{b}^2-2+3p}{p}\\ A_0^\mathrm{b}=\dfrac{(2\alpha_1-p+2p\alpha_6)\Omega_\mathrm{b}^2+2-2p}{2p}\end{cases} \tag{18}$$

显式算法实现分岔点处可控数值耗散的条件[2,12]为：

$$A_2^\mathrm{b}=2\rho_\mathrm{b}+\rho_\mathrm{s},\ A_1^\mathrm{b}=2\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}+\rho_\mathrm{b}^2,\ A_0^\mathrm{b}=\rho_\mathrm{b}^2\rho_\mathrm{s} \tag{19}$$

式中，$0\leqslant|\rho_\mathrm{s}|\leqslant\rho_\mathrm{b}\leqslant1$为两个用户指定参数，用于控制显式算法在稳定域内的数值耗散量。将式 (18) 代入式 (19) 并求解可得：

$$\Omega_\mathrm{b}=\sqrt{(1+\rho_\mathrm{b})(2+\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s})} \tag{20}$$

$$\begin{cases}p=\dfrac{2+\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}}{(1+\rho_\mathrm{b})(1+\rho_\mathrm{s})}\\ \alpha_6=\dfrac{2(1+\rho_\mathrm{b})^2(1+\rho_\mathrm{s})(\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{s}-2)\alpha_1+(1-\rho_\mathrm{b})\rho_\mathrm{s}(\rho_\mathrm{b}^2\rho_\mathrm{s}+\rho_\mathrm{s}+4)+2(\rho_\mathrm{b}+3)}{2(1+\rho_\mathrm{b})(2+\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s})^2}\end{cases} \tag{21}$$

目前，显式算法的α_1和α_4仍是未知的。文献 [20-21] 通过泰勒级数截断选取$\alpha_1=p^2/2$和$\alpha_4=p/2$，但该组取值并未实现误差的最小化。显式算法的振幅与相位误差由式 (12) 表出，其中误差主项分别为：

$$\delta_2=\left[p(\alpha_4+\alpha_6-1)+\alpha_1-\frac{12p\alpha_4-6p+1}{3}\xi^2\right]\xi\omega^3 \tag{22}$$

$$\varepsilon_2=\frac{4(18p\alpha_4+6p\alpha_6-12p+6\alpha_1+1)\xi^2-12\alpha_1-8(12p\alpha_4-6p+1)\xi^4-12p\alpha_6+6p+1}{24\sqrt{1-\xi^2}}\omega^3 \tag{23}$$

式中，p和α_6由式 (21) 给出。由于参数α_4决定了二阶微分方程中预测速度格式的显隐式属性，故需要分以下两类情形：$\alpha_4=0$和$\alpha_4\neq0$。

3.1 完全显式算法

当$\alpha_4=0$时，显式算法采用了速度的显式处理，退化为完全显式算法：

p	α_1	0	p	0	
	$\frac{1}{2}-\alpha_6$	α_6	$1-\frac{1}{2p}$	$\frac{1}{2p}$	$1-\frac{1}{p}$ $\frac{1}{p}$

(24)

式中，p和α_6由式 (21) 给出。

该完全显式算法的振幅与相位误差主项 (δ_2和ε_2) 独立于参数α_1。换句话说，本文无法通过优化振幅或相位误差主项确定参数α_1。

计算显式算法的位移局部截断误差[12]为：

$$\tau_1=(\zeta_1u_n^{(4)}+\zeta_2\xi\omega u_n^{(3)}+\zeta_3\omega^2\ddot{u}_n)\Delta t^2+O(\Delta t^3) \tag{25}$$

式中，$\ddot{u}_n$为单自由度系统的加速度；$u_n^{(k)}$表示位移的k阶导数在t_n时刻的取值且系数ζ_j ($j=1, 2, 3$)为：

$$\begin{cases}\zeta_1=\dfrac{1+6p(1-2\alpha_6)-6p^2}{12p}\\ \zeta_2=\dfrac{1-6p\alpha_6-3p^2}{3p}\\ \zeta_3=\dfrac{2\alpha_1-p^2}{2p}\end{cases} \tag{26}$$

速度和加速度的局部截断误差亦有类似的表达形式，但其系数值独立于参数α_1，因此只能考虑位移的局部截断误差确定参数α_1。

(1) 当通过计算$\zeta_3=0$获得参数α_1时，其值退化为文献 [20] 中的设计思想：

$$\alpha_1=\frac{p^2}{2}=\frac{(2+\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s})^2}{2(1+\rho_\mathrm{b})^2(1+\rho_\mathrm{s})^2} \tag{27}$$

(2) 当通过计算$\zeta_2=0$获得参数α_1时，其值为：

$$\alpha_1=\frac{(5\rho_\mathrm{s}^2+\rho_\mathrm{s}-1)\rho_\mathrm{s}\rho_\mathrm{b}^3-5\rho_\mathrm{s}^3-29\rho_\mathrm{s}^2-(13\rho_\mathrm{s}^3+21\rho_\mathrm{s}^2-3\rho_\mathrm{s}-2)\rho_\mathrm{b}^2-61\rho_\mathrm{s}+(13\rho_\mathrm{s}^3+57\rho_\mathrm{s}^2+51\rho_\mathrm{s}-2)\rho_\mathrm{b}-40}{6(1+\rho_\mathrm{s})^2(1+\rho_\mathrm{b})^2(\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{s}-2)} \tag{28}$$

(3) 当通过计算$\zeta_1=0$获得参数α_1时，其值为：

$$\alpha_1=\frac{(17\rho_\mathrm{s}^2+10\rho_\mathrm{s}-1)\rho_\mathrm{s}\rho_\mathrm{b}^3-5\rho_\mathrm{s}^3-32\rho_\mathrm{s}^2-(31\rho_\mathrm{s}^3+72\rho_\mathrm{s}^2+21\rho_\mathrm{s}-2)\rho_\mathrm{b}^2-79\rho_\mathrm{s}+(19\rho_\mathrm{s}^3+102\rho_\mathrm{s}^2+117\rho_\mathrm{s}+16)\rho_\mathrm{b}-58}{12(1+\rho_\mathrm{s})^2(1+\rho_\mathrm{b})^2(\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{s}-2)} \tag{29}$$

(4) 当定义误差总量$\Gamma=\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2$且通过求解$\partial\Gamma/\partial\alpha_1=0$最小化$\Gamma$时，参数$\alpha_1$计算为：

$$\alpha_1=\frac{3(7\rho_\mathrm{s}^2+2\rho_\mathrm{s}-1)\rho_\mathrm{s}\rho_\mathrm{b}^3-17\rho_\mathrm{s}^3-100\rho_\mathrm{s}^2-(51\rho_\mathrm{s}^3+92\rho_\mathrm{s}^2-\rho_\mathrm{s}-6)\rho_\mathrm{b}^2-213\rho_\mathrm{s}+(47\rho_\mathrm{s}^2+210\rho_\mathrm{s}+119)\rho_\mathrm{s}\rho_\mathrm{b}-142}{24(1+\rho_\mathrm{s})^2(1+\rho_\mathrm{b})^2(\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{s}-2)} \tag{30}$$

需要指出的是, 完全显式算法的数值放大矩阵的特征多项式独立于参数α_1, 因此上述四类不同的α_1取值不影响完全显式算法的谱特点 (谱半径、数值阻尼和相对周期误差)。不同的α_1取值将在求解具体的动力学问题时展现出数值差异。

3.2　速度隐式处理的显式算法

当$\alpha_4 \neq 0$时, 显式算法采用了类似于中心差分法的速度隐式处理, 其 Butcher 表为:

p	α_1	0	$p-\alpha_4$	α_4	
	$\frac{1}{2}-\alpha_6$	α_6	$1-\frac{1}{2p}$	$\frac{1}{2p}$	$1-\frac{1}{p}$　$\frac{1}{p}$

(31)

式中, p和α_6由式 (21) 给出。

式 (22) 和式 (23) 分别给出显式算法的振幅与相位误差主项。定义误差总量$\Gamma=\delta_2^2+\varepsilon_2^2$并依据文献 [12] 中最小化$\Gamma$的技术得到最优的$\alpha_4$:

$$\alpha_4=\frac{\rho_\mathrm{s}(\rho_\mathrm{s}+1)\rho_\mathrm{b}^3+(\rho_\mathrm{s}^2-9\rho_\mathrm{s}-2)\rho_\mathrm{b}^2-(5\rho_\mathrm{s}^2+13\rho_\mathrm{s}-8)\rho_\mathrm{b}+3\rho_\mathrm{s}^2+13\rho_\mathrm{s}+18}{8(1+\rho_\mathrm{b})(\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{s}-2)^2} \tag{32}$$

计算显式算法的位移局部截断误差可得到形如式 (25) 的表达式, 且系数ζ_j (j = 1, 2, 3)为:

$$\begin{cases}\zeta_1=\dfrac{1+6p(1-2\alpha_6)-6p^2}{12p}\\ \zeta_2=\dfrac{1+6p(\alpha_4-\alpha_6)-3p^2}{3p}\\ \zeta_3=\dfrac{2\alpha_1-p^2}{2p}\end{cases} \tag{33}$$

速度和加速度的局部截断误差亦有类似的表达形式, 但其系数值独立于参数α_1, 因此只能考虑位移的局部截断误差确定参数α_1。

(1) 当通过计算$\zeta_3=0$获得参数α_1时, 其值退化为文献 [21] 中的设计思想:

$$\alpha_1=\frac{p^2}{2}=\frac{(2+\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s})^2}{2(1+\rho_\mathrm{b})^2(1+\rho_\mathrm{s})^2} \tag{34}$$

(2) 当通过计算$\zeta_2=0$获得参数α_1时, 其值为:

$$\alpha_1=\frac{(23\rho_\mathrm{s}^2+10\rho_\mathrm{s}-1)\rho_\mathrm{s}\rho_\mathrm{b}^3-11\rho_\mathrm{s}^3-68\rho_\mathrm{s}^2-(49\rho_\mathrm{s}^3+108\rho_\mathrm{s}^2+21\rho_\mathrm{s}-2)\rho_\mathrm{b}^2-151\rho_\mathrm{s}+(37\rho_\mathrm{s}^3+174\rho_\mathrm{s}^2+189\rho_\mathrm{s}+16)\rho_\mathrm{b}-106}{6(1+\rho_\mathrm{s})^2(1+\rho_\mathrm{b})^2(\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{s}-2)} \tag{35}$$

(3) 当通过计算$\zeta_1=0$获得参数α_1时, 其值为:

$$\alpha_1=\frac{(17\rho_\mathrm{s}^2+10\rho_\mathrm{s}-1)\rho_\mathrm{s}\rho_\mathrm{b}^3-5\rho_\mathrm{s}^3-32\rho_\mathrm{s}^2-(31\rho_\mathrm{s}^3+72\rho_\mathrm{s}^2+21\rho_\mathrm{s}-2)\rho_\mathrm{b}^2-79\rho_\mathrm{s}+(19\rho_\mathrm{s}^3+102\rho_\mathrm{s}^2+117\rho_\mathrm{s}+16)\rho_\mathrm{b}-58}{12(1+\rho_\mathrm{s})^2(1+\rho_\mathrm{b})^2(\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{s}-2)} \tag{36}$$

(4) 当定义误差总量$\Gamma=\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2$且通过求解$\partial\Gamma/\partial\alpha_1=0$最小化$\Gamma$时, 参数$\alpha_1$计算为:

$$\alpha_1=\frac{(23\rho_\mathrm{s}^2+10\rho_\mathrm{s}-1)\rho_\mathrm{s}\rho_\mathrm{b}^3-11\rho_\mathrm{s}^3-68\rho_\mathrm{s}^2-(49\rho_\mathrm{s}^3+108\rho_\mathrm{s}^2+21\rho_\mathrm{s}-2)\rho_\mathrm{b}^2-151\rho_\mathrm{s}+(37\rho_\mathrm{s}^3+174\rho_\mathrm{s}^2+189\rho_\mathrm{s}+16)\rho_\mathrm{b}-106}{24(1+\rho_\mathrm{s})^2(1+\rho_\mathrm{b})^2(\rho_\mathrm{b}\rho_\mathrm{s}-\rho_\mathrm{s}-2)} \tag{37}$$

与完全显式算法一样, 速度隐式处理的显式算法的谱特点独立于参数α_1, 因此上述四类不同的α_1取值不影响算法的谱特点。

本节进一步优化了两类自启动单解显式算法: 完全显式算法和速度隐式处理的显式算法。每类显式算法都实现了一致二阶精度、分岔点处可控数值耗散、可接受稳定域、最优的振幅与相位误差主项。通过优化位移局部截断误差, 每类显式算法的参数α_1提供了四种取值, 任取其中一种都不影响显式算法的谱特点。

4　性能比较

近年来, 学者们提出了一些新的自启动单解时域积分器。例如, ZHOU 等[24] 提出的 GSSSS 算法曾被认为实现了最优性能, 但 MAXAM 等[17] 随后指出其超调分析存在问题并提出了改进的 V0*算法。ZHANG[18] 提出了一类十六参数的单步单解隐式积分族 (OESS)。李金泽等[12] 则提出并优化了三类具有不同超调阶数的隐式积分算法 (OSSij), 并已证实 OSSij 算法在性能上优于 V0*法[17]、OESS 法[18] 和 TPO/G-α法[25-26]。因此, 本文所提出的隐式和显式积分器在性能上自然延续了 OSSij 的优势, 对新近方法亦保持竞争力。为了保持简洁性, 本节未再将这些新近方法纳入数值比较。

本节将展示优化的隐式和显式时间积分法的性能优势, 比如隐式算法在实现一致二阶精度和可控数值高频耗散后较低的超调响应。

4.1　隐式算法

图 1 比较了隐式算法在有阻尼 (ξ = 0.1) 时的谱特点。被比较的隐式算法均实现了一致二阶精度。Wilson 平均法[27-28] 和 Wilson-θ法[29] 无法实现可控数值耗散; 尽管样条插值加权残量法 (SW32)[30] 实现了可控数值高频耗散能力, 但它在有阻尼时不能在$\rho_\infty\in[0,1]$内实现无条件稳定, 如图 1(a) 中$\rho_\infty=1$情形。由于 OSS21 法[12] 与本文改进的 OSS21*算法具有相同的谱特点, 故图 1 中未重复比较 OSS21 算

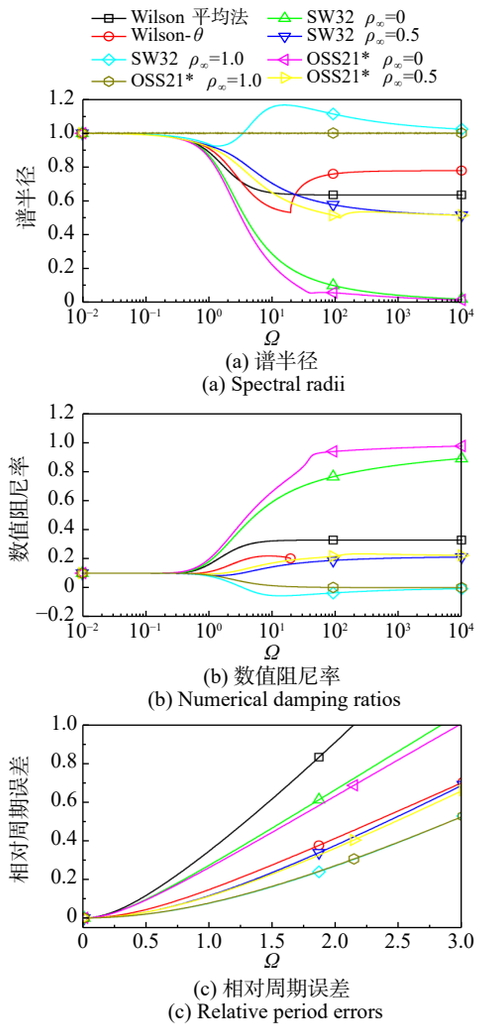


图 1 隐式算法的谱特点

Fig. 1 Spectral properties of implicit algorithms

法的谱特点。图 1 表明，OSS21*算法不仅实现了无条件稳定和可控数值高频耗散，而且在相同高频耗散量时具有更小的相对周期误差。

图 2 比较了隐式算法在有阻尼 ($\xi = 0.1$) 时的超调响应。由于 SW32 法[30] 在有阻尼时并不能在整个耗散范围内实现无条件稳定，故图 2 未比较其超调响应。图 2 表明，原始的 OSS21 法[12] 存在严重的位移和速度超调行为。尽管 OSS21 法在$\rho_\infty = 1$时存在非常剧烈的超调响应，但其数值解仍稳定。此外，两类 Wilson 法也存在较为明显的超调响应。对比已有算法，本文改进的 OSS21*法的确有效降低了原 OSS21 法的超调响应，达到了优化目标。

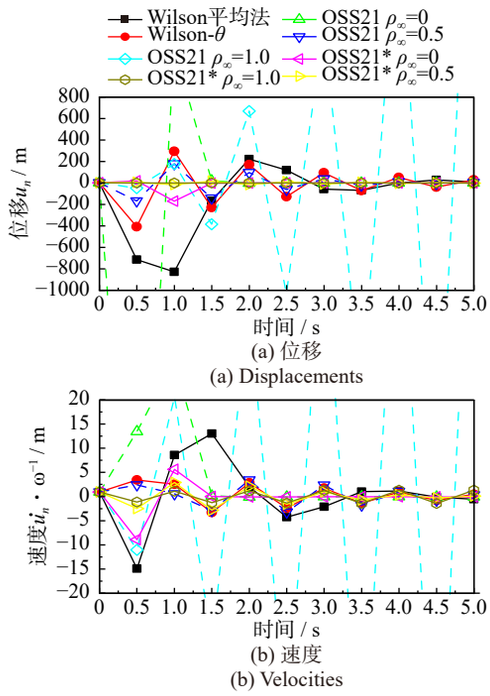


图 2 隐式算法的超调响应

Fig. 2 Overshooting responses of implicit algorithms

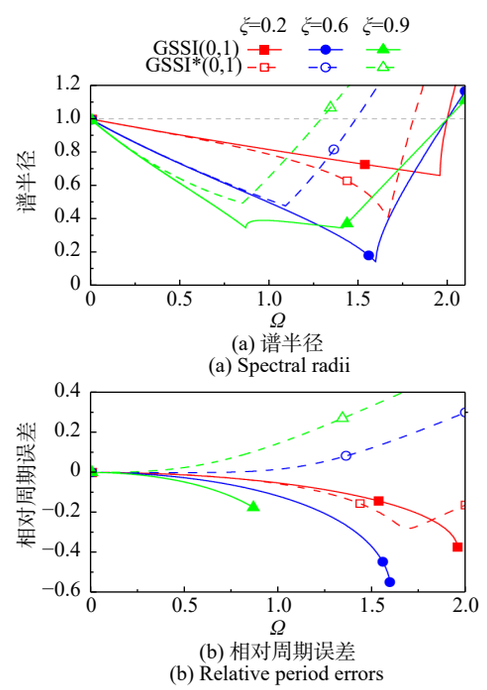


图 3 GSSI(0, 1) 显式算法

Fig. 3 GSSI(0, 1) explicit algorithm

4.2 显式算法

文献 [23] 已经表明 GSSE/I 法在现有自启动单解显式积分法中的显著优势；GSSE 法的谱特点独立于参数α_1，导致其优化前后具有相同的谱特点。因此，本小节重点比较 GSSI 显式算法的谱特点。

图 3 比较了 GSSI(0, 1) 算法在三组不同物理阻尼率下的谱半径和相对周期误差。由图可知，改进的 GSSI*法的条件稳定域随物理阻尼率的增加而逐渐减小；作为优化目标，改进的 GSSI*法在相同物理阻尼率下提供了比原始 GSSI 法更小的相对周期误差；其周期误差的优势随阻尼率的增加而增大。

图 4 比较了 GSSI(0, ρ_b) 法在三组不同耗散量和物理阻尼率 ($\xi = 0.9$) 下的谱半径和相对周期误差。由图 4(a) 可知，改进的 GSSI*法的条件稳定域随ρ_b的减小而增加；且原始的 GSSI 法能突破中心差分法的稳定域限制，给出超过 2 的条件稳定域。图 4(b) 表明，

在相同的数值耗散量下，改进的 GSSI*法给出了比原始 GSSI 法明显更小的相对周期误差，达到了优化目标。

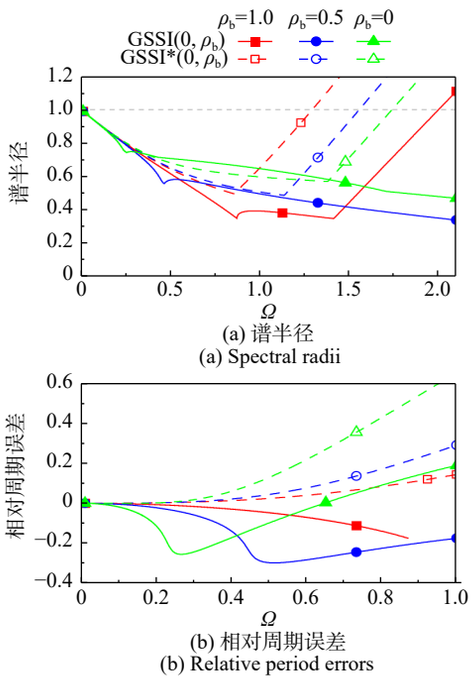


图 4　GSSI(0, ρ_b) 显式算法

Fig. 4　GSSI(0, ρ_b) explicit algorithm

5　数值算例

本节将通过两个典型算例分别验证本文隐式和显式算法的性能。数值试验均在笔记本电脑 (Intel (R) Core(TM) i9-10885H CPU @2.40 GHz) 上使用 Julia 编程语言[31] 执行。

5.1　两自由度线性系统

两自由度系统[12,18] 常被用于刻画大型复杂结构的特性：同时包含重要的低频和虚假的高频模态。两自由度系统的表达式如下：

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \xi_1+\xi_2 & -\xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_2+\xi_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

式中，u_1 和 u_2 表示两个自由度系统的坐标；m_1=m_2=1 kg；k_1=10^7 N/m；k_2=1 N/m；ξ_1=316.23 N/(m/s)；ξ_2=3.1623×10^{-5} N/(m/s)；ξ_3=9.9968×10^{-2} N/(m/s)；f_1=10^7sin(1.2t) N，f_2=0 N。初始条件为 0 且积分步长 Δt 取为 0.2618 s。利用模态叠加法[32] 求解式 (38) 的稳态解并作为参考解。

图 5(a) 比较了四类一致二阶精度的隐式算法在节点 1 处预测的位移。可以发现，在前几个时间步，两类 Wilson 法都呈现了明显的虚假振动；OSS21 法也在 $t\in$ [0.5, 4] s内产生了明显的虚假振动。图 5(a) 表明，本文优化后的 OSS21*法给出了最好的数值解。图 5(b) 分析了减少ρ_∞值进而增加数值高频耗散量的影响。很明显，OSS21*法仍然给出了最好的预测值。由于数值高频耗散量的增加，OSS21*法在图 5(b) 中也产生了较为明显的振幅误差。

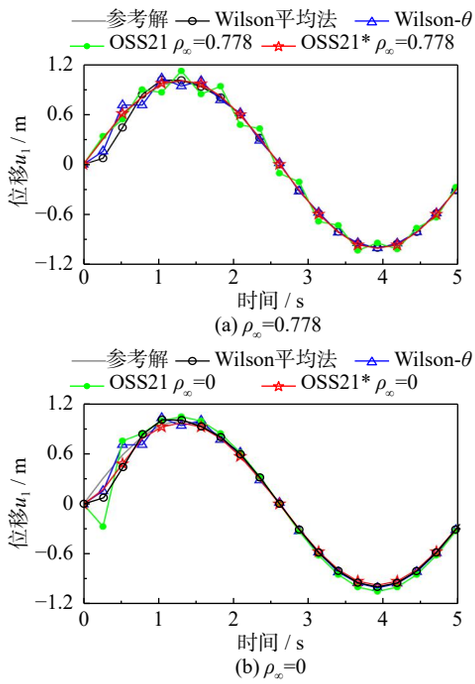


图 5　隐式算法在节点 1 处预测的位移

Fig. 5　Displacements at node 1 predicted by implicit algorithms

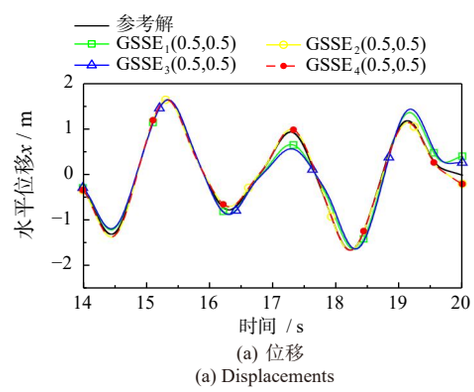
5.2　非线性弹簧摆

受重力作用的小球在 xoy 平面内运动，其二阶微分方程可写为：

$$\begin{aligned} &m\ddot{x}+k(l-l_0)x/l=0,\\ &m\ddot{y}+k(l-l_0)y/l=mg \end{aligned} \tag{39}$$

式中，m = 1 kg；k = 30 N/m；g = 10 m/s^2；l_0 = 1 m；$l=\sqrt{x^2+y^2}$。小球初始速度为 0；初始水平和竖向位移分别为 1.5 m 和 0 m。高阶 SUCIn 法[33] 在 $\Delta t=1.0\times10^{-3}$ s 时预测的数值解作为参考解。

为了区分 GSSE 算法选取的四种不同参数α_1，本文使用下标数字 (1~4) 分别表示由式 (27)~(30) 计算得到的参数α_1。图 6 比较了四类不同 GSSE 算法在



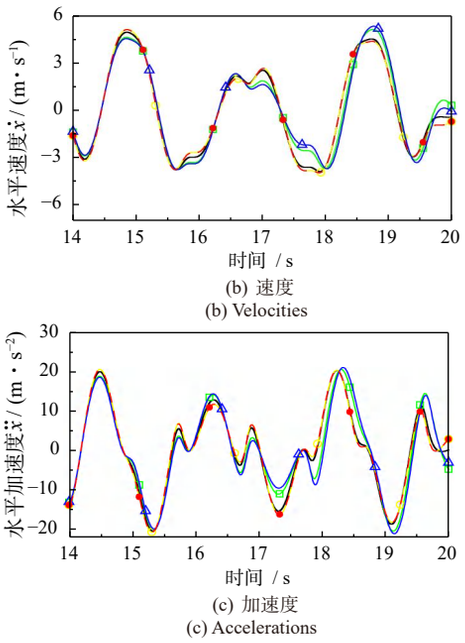


图 6 显式算法在水平方向上预测的数值解

Fig. 6 Numerical solutions predicted by explicit algorithms at the horizontal direction

$\Delta t = 0.01$ s时预测的水平位移、速度和加速度解。$GSSE_2$ 和 $GSSE_4$ 预测了最接近参考解的响应，其次是 $GSSE_1$，最差的是 $GSSE_3$。由此可知，通过重新优化 GSSE/I 法的参数 α_1 的确可以在不增加计算量的前提下获得性能提高。

隐式的 OSS21 和 OSS21*法在求解该问题时预测的数值解差异不大，故不再赘述。

6 结 论

利用振幅、相位误差主项和位移局部截断误差主项的解析计算技术，本文进一步优化了自启动单解时域积分器框架在实现一致二阶精度后的隐式算法 (OSS21)、完全显式算法 (GSSE) 和速度隐式处理的显式算法 (GSSI)。

(1) 隐式的 OSS21 法在实现一致二阶精度和可控数值高频耗散后剩余两个待定参数：α_4 和 α_6。本文通过优化振幅与相位误差主项的平方和获得了最优的 α_4 值而通过降低初始时间步的位移超调确定了参数 α_6。

(2) 完全显式的 GSSE 法在实现一致二阶精度和分岔点处可控耗散后剩余一个待定参数 α_1。由于振幅与相位误差主项独立于该参数，故本文只能通过优化位移局部截断误差确定四组最优的 α_1 值；且第一组取值覆盖了原始的 GSSE 法。

(3) 速度隐式处理的 GSSI 法在实现一致二阶精度和分岔点处可控耗散后剩余两个待定参数：α_1 和 α_4。本文通过优化振幅与相位误差主项的平方和获得了最优的 α_4 值而通过优化位移局部截断误差确定了四组最优的 α_1 值。由于参数 α_4 的差异，优化得到的四组最优 α_1 值并未覆盖原始的 GSSI 法。

数值分析表明：本文 OSS21*法较原始 OSS21 法的确得到了更弱的超调趋势和更好的高频耗散能力；本文 GSSI*法的条件稳定域随物理阻尼率的增加而逐渐减小，但在相同物理阻尼率下提供了比原始 GSSI 法更小的相对周期误差且周期误差的优势随阻尼率的增加而增大；在相同耗散量下，本文 GSSI*法给出了比原始 GSSI 法明显更小的相对周期误差。

参考文献：

[1] HUGHES T J R. The Finite Element Method：Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis[M]. Mineola：Dover，2000.

[2] 李金泽. 结构动力学问题自启动逐步时间积分算法的设计与分析 [D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2023.
LI Jinze. Design and analysis of self-starting step-by-step time integration algorithms for structural dynamics[D]. Harbin：Harbin Institute of Technology，2023.

[3] 苏日泰，李卓，姜皓. 固体火箭发动机高空模拟试验仿真与模型优化研究 [J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版)，2024，43(1)：23-29.
SU Ritai，LI Zhuo，JIANG Hao. Solid rocket engine high altitude test simulation and modelling optimization[J]. Journal of Inner Mongolia University of Technology (Natural Science Edition)，2024，43(1)：23-29.

[4] 邓子辰，张凯，李庆军，等. 超大型航天结构动力学与控制的保辛方法 [J]. 计算力学学报，2024，41(1)：108-117.
DENG Zichen，ZHANG Kai，LI Qingjun，et al. Reviews on symplectic method for dynamics and control of ultra-large space structures[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics，2024，41(1)：108-117.

[5] 彭海军，王磊，王昕炜，等. 计算最优控制辛数值方法 [J]. 计算力学学报，2024，41(1)：47-57.
PENG Haijun，WANG Lei，WANG Xinwei，et al. Computational symplectic numerical methods for optimal control[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics，2024，41(1)：47-57.

[6] GAO Z D，ZHAO M，EL NAGGAR M H，et al. High-order accurate composite explicit time integration methods based on cubic B-splines interpolation for solving dynamic problems[J]. Computers and Geotechnics，2025，185：107366.

[7] 李鸿晶. 非线性动力学问题的时步群积分算法 [J/OL]. 振动工程学报，1-9[2025-06-23]. https://link.cnki.net/urlid/32.1349.TB.20250113.0950.002.
LI Hongjing. Time-step group integration algorithm for nonlinear structural dynamics[J/OL]. Journal of Vibration Engineering，1-9[2025-06-23]. https://link.cnki.net/urlid/32.1349.TB.20250113.0950.002.

[8] MALAKIYEH M M，SHOJAEE S，HAMZEHEI-JAVARAN S. A novel explicit-implicit time integration method for solving time-dependent finite element equation：the versa-δ method[J]. Computers & Structures，2025，309：107664.

[9] 李金泽，刘耀坤，崔乃刚，等. 一致二阶精度的自启动单

解时域积分器 [J]. 力学学报，2025，57(3)：767-781.
LI Jinze，LIU Yaokun，CUI Naigang，et al. The self-starting single-solve time integrators with identical second-order accuracy[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2025，57(3)：767-781.

[10] 季明辉，秦建国，弓海霞，等. 水下法兰连接器密封结构优化设计研究 [J]. 内蒙古工业大学学报 (自然科学版)，2024，43(4)：323-329.
JI Minghui，QIN Jianguo，GONG Haixia，et al. Optimization design of sealing structure for subsea flange connectors[J]. Journal of Inner Mongolia University of Technology (Natural Science Edition)，2024，43(4)：323-329.

[11] LI J Z，CUI N G，ZHU Y J，et al. Novel implicit integration algorithms with identical second-order accuracy and flexible dissipation control for first-order transient problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2025，126(3)：e7639.

[12] 李金泽，刘耀坤，崔乃刚，等. 结构动力学自启动单解隐式积分器的分析与优化 [J/OL]. 振动工程学报，1-20[2025-06-23]. https://link.cnki.net/urlid/32.1349.TB.20250116.1638.003.
LI Jinze，LIU Yaokun，CUI Naigang，et al. Analysis and optimization on self-starting single-solve implicit integrators for structural dynamics[J/OL]. Journal of Vibration Engineering，1-20[2025-06-23]. https://link.cnki.net/urlid/32.1349.TB.20250116.1638.003.

[13] NEWMARK N M. A method of computation for structural dynamics[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division，1959，85(3)：67-94.

[14] LEE C J，BATHE K J，NOH G. Stability of the Bathe implicit time integration methods in the presence of physical damping[J]. Computers & Structures，2024，295：107294.

[15] HUGHES T J R. Analysis of Transient Algorithms with Particular Reference to Stability Behavior[M]//Computational Methods for Transient Analysis：Vol 1. Amsterdam，North-Holland，1983：67-155.

[16] HILBER H M，HUGHES T J R. Collocation，dissipation and ‘overshoot’ for time integration schemes in structural dynamics[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics，1978，6(1)：99-117.

[17] MAXAM D J，TAMMA K K. A re-evaluation of overshooting in time integration schemes：The neglected effect of physical damping in the starting procedure[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2022，123(12)：2683-2704.

[18] ZHANG J. Optimal implicit single-step time integration methods with equivalence to the second-order-type linear multistep methods for structural dynamics：accuracy analysis based on an analytical framework[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2024，418：116503.

[19] LI J Z，LI H，LIAN Y W，et al. On designing and developing single-step second-order implicit methods with dissipation control and zero-order overshoots via subsidiary variables[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2023，124(22)：4880-4940.

[20] LI J Z，YU K P，LI X Y. An identical second-order single step explicit integration algorithm with dissipation control for structural dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2021，122(4)：1089-1132.

[21] ZHAO R，LI J Z，YU K P. A self-starting dissipative alternative to the central difference methods[J]. Archive of Applied Mechanics，2023，93(2)：571-603.

[22] FOX L，GOODWIN E T. Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society，1949，45(3)：373-388.

[23] 李金泽，刘耀坤，于开平，等. 自启动单解显式时间积分器的研究进展及性能评估 [J]. 力学进展，2025，55(2)：288-339.
LI Jinze，LIU Yaokun，YU Kaiping，et al. Research progress and performance evaluations for self-starting single-solve explicit time integrators[J]. Advances in Mechanics，2025，55(2)：288-339.

[24] ZHOU X，TAMMA K K. Design，analysis，and synthesis of generalized single step single solve and optimal algorithms for structural dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2004，59(5)：597-668.

[25] 邵慧萍，蔡承文. 结构动力学方程数值积分的三参数算法 [J]. 应用力学学报，1988，5(4)：76-81.
SHAO Huiping，CAI Chengwen. A three parameters algorithm for numerical integration of structural dynamic equations[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics，1988，5(4)：76-81.

[26] CHUNG J，HULBERT G M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation：the generalized-α method[J]. Journal of Applied Mechanics，1993，60(2)：371-375.

[27] WILSON E L. A computer program for the dynamic stress analysis of underground structure：No. 68-1[R]. Berkeley：University of California，1968.

[28] WILSON E. Elastic dynamic response of axisymmetric structures：No. 69-2[R]. Berkeley：University of California，1969.

[29] WILSON E L，FARHOOMAND I，BATHE K J. Nonlinear dynamic analysis of complex structures[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics，1972，1(3)：241-252.

[30] 蔡承文，恽馥，刘明杰. 结构动响应的样条插值加权残量算法 [J]. 上海力学，1991，12(2)：53-61.
CAI Chengwen，YUN Fu，LIU Mingjie. An algorithm for the dynamic response of structures based upon the spline interpolation and weighted residuals method[J]. Chinese Quarterly of Mechanics，1991，12(2)：53-61.

[31] BEZANSON J，EDELMAN A，KARPINSKI S，et al. Julia：a fresh approach to numerical computing[J]. SIAM Review，2017，59(1)：65-98.

[32] GÉRADIN M，RIXEN D. Mechanical Vibrations：Theory and Application to Structural Dynamics[M]. 3rd ed. Chichester：Wiley，2015.

[33] LI J Z，LI H，YU K P，et al. High-order accurate multi-substep implicit integration algorithms with dissipation control for hyperbolic problems[J]. Archive of Applied Mechanics，2024，94(8)：2285-2334.

第一作者：李金泽（1994—），男，博士，副研究员。
E-mail：pinkie.ljz@hit.edu.cn

通信作者：于开平（1968—），男，博士，教授。
E-mail：yukp@hit.edu.cn

脉冲子结构与模态子结构混合空间子结构综合法

王虎寅[1]，丁 晟[2,3]，王博曦[1]，李启明[1]，何 欢[2,3]

（1. 中国航空工业集团公司沈阳飞机设计研究所，辽宁 沈阳 110035；
2. 南京航空航天大学航空航天结构力学及控制全国重点实验室，江苏 南京 210016；
3. 南京航空航天大学振动工程研究所，江苏 南京 210016）

摘要：机-弹耦合系统在着陆阶段会经历短时冲击过程，采用传统有限元方法对该过程进行仿真分析往往存在模型规模庞大的问题，并且在进行模型对接时还具有模型传递壁垒的问题。脉冲子结构法（IBS）在处理瞬态动响应分析问题时具有较强的适用性，但该方法在生成脉冲响应函数矩阵时会耗费大量计算资源。因此，本文对传统的脉冲子结构法加以扩展，提出一种脉冲子结构与模态域子结构混合空间的子结构综合方法（IBS-CB），并建立了一种适用于该方法的主模态选取准则。通过机-弹耦合系统着陆动力学数值算例分析，验证了本文所提多域子结构综合法的有效性，计算结果显示本方法在保持高精度的同时可以大幅提高计算效率。

关键词：混合空间；模态综合法；脉冲子结构；着陆回收；冲击
中图分类号：TB12；TH113.1 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202509047

Hybrid coordinates synthesis method of impulse-based substructure and component mode substructure

WANG Huyin[1], DING Sheng[2,3], WANG Boxi[1], LI Qiming[1], HE Huan[2,3]

（1.AVIC Shenyang Aircraft Design Institute，Shenyang 110035，China；2.State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China；
3.Institute of Vibration Engineering Research，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China）

Abstract: The aircraft-missile coupling system undergoes a short-duration impact process during the landing phase. When simulating and analyzing this process using the traditional finite element method，there often exist problems such as the large scale of the finite element model and model transfer barriers between different departments. The impulse-based substructure (IBS) method demonstrates strong applicability in handling transient dynamic response analysis problems，but this method consumes substantial computational resources when generating the impulse response function matrix. Therefore，this paper extends the traditional impulse-based substructure method，proposes a hybrid coordinates substructure synthesis method combining impulse-based substructure and modal-domain substructure (IBS-CB)，and establishes a dominant mode selection criterion suitable for this method. Through a numerical case study on the landing dynamics of the aircraft-missile coupling system，the effectiveness of the multi-domain substructure synthesis method proposed in this paper is verified. The calculation results show that this method can significantly improve computational efficiency while maintaining high accuracy.

Keywords: hybrid coordinates; component mode synthesis; impulse-based substructure; landing and recovery; shock

动态子结构综合法是一类模型自由度降阶方法，因其能够有效缩小大型复杂结构仿真计算规模，且在模型传递、多级组装部件动特性估计等方面具有优势，得到了学术界和工程界的广泛关注。

1960 年，HURTY[1] 提出了子结构模态综合法的基本概念。根据子结构边界自由度是否有约束，模态综合法又可划分为固定界面模态综合法和自由界面模态综合法[2-7]。此后，在结构动力学领域中不断有模态综合法方面的研究成果问世，以固定界面模态综合法为例，其典型代表如 Craig-Bampton 法（CB 法）和 Craig-Chang 法（CC 法），在汽车[8]、航空航天[9-11]、土木桥梁[12-13]、海洋平台[14] 的动态力学性能分析方面得到了广泛应用。此外，在跨学科领域，模态综合法也发挥了重要作用。例如，YUAN 等[15] 提出了一种自适应模态综合法，用于分析具有微滑移运动的摩擦界面连接组装结构动力学；TIAN 等[16] 将模态综

收稿日期：2025-09-19；**修订日期：**2025-10-14
基金项目：国家自然科学基金资助项目（12572393）

合法用于气动伺服弹性模型降阶，结合离散阵风载荷的非定常气动力模型研究超声速非线性气动伺服弹性行为；YAO 等[17] 提出了一种基于固定界面综合法的流固耦合问题对称化方法，对流固耦合系统的耦合振动特性进行了分析。文献 [5,18-21] 将模态综合法应用于模型修正、非线性动力学和转子动力学领域，大幅改善了分析效率。为满足对一般黏性阻尼系统的模型规模减缩和分析需求，还有在复数域内进行子结构综合的模态综合法[4,22-23]。上述子结构综合一般在频域内完成，采用综合模型完成模态分析，然后转换到时域内进行动响应求解。

文献 [24-25] 提出的脉冲子结构综合法（IBS 法）是一类典型的时域子结构综合法，利用脉冲响应函数矩阵和子结构界面协调条件，构造出可直接在时间域内完成自由度减缩的综合模型，适用于小阻尼情况下的系统瞬态响应分析[26]。文献 [26-28] 将脉冲子结构综合法引入刚柔耦合动力学系统，用于月球探测器软着陆的仿真计算。陈树霖等[29] 将脉冲子结构综合法应用于月球探测器结构优化设计问题中，并考虑了不确定性因素的影响[30]。CRAIG 等[2] 通过将脉冲子结构法与 Newmark 法及广义 α 法相比较，在理论上说明了 IBS 法的精度与稳定性。

虽然脉冲子结构法非常适用于线性瞬态动响应问题的分析，但是作为构造脉冲子结构的重要步骤，生成脉冲响应函数矩阵，也是耗费计算资源最大的步骤。若结构涉及到设计改进或迭代，则需要在每一次改进或迭代环节，重新生成新的脉冲响应函数矩阵。因此，探索能够减小计算量的算法是非常有价值的。

固定界面模态综合技术，是一类广泛应用的自由度减缩技术，能够将物理空间坐标由模态空间的少量模态坐标表示出来，可以大幅降低模型计算规模。然而，在模态域内分析系统冲击响应的过程中，由于降阶模型仅保留部分模态信息，它只能被视为原始模型的近似。同时，模态综合法的求解精度极大依赖于所保留的主模态，对于模态频率密集且结构复杂的系统模型，使用模态综合技术进行降阶可能会导致间接成本上升，反而得不偿失。

本文在脉冲子结构综合法的基础上，引入模态综合法将物理空间中的子结构变换到模态空间中，实现对模型的进一步降阶。然后，将模态空间的子结构运动微分方程和保留在物理空间中的脉冲子结构运动微分方程进行综合，生成包含物理空间和模态空间的混合空间动力学模型。并针对其特点，建立一种适用于该方法的主模态选取准则。最后，通过数值算例验证本文方法的准确性。

1　脉冲子结构综合方程

考虑 N 自由度结构，其运动微分方程可表示为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}(t) \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别为系统质量、阻尼和刚度矩阵；$\boldsymbol{F}(t)$ 为力向量；$\boldsymbol{u}$ 为由各自由度的位移构成的向量。

若该结构为系统的某个子结构，则外部激励可按边界自由度和内部自由度进行分割，表示为：

$$\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{g}(t) \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{f}(t)$ 和 $\boldsymbol{g}(t)$ 分别为内部自由度受到的外部激励和边界自由度受到的来自与之相连的其他子结构作用的界面力。

式 (1) 可由 Duhamel 积分求解：

$$\boldsymbol{u}(t)=\int_0^t \boldsymbol{H}(t-\tau)(\boldsymbol{f}(\tau)+\boldsymbol{g}(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{H}(t)$ 为单位脉冲响应矩阵；t 为积分上限，表示当前输出的时刻；τ 为积分变量，表示 t 时刻之间的某一微小时刻。

通过布尔矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可抽取子结构边界自由度 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$：

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{4}$$

引入拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 表示连接处的界面力，以刚性连接的 a、b 两个子结构为例，应满足位移连续性条件和界面力协调条件：

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{a}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{0} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{a}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\ ,\ \ \boldsymbol{g}^{\mathrm{b}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{6}$$

由式 (3)~(6) 可将整个系统的运动表示为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}^{\mathrm{a}}=\int_0^t \boldsymbol{H}^{\mathrm{a}}(t-\tau)\left[\boldsymbol{f}^{\mathrm{a}}(\tau)+(\boldsymbol{B}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{b}}=\int_0^t \boldsymbol{H}^{\mathrm{b}}(t-\tau)\left[\boldsymbol{f}^{\mathrm{b}}(\tau)+(\boldsymbol{B}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{a}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{7}$$

图 1 给出了脉冲子结构法的基本原理图。

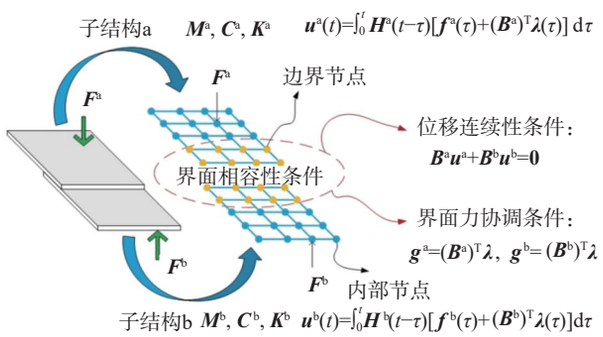


图 1　脉冲子结构法的基本原理图

Fig. 1　Basic theory of impulse-based substructure method

对于式 (7) 中的卷积积分，可以采用一阶牛顿-科茨闭型积分公式对其进行时间离散，以子结构 α 为例，有：

$$\boldsymbol{u}_n^{\alpha}=\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{H}_{n-i}^{\alpha}\left[\boldsymbol{F}_i^{\alpha}+\boldsymbol{F}_{i+1}^{\alpha}+(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_i+(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{i+1}\right]\frac{\Delta t}{2} \tag{8}$$

式中，下标“n”和“i”分别表示该物理量处在 $n\Delta t$ 和 $i\Delta t$ 时刻；Δt 为时间步长。

进一步得到 $n\Delta t$ 时刻子结构 α 的位移响应与连接力的递推式：

$$\boldsymbol{u}_n^{\alpha}=\sum_{i=0}^{n-2}\boldsymbol{H}_{n-i}^{\alpha}\left[\boldsymbol{F}_i^{\alpha}+\boldsymbol{F}_{i+1}^{\alpha}+(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_i+(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{i+1}\right]\frac{\Delta t}{2}+\boldsymbol{H}_1^{\alpha}\left[\boldsymbol{F}_{n-1}^{\alpha}+\boldsymbol{F}_n^{\alpha}+(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{n-1}+(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_n\right]\frac{\Delta t}{2}\tag{9}$$

记预测位移为：

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{n-1}^{\alpha}=\sum_{i=0}^{n-2}\boldsymbol{H}_{n-i}^{\alpha}\left[\boldsymbol{F}_i^{\alpha}+\boldsymbol{F}_{i+1}^{\alpha}+(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_i+(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{i+1}\right]+\boldsymbol{H}_1^{\alpha}\left[\boldsymbol{F}_{n-1}^{\alpha}+\boldsymbol{F}_n^{\alpha}+(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{n-1}\right]\tag{10}$$

则式(9)可以表示为：

$$\boldsymbol{u}_n^{\alpha}=\tilde{\boldsymbol{u}}_{n-1}^{\alpha}\frac{\Delta t}{2}+\boldsymbol{H}_1^{\alpha}(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_n\frac{\Delta t}{2}\tag{11}$$

同理，对于子结构 β 也有：

$$\boldsymbol{u}_n^{\beta}=\tilde{\boldsymbol{u}}_{n-1}^{\beta}\frac{\Delta t}{2}+\boldsymbol{H}_1^{\beta}(\boldsymbol{B}^{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_n\frac{\Delta t}{2}\tag{12}$$

将式(11)和(12)代入式(7)的第3行，可以得到 $n\Delta t$ 时刻的界面力表达式：

$$\boldsymbol{\lambda}_n=-\left[\boldsymbol{B}^{\alpha}\boldsymbol{H}_1^{\alpha}(\boldsymbol{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\beta}\boldsymbol{H}_1^{\beta}(\boldsymbol{B}^{\beta})^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{\alpha}\tilde{\boldsymbol{u}}_{n-1}^{\alpha}+\boldsymbol{B}^{\beta}\tilde{\boldsymbol{u}}_{n-1}^{\beta}\right)\tag{13}$$

在实际工程中，通常只关注部分关键自由度的响应数据，而式(7)中却给出了全部自由度的响应。为了进一步节约计算资源，在进行数值模拟时只需要保留边界自由度、关注点自由度以及外激励作用的自由度即可。将脉冲子结构的输入自由度 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}$ 与输出自由度 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{O}}$ 按边界自由度、关注点自由度和外激励自由度进行分割，得：

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{O}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\end{pmatrix}\tag{14}$$

式中，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}$ 和 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}$ 分别为保留边界自由度、关注点自由度和外激励自由度对应的位移向量。

重新构造降阶后的子结构布尔矩阵：

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{f}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\end{bmatrix}\tag{15}$$

式中，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}$、$\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{f}}$ 分别为 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}$、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}$ 和 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}$ 的布尔矩阵的分块表达式。

将脉冲响应函数矩阵也按同样的方式进行分割，并在脉冲响应函数矩阵中删除与输入、输出自由度无关的行和列，得到脉冲响应函数矩阵 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{OI}}$：

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{OI}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{\mathrm{hf}} & \boldsymbol{H}_{\mathrm{hc}}\\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{cf}} & \boldsymbol{H}_{\mathrm{cc}}\end{bmatrix}\tag{16}$$

在外激励向量里，类似地划去与输入自由度无关的元素，整理得：

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_{\mathrm{f}}\\ \boldsymbol{f}_{\mathrm{c}}\end{pmatrix}\tag{17}$$

根据式(14)~(17)，结合式(7)可得自由度减缩后的脉冲子结构响应：

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{a}}=\int_0^t\boldsymbol{H}_{\mathrm{OI}}^{\mathrm{a}}(t-\tau)\left[\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{a}}(\tau)+(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{b}}=\int_0^t\boldsymbol{H}_{\mathrm{OI}}^{\mathrm{b}}(t-\tau)\left[\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{b}}(\tau)+(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{a}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{18}$$

2 基于模态综合的脉冲子结构降阶

第1节中给出的脉冲子结构法的核心思路是获取系统的单位脉冲响应函数矩阵，这是整个计算流程中最耗时的部分。特别是对结构进行多次改进时，每次结构改进都需要重新计算脉冲响应函数矩阵，这将显著增加计算成本。为解决该问题，有必要对计算规模进行进一步减缩。

由此，引入模态综合技术，进一步减缩脉冲子结构的自由度。

首先，将整个系统进行分割，取其中一个子结构，按内部自由度和边界自由度进行分割，可将式(2)重新表示为：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{oo} & \boldsymbol{M}_{oc}\\ \boldsymbol{M}_{co} & \boldsymbol{M}_{cc}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\boldsymbol{u}}_o\\ \ddot{\boldsymbol{u}}_c\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{oo} & \boldsymbol{C}_{oc}\\ \boldsymbol{C}_{co} & \boldsymbol{C}_{cc}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{u}}_o\\ \dot{\boldsymbol{u}}_c\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{oo} & \boldsymbol{K}_{oc}\\ \boldsymbol{K}_{co} & \boldsymbol{K}_{cc}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_o\\ \boldsymbol{u}_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_o\\ \boldsymbol{f}_c\end{pmatrix}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\tag{19}$$

式中，$\boldsymbol{u}_o$ 和 $\boldsymbol{u}_c$ 分别为内部自由度和边界自由度对应的位移向量，下标“o”和“c”分别表示某子结构内部自由度和边界自由度。

引入CB法的假设分支模态集 $\boldsymbol{T}$ 和模态坐标 $\boldsymbol{\eta}$，对内部自由度和边界自由度进行变换[2]：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_o\\ \boldsymbol{u}_c\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_o & \boldsymbol{\Psi}_c\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}_o\\ \boldsymbol{\eta}_c\end{pmatrix}\tag{20}$$

其中：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_o & \boldsymbol{\Psi}_c\end{bmatrix}\tag{21}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}_o$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_c$ 分别为固定界面主模态矩阵和约束模态矩阵。

固定界面主模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_o$ 可由约束全部边界自由度后的子结构特征值问题确定：

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{K}_{oo}-\omega^2\boldsymbol{M}_{oo}\right)\boldsymbol{\Phi}_{oo}=0\\ \boldsymbol{\Phi}_o=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{oo}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\end{cases}\tag{22}$$

约束模态矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_c$ 可由分块后的刚度矩阵表示为：

$$\boldsymbol{\Psi}_c=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{K}_{oo}^{-1}\boldsymbol{K}_{oc}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\tag{23}$$

将式(20)代入式(19)，得到转换到模态空间的运动微分方程，即IBS-CB法运动方程：

$$\tilde{\boldsymbol{M}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}+\tilde{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{\eta}}+\tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\eta}=\tilde{\boldsymbol{F}}+\tilde{\boldsymbol{G}}\tag{24}$$

其中：

$$\tilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{oo} & \boldsymbol{M}_{oc}\\ \boldsymbol{M}_{co} & \boldsymbol{M}_{cc}\end{bmatrix}\boldsymbol{T},\ \tilde{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_o\\ \boldsymbol{f}_c\end{pmatrix},$$
$$\tilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{oo} & \boldsymbol{C}_{oc}\\ \boldsymbol{C}_{co} & \boldsymbol{C}_{cc}\end{bmatrix}\boldsymbol{T},\ \tilde{\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda},$$
$$\tilde{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{oo} & \boldsymbol{K}_{oc}\\ \boldsymbol{K}_{co} & \boldsymbol{K}_{cc}\end{bmatrix}\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{25}$$

在一般的结构动力学问题中，系统的低阶模态

对系统动态响应的影响占主导。保留固定界面主模态矩阵的前 n 阶较低阶模态时，模态数 $n \ll N$，而边界自由度数 c 通常是有限的，因此 $n+c \ll N$。

经过式 (25) 所示的模态变换，可以将物理空间中的 N 自由度系统运动方程，变换为模态空间中的 $n+c$ 自由度系统运动微分方程。

3　基于振型加速度贡献的主模态选取

针对 IBS-CB 法中模态域子结构，提出一种基于振型加速度贡献的主模态选取方法。应用这一准则，可以舍弃那些对所关注的自由度加速度贡献较小的模态。

考虑基础激励引起的上层结构强迫振动，其无阻尼运动微分方程可以写为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Gamma}\ddot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}} \tag{26}$$

式中，$\ddot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}}$ 为基础加速度时程；$\boldsymbol{\Gamma}$ 为基础影响向量，即基础单位位移引起的上层结构静态变形。

整体系统各阶模态的振型参与因子[31] 为：

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}} = -\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Gamma} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{d}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{28}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{d}}$ 为整体系统关于质量矩阵归一化后的自由振动模态；$\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}$ 中第 r 行为第 r 阶模态振型参与因子；$\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{d}}$ 由式 (22) 所示的固定界面主模态矩阵按 o 自由度分块得到。

固定界面模态子结构的主模态振动形式与式 (27) 的振动形式有相通之处，基础可以看作子结构的边界自由度，上层结构可以看作子结构的内部自由度，整体系统的振动模态 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{d}}$ 相当于子结构的固定界面主模态，基础影响向量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 相当于子结构的约束模态。因此，按照式 (27) 的形式，结合 CB 法，定义固定界面模态子结构的主模态参与因子 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{CB}}$，有：

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{CB}} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{om} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{oo} & \boldsymbol{M}_{oc} \\ \boldsymbol{M}_{co} & \boldsymbol{M}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{oc} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{\Phi}_{om}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{oo}\boldsymbol{\delta}_{oc} + \boldsymbol{M}_{oc}) = -\tilde{\boldsymbol{M}}_{mc} \tag{29}$$

式中，下标“m”表示取固定界面主模态矩阵中的前 m 阶构成的主模态矩阵，$\boldsymbol{\delta}_{oc}$ 由式 (23) 所示的约束模态矩阵上半分块计算得到。

引入振型加速度贡献系数的概念，由于子结构的边界自由度通常不为 1，故定义子结构主模态对第 j 自由度的振型加速度贡献系数向量为：

$$\boldsymbol{\Lambda}^{j} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{1}^{j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{r}^{j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{m}^{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{j} & \cdots & \Lambda_{1h}^{j} & \cdots & \Lambda_{1c}^{j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{r1}^{j} & \cdots & \Lambda_{rh}^{j} & \cdots & \Lambda_{rc}^{j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m1}^{j} & \cdots & \Lambda_{mh}^{j} & \cdots & \Lambda_{mc}^{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{1}^{j}\boldsymbol{P}_{1}^{\mathrm{CB}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{r}^{j}\boldsymbol{P}_{r}^{\mathrm{CB}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_{m}^{j}\boldsymbol{P}_{m}^{\mathrm{CB}} \end{bmatrix} \tag{30}$$

式中，$\boldsymbol{\Lambda}_{r}^{j}$ 为 $1\times c$ 的列向量，其内部元素 Λ_{rh}^{j} 表示子结构受边界自由度 h 上的激励时第 r 阶主模态对内部自由度 j 加速度响应的贡献；$\boldsymbol{\Phi}_{r}^{j}$ 为子结构主模态矩阵第 j 行第 r 列的元素；$\boldsymbol{P}_{r}^{\mathrm{CB}}$ 表示子结构主模态参与因子 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{CB}}$ 中的第 r 行。

当子结构受到来自边界自由度 h 的激励时，为了比较各阶主模态的相对重要性，定义第 r 阶主模态对内部自由度 j 的振型加速度贡献率为：

$$\tilde{\Lambda}_{rh}^{j} = \frac{\left|\Lambda_{rh}^{j}\right|}{\sum_{i=1}^{m}\left|\Lambda_{ih}^{j}\right|} \times 100\% \tag{31}$$

通常情况下，子结构会承受来自不同边界自由度的激励。因此，单独评估各阶主模态对单一边界自由度的影响是有失偏颇的，有必要整体考虑各阶主模态对全部边界自由度的综合效应。每个界面节点通常包含 6 个自由度方向，这些方向的量纲并不统一，所以，需要先将全部边界自由度的振型加速度贡献率在各个方向上单独求和，再分别计算各阶主模态在每个方向上的贡献率。接着，通过设定特定的阈值对主模态进行筛选。如果某阶主模态在某一自由度方向上的振型加速度贡献率超过该阈值，表明该阶主模态在受到该方向激励时对关注自由度的加速度响应具有显著影响，应当予以保留；否则，将该阶主模态剔除。

4　数值算例

本文以机-弹耦合系统的着陆冲击响应分析为例来说明本文所提方法的整个过程。相较于未挂弹的飞机，机-弹耦合系统在着陆过程中会遭受更为剧烈的冲击载荷，这些载荷通过挂架传递至挂载物，可能对其造成负面影响甚至破坏。机-弹耦合系统是一个复杂的结构系统，其着陆过程牵涉多个子系统之间的相互关联以及各种环节因素的相互作用。对于弹体设计而言，若仅对挂载的弹体进行响应分析，由于在模型处理中难以准确模拟实际连接形式的边界条件和输入激励，所得结果与真实情况存在较大差异，无法满足设计需求。因此，本算例将采用本文所提 IBS-CB 法对机-弹耦合系统着陆冲击响应进行分析。

4.1　模型介绍

通过刚柔耦合方法建立如图 2 所示的挂弹-载机-起落架动力学模型。其中，载机有限元模型主要包含 3 种不同类型的单元：0D 质量单元、1D 梁单元和 2D 壳单元。飞机机身和机翼内部连接支撑的骨架是由 CBAR 和 CBEAM 单元构建的；机身蒙皮、翼肋和引擎外壳等薄壁结构则使用 CTRIA3 和 CQUAD4 单元进行建模；油箱内的燃油以及机载设备等则由

CONM2 单元进行模拟。整个载机有限元模型包含 162605 个节点、97312 个梁单元和 172254 个壳单元。

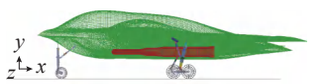


图 2 挂弹-载机-起落架刚柔耦合模型

Fig. 2 Missile-aircraft-landing gears rigid-flexible coupling model

挂弹结构有限元模型如图 3 所示。其蒙皮采用 CTRIA3 和 CQUAD4 单元构建，同时使用 CBAR 和 CBEAM 单元在各舱段蒙皮上建立环框与桁条，发动机和弹药等简化为质量单元，均匀分布到邻近的板壳结构上，舱段连接部位采用加厚壳单元共节点的处理方式进行等效。该有限元模型共包含 36472 个节点，11861 个梁单元和 28232 个壳单元。在本文的有限元模型中，采用图 4 所示的多点约束（multi-point constraint, MPC）模拟挂弹和载机的连接，使作用在机体上的冲击力能够有效地传递至挂弹结构。



图 3 挂弹结构有限元模型

Fig. 3 Finite element model of the missile

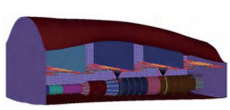


图 4 挂弹结构与载机的连接方式

Fig. 4 Connection mode between missile and aircraft

本文通过多刚体动力学方法建立起落架模型，主要包括缓冲器、运动机构及轮胎 3 个部分，如图 5 所示。通过落震仿真分析，验证了起落架模型的正确性，前起落架与主起落架的功量图如图 6 所示。



(a) 前起落架力学模型
(a) Kinetic model of the nose landing gear

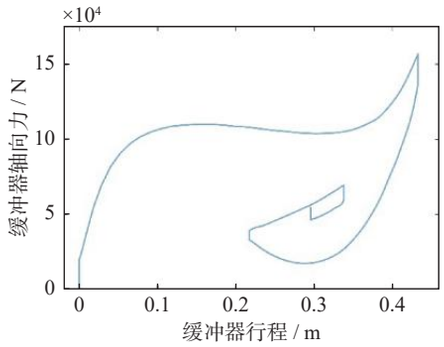
(b) 主起落架力学模型
(b) Kinetic model of the main landing gears

图 5 起落架结构动力学模型

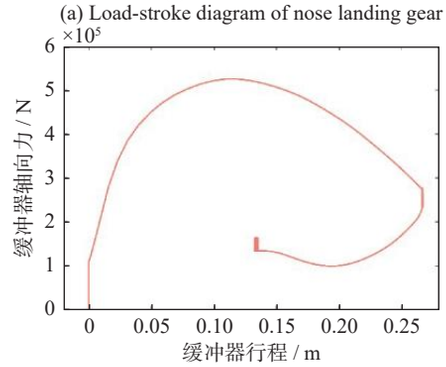
Fig. 5 Structural dynamic model of landing gears

4.2 模型缩聚

对完整的机-弹耦合动力学系统进行分析，固然



(a) 前起落架功量图
(a) Load-stroke diagram of nose landing gear



(b) 主起落架功量图
(b) Load-stroke diagram of main landing gears

图 6 起落架功量图

Fig. 6 Load-stroke diagrams of landing gears

可以得到更为丰富和全面的结构响应结果，但对于挂弹设计来说更为关注的是挂载弹体结构上少量测点的动力学响应。因此，为了提高计算效率，采用本文所提方法对机-弹耦合动力学系统进行模型缩聚。模型缩聚涉及两个方面，分别为载机模型缩聚和挂弹结构的缩聚。

4.2.1 载机模型缩聚

针对载机这类模态密集结构，使用脉冲子结构对其进行描述。机-弹耦合系统着陆过程中，地面对着陆系统的作用力会通过起落架传递到机体上。因此，载机模型共涉及 3 个载荷输入节点，即 18 个外激励自由度（每个节点保留 3 个平动自由度和 3 个转动自由度）。而载机与挂弹结构之间在前、后 2 个挂点附近通过多点约束实现连接，所以，载机模型共涉及 2 个界面节点，即 12 个连接自由度。为了验证本文所提方法的精度，选取载机武器舱壁上一个典型位置的 Y 方向自由度作为观察对象，如图 7 所示，即 1 个关注自由度。由此得到降阶后的脉冲子结构共包含 30 个输入自由度以及 13 个输出自由度。

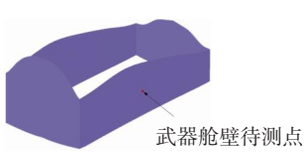


图 7 载机模型待测点

Fig. 7 Test point of the aircraft model

采用本文所提方法，依次在输入自由度施加初始载荷模型表示的单位脉冲激励，计算每个时间步下输出自由度的单位脉冲响应，并将这些结果存储在脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{H}(t)$ 中。本文的隐式积分步长为 0.005 s，时间步数共为 400 步。所以，对于载机的脉冲子结构，$\boldsymbol{H}(t)$ 可视作规模为 13×30×400 的三维矩阵。

4.2.2　挂弹结构模型缩聚

挂弹结构被置于内埋式武器舱内，受到气动力的影响较小，在着陆过程中，可以认为其主要承受机体从挂点处传递来的载荷。挂弹结构站位示意图如图 8 所示，其中，前挂点位于站位 8 处，后挂点位于站位 15 处。通过本文所提出的主模态选取准则，舍弃对关注自由度加速度响应影响较小的主模态，以站位 12 处 3 个关注自由度为例，图 9 展示了各阶主模态的振型加速度的贡献率，根据贡献率分布情况，通过设定阈值为 5% 来进行主模态选取。最终，运用本文所提出的 IBS-CB 法，降阶后的挂弹模态子结构共包含 36 个广义自由度。

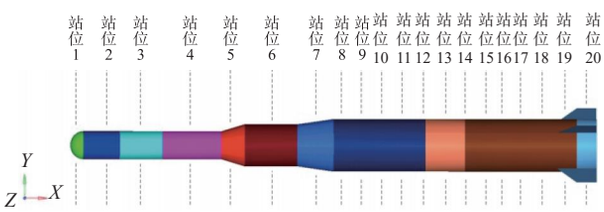


图 8　挂弹结构站位示意图

Fig. 8　Schematic diagram of positioning of the missile

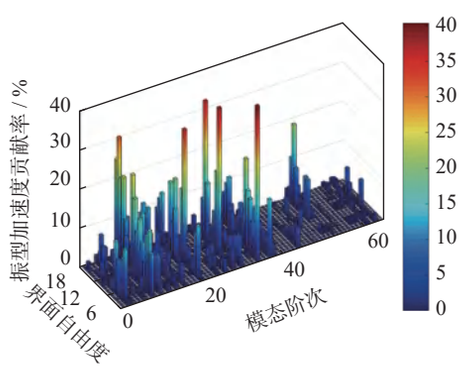


图 9　主模态对结构站位 12 处振型加速度的贡献率

Fig. 9　Contribution rate of main modes to the modal acceleration at position 12

4.3　子结构模型精度与计算效率评估

为评估所建立子结构模型的计算效率和求解精度，对采用 IBS 法与 IBS-CB 法建立的降阶模型分别进行动力学响应分析。选取图 7 所示的待测点处的加速度响应作为分析对象。以完整有限元模型直接积分法响应计算结果作为参照标准，验证方法的计算精度，由于 Y 方向为飞机下沉方向，该方向的冲击为着陆主冲击方向，故选定 Y 方向的加速度数据作为对比。不同方法计算得到的加速度响应曲线如图 10 所示。

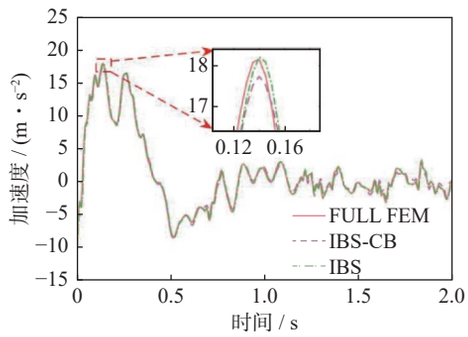


图 10　待测点 Y 方向加速度响应

Fig. 10　Acceleration response of Y direction at the test point

对比图中结果可以看出，降阶模型与完整模型的加速度响应时程曲线吻合较好，峰值间差异较小。为了进一步评判结果的计算精度，采用相对平均绝对误差 *RAAE*、模型稀释度 R^2 和相对峰值误差 *RPE* 作为评价指标[32]，对近似模型的响应计算误差进行定量分析。不同方法求解上述待测点处瞬态加速度响应的计算精度对比如表 1 所示。可以看出，本文所提方法具有较高的计算精度。

表 1　不同方法在待测点处 Y 方向加速度响应的计算精度

Tab. 1　Calculation accuracy of acceleration response of Y direction at the test point based on different methods

方法	评估标准		
	RAAE	R^2	*RPE*
Newmark	0	1	0
IBS	3.7357×10^{-3}	0.9959	2.2576×10^{-3}
IBS-CB	4.5013×10^{-3}	0.9918	-1.5026×10^{-2}

对于挂弹设计来说，弹体所承受的载荷是通过挂弹结构挂点传递的，挂点处的响应结果可以作为其设计输入。所以，在通过待测点响应分析验证了方法的计算精度后，选取挂弹结构后挂点处的响应作为分析对象。仍然以完整有限元模型直接积分法响应计算结果作为参照标准，不同方法计算得到的加速度响应曲线如图 11 所示。

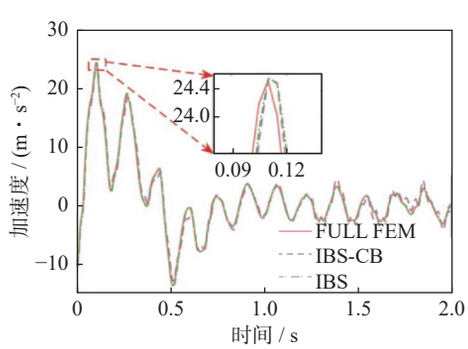


图 11　挂弹结构后挂点处 Y 方向加速度响应

Fig. 11　Acceleration response of Y direction at rear hanging point of the missile

采用与待测点类似的响应误差定量分析方法，不同方法求解上述后挂点处瞬态响应的计算精度定量对比如表 2 所示。

分析上述数据可知，IBS 法与 IBS-CB 法的响应分析结果均有较高的计算精确。对比两种方法的计算结果，IBS-CB 法由于对典型结构进行了模态截断，舍弃了部分模态信息，其求解精度略低于 IBS 法，但是将典型结构缩聚为脉冲子结构需要多次计算单位脉冲响应，而将其描述为模态子结构可以大幅缩短其缩聚时间。不同方法的求解效率如表 3 所示。可以看出，本文所提出的 IBS-CB 法的总计算成本仅为完整有限元计算成本的 3.06%，计算效率相较于 IBS 方法提升了 10.7 倍，在计算效率方面具有极大的优势。

表 2 不同方法在后挂点处的瞬态响应计算精度

Tab. 2 Calculation accuracy of instant response at rear hanging point based on different methods

方法	位移		速度		加速度		
	RAAE	R^2	*RAAE*	R^2	*RAAE*	R^2	*RPE*
Newmark	0	1	0	1	0	1	0
IBS	2.2423×10^{-5}	0.9999	3.7224×10^{-4}	0.9999	4.2326×10^{-3}	0.9944	1.9693×10^{-4}
IBS-CB	8.2458×10^{-4}	0.9998	1.8760×10^{-3}	0.9977	6.3197×10^{-3}	0.9858	8.1150×10^{-4}

表 3 不同方法对着陆动响应的求解效率

Tab. 3 Calculation efficiency of landing response based on different methods

方法	缩聚时间成本/s	计算时间/s	总计算成本/s	计算效率/%
Newmark	0	2846.85	2846.85	100
IBS	935.02	1.53	936.55	32.89
IBS-CB	85.81	1.37	87.18	3.06

5 结 论

针对大型复杂有限元模型规模庞大，且存在传递壁垒的问题，本文以时域子结构法为研究基础，以典型的机-弹耦合系统为参考对象，对机-弹耦合系统着陆动特性分析中的相关技术开展了深入研究。本文所做的主要工作和研究成果可以总结如下：

(1)提出了一种脉冲子结构与模态子结构混合空间子结构综合法。方法融合了脉冲子结构法和固定界面子结构模态综合法的特点，能够显著降低计算规模。

(2)针对大规模复杂有限元可能存在的模态密集问题，本文引入振型加速度贡献的概念，建立了一种适用于 IBS-CB 法的主模态选取准则。通过该模态选取准则，可以将对关注自由度加速度响应影响较小的主模态剔除，降低模型计算规模。

(3)数值算例验证了本文所提方法的有效性。对比传统的 IBS 法，所提方法在保证较高计算精度的基础上能够进一步提高整体运算效率。

参考文献：

[1] HURTY W C. Vibrations of structural systems by component mode synthesis[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division，1960，86(4)：51-69.

[2] CRAIG R R，BAMPTON M C C. Coupling of substructures for dynamic analyses[J]. AIAA Journal，1968，6(7)：1313-1319.

[3] MACNEAL R H. A hybrid method of component mode synthesis[J]. Computers & Structures，1971，1(4)：581-601.

[4] HE H，WANG T，CHEN G P，et al. A real decoupled method and free interface component mode synthesis methods for generally damped systems[J]. Journal of Sound and Vibration，2014，333(2)：584-603.

[5] HE H，WANG T，CHEN G P. A hybrid coordinates component mode synthesis method for dynamic analysis of structures with localized nonlinearities[J]. Journal of Vibration and Acoustics，2016，138(3)：031002.

[6] 王陶，何欢，何成，等. 混合空间复模态综合法在局部非线性问题中的应用 [J]. 振动工程学报，2018，31(6)：1006-1012.
WANG Tao，HE Huan，HE Cheng，et al. A hybrid coordinates complex component mode synthesis method for generally damped systems with localized nonlinearities[J]. Journal of Vibration Engineering，2018，31(6)：1006-1012.

[7] CUI J，WANG X，XING J W，et al. An eigenvector-based iterative procedure for the free-interface component modal synthesis method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2018，116(12-13)：723-740.

[8] VIZZINI S，OLSSON M，SCATTINA A. Component mode synthesis methods for a body-in-white noise and vibration analysis[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers，Part D：Journal of Automobile Engineering，2017，231(2)：279-288.

[9] 王强，马志赛，张欣，等. 基于模态综合法的含间隙折叠舵面动态特性分析 [J]. 航空学报，2020，41(5)：223507.
WANG Qiang，MA Zhisai，ZHANG Xin，et al. Dynamic characteristic analysis for a folding fin with freeplay nonlinearities based on mode synthesis method[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2020，41(5)：223507.

[10] VAZHAYIL THOMAS P，ELSAYED M S A，WALCH D. Development of high fidelity reduced order hybrid stick model for aircraft dynamic aeroelasticity analysis[J]. Aerospace Science and Technology，2019，87：404-416.

[11] LIM J H，HWANG D S，KIM K W，et al. A coupled dynamic loads analysis of satellites with an enhanced Craig-Bampton approach[J]. Aerospace Science and Technology，2017，69：114-122.

[12] FANG M，WANG J，LI H. An adaptive numerical scheme based on the Craig-Bampton method for the dynamic analysis of tall buildings[J]. The Structural Design of Tall and Special Buildings，2018，27(1)：e1410.

[13] CHEN L，XU Y Y，SUN L M. A component mode synthesis method for reduced-order modeling of cable networks in cable-stayed bridges[J]. Journal of Sound and Vibration，2021，491：115769.

[14] ZHAO Y，JIA X H，ZHANG Y A，et al. Dynamic analysis of an offshore platform with compressor packages: application of the substructure method[J]. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering，2018，140(4)：041303.

[15] YUAN J，SALLES L，EL HADDAD F，et al. An adaptive component mode synthesis method for dynamic analysis of jointed structure with contact friction interfaces[J]. Computers & Structures，2020，229：106177.

[16] TIAN W，GU Y S，LIU H，et al. Nonlinear aeroservoelastic analysis of a supersonic aircraft with control fin free-play by component mode synthesis technique[J]. Journal of Sound and Vibration，2021，493：115835.

[17] YAO Y，HUANG X R，YANG X D，et al. Symmetric formulations combined with component mode synthesis for analyzing coupled fluid-structure problems. Reviews and extensions[J]. Applied Mathematical Modelling，2023，115：645-660.

[18] 王陶，何欢，闫伟，等. 一种利用子结构综合技术的模型修正方法 [J]. 振动与冲击，2017，36(2)：147-152.
WANG Tao，HE Huan，YAN Wei，et al. Model updating approach based on improved component mode synthesis[J]. Journal of Vibration and Shock，2017，36(2)：147-152.

[19] WANG T，HE H，YAN W，et al. A model-updating approach based on the component mode synthesis method and perturbation analysis[J]. Journal of Sound and Vibration，2018，433：349-365.

[20] WANG T，HE J C，HOU S，et al. Complex component mode synthesis method using hybrid coordinates for generally damped systems with local nonlinearities[J]. Journal of Sound and Vibration，2020，476：115299.

[21] TAN X，CHEN W T，HE H，et al. Extended component mode synthesis method for dynamic analysis of mechanical systems with local nonlinearities[J]. Journal of Sound and Vibration，2024，573：118227.

[22] 何欢，王陶，陈国平. 一般黏性阻尼振动系统的实空间解耦与自由界面模态综合法 [J]. 振动工程学报，2016，29(1)：8-16.
HE Huan，WANG Tao，CHEN Guoping. A free interface mode synthesis method for general damping system by using real decoupling transformation[J]. Journal of Vibration Engineering，2016，29(1)：8-16.

[23] CUI J，ZHENG G T. An iterative state-space component modal synthesis approach for damped systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing，2020，142：106558.

[24] RIXEN D J，VAN DER VALK P L C. An Impulse Based Substructuring approach for impact analysis and load case simulations[J]. Journal of Sound and Vibration，2013，332(26)：7174-7190.

[25] VAN DER VALK P L C, RIXEN D J. An Impulse Based Substructuring method for coupling impulse response functions and finite element models[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2014，275：113-137.

[26] 刘莉，陈树霖，周思达，等. 脉冲子结构与有限元刚-弹混合连接的子结构方法 [J]. 航空学报，2015，36(8)：2670-2680.
LIU Li，CHEN Shulin，ZHOU Sida，et al. A substructure method for coupling impulse response functions with finite element models via rigid-elastic joints[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2015，36(8)：2670-2680.

[27] DONG W L，LIU L，ZHOU S D，et al. Substructure synthesis in time domain with rigid-elastic hybrid joints[J]. AIAA Journal，2014，53(2)：504-510.

[28] ZHOU S D，LIU L，DONG W L. Time-domain substructure synthesis with hybrid rigid and nonlinear-elastic joints[J]. AIAA Journal，2016，54(8)：2545-2551.

[29] 陈树霖，刘莉，陈昭岳，等. 基于脉冲子结构的探测器结构动力学优化设计 [J]. 宇航学报，2018，39(9)：969-976.
CHEN Shulin，LIU Li，CHEN Zhaoyue，et al. Dynamic optimum design of lunar lander based on impulse substructuring technique[J]. Journal of Astronautics，2018，39(9)：969-976.

[30] 陈昭岳，刘莉，岳振江. 考虑结构参数不确定性的月球探测器结构优化设计 [J]. 宇航学报，2021，42(12)：1502-1514.
CHEN Zhaoyue，LIU Li，YUE Zhenjiang. Dynamic optimum design of lunar lander considering structural parameter uncertainty[J]. Journal of Astronautics，2021，42(12)：1502-1514.

[31] KAMMER D C，TRILLER M J. Selection of component modes for craig-bampton substructure representations[J]. Journal of Vibration and Acoustics，1996，118(2)：264-270.

[32] TANG Y X，HU H Y，TIAN Q. A condensed algorithm for adaptive component mode synthesis of viscoelastic flexible multibody dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2021，122(2)：609-637.

第一作者：王虎寅(1984—)，男，硕士，高级工程师。
E-mail: m15804071794@163.com

通信作者：何　欢(1978—)，男，博士，教授。
E-mail: hehuan@nuaa.edu.cn

大倾角靠背汽车座椅振动传递特性及舒适性研究

粟芷馨，林泽峰，尹玮倓，刘 迟，郑 旭，邱 毅

（浙江大学能源工程学院，浙江 杭州 310018）

摘要：本研究开展了大倾角靠背下人体-座椅的振动传递特性试验及振动舒适性研究。招募 12 名受试者乘坐于汽车座椅上（座椅采用正常靠背及大倾角靠背），并暴露在垂向及侧向单轴随机振动下，测量了振动台面、座椅坐垫和靠背处的振动加速度，从而计算出座椅振动传递率，并采用幅值估计法获得了受试者的主观振动不舒适性。试验分析振动方向、振动幅值和靠背倾角对座椅振动传递率和主观舒适性的影响规律。研究发现，垂向振动激励下，相比于正常靠背，大倾角靠背下座椅坐垫和靠背传递率共振峰频率和峰值均增大；侧向振动激励下，大倾角靠背下的靠背传递率第一共振峰峰值减小。两种靠背倾角下的振动舒适性评分均随振动激励幅值的增大而减小。当振动总加权加速度低于 0.19 m/s^2 r.m.s.时，正常靠背的舒适性低于大倾角靠背；当振动总加权加速度高于 0.19 m/s^2 r.m.s.时，正常靠背的舒适性高于大倾角靠背。

关键词：人因工程；全身振动；座椅振动传递特性；主观舒适性；靠背倾角

中图分类号：TB18 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508092

Vibration transmissibility and comfort of large-backrest-angle automotive seats

SU Zhixin, LIN Zefeng, YIN Weitan, LIU Chi, ZHENG Xu, QIU Yi

（College of Energy Engineering，Zhejiang University，Hangzhou 310018，China）

Abstract: This study conducted an experiment on the vibration transmission characteristics of the human body sitting on a car seat with a large backrest inclination angle and investigated vibration comfort. Twelve participants were recruited to sit in a car seat，which was configured with both a normal backrest and a large-angle backrest. They were exposed to vertical and lateral single-axis random vibrations. Vibration accelerations were measured at the vibrator table，the seat cushion，and the backrest，allowing for the calculation of seat transmissibility. Additionally，the magnitude estimation method was used to obtain the participants' subjective vibration discomfort. The experiment analyzed the influence of vibration direction，vibration amplitude，and backrest angle on seat vibration transmissibility and subjective discomfort. The study found that under vertical vibration excitation，compared to the normal backrest，the resonance peak frequency and peak value of transmissibility at both the seat cushion and backrest increased with the large-angle backrest. Under lateral vibration excitation，the first resonance peak value of backrest transmissibility decreased with the large-angle backrest. Vibration comfort ratings decreased with increasing vibration excitation amplitude for both backrest configurations. When the total weighted acceleration was below 0.19 m/s^2 r.m.s.，the comfort level with the normal backrest was lower than that with the large-angle backrest；when the total weighted acceleration exceeded 0.19 m/s^2 r.m.s.，the comfort level with the normal backrest became higher than that with the large-angle backrest.

Keywords: human factor engineering; whole-body vibration; seat transmissibility; subjective comfort; backrest inclination angle

近年来，中国新能源汽车和自动驾驶技术发展迅猛，车内空间的设计与利用方式向多元化和智能化迈进，车辆乘员对乘坐舒适性的要求也随之提高。适应乘坐舒适性的精细化设计与驾乘环境革新，“零重力座椅”设计概念在智能座舱研发中成为热点，相应产品也受到了市场的广泛关注。“零重力座椅”的概念源自宇航员在太空低重力环境下的中性身体姿态（neutral body posture, NBP）[1]，此时身体呈现出一种特定的姿态，人体的肌肉活性和脊柱压力较自然重力情况可能更小。汽车厂商将“零重力姿态”概念引入汽车座椅，通过对靠背、坐垫、腿托等角度的调节，使人体在乘坐时处于类似于中性身体姿态的半躺姿态，并将此类座椅称为“零重力座椅”。在车辆驾乘空间以动态场景为主的背景下，研究类似“零重力座椅”的大倾角靠背汽车座椅如何影响人体座椅系统动力学和主观振动舒适性，对于汽车和座椅系统舒适性开发具有重要的意义。

人体对振动激励产生的动力学响应与主观舒适

收稿日期：2025-08-15；**修订日期：**2025-09-28

基金项目：国家自然科学基金资助项目（T2192931）

性感受紧密相关。振动环境下的人体动力学特性常用人体表观质量来描述，表观质量定义为人体-座椅交界面处的动态力与振动加速度之间的传递函数。研究表明，人体坐姿从直立到后仰，动态响应特征会发生显著变化。垂向振动下，直立靠背工况下坐姿人体表观质量在 5 Hz 附近出现共振峰值[2-4]，峰值频率略高于无靠背工况[5]；随着靠背倾斜度的增加，垂向表观质量的共振频率随之提高[6]。

TOWARD 等[4]分别使用刚性靠背和柔性泡沫靠背，在 90°~120°靠背倾角下采集了坐姿人体垂向表观质量；对于刚性靠背，随着倾角的增加，人体共振频率从 5 Hz 提高至 7 Hz；附加柔性泡沫结构的靠背则存在相反的作用规律，共振频率随着靠背倾角的增加而减小，且靠背倾角为 120° 时，泡沫厚度的增加会导致共振频率的降低。对于大倾角靠背，人体表观质量同样受激励幅值影响，随机振动（0.25~20 Hz）下幅值从 0.125 m/s^2 r.m.s.升高至 1.0 m/s^2 r.m.s.，人体主共振频率从 10.35 Hz 降低至 7.32 Hz[7]。另外，靠背倾斜的条件下，手臂和手的摆放位置也会对人体的共振频率和共振峰值产生影响[8]。

汽车座椅动态特性对驾乘舒适性也有直接影响。现有研究常用振动传递率来定量描述座椅动态特性，振动传递率通常指地板振动与座椅面振动之间的传递函数。靠背倾角的变化会显著影响座椅振动传递率[9-10]。JALIL 等[9]使用汽车座椅在 90°、95°、100°和 105°四种靠背倾角下测取了靠背前后交叉轴传递率；两种座椅振动传递率均在 4 Hz 左右表现出共振峰值，共振频率及共振峰值随着靠背倾角的增加而增加。ZHANG 等[10]量化研究了靠背的倾角（90°、115°、120°）对座椅靠背传递率的影响，共振频率及峰值均随着靠背倾斜度的增加而增加。上述研究主要在靠背倾角小于 120°的坐姿下开展，目前尚不明确更大倾角的靠背如何影响座椅的振动传递率。

人体对不同方向、不同频率的振动在主观舒适性方面会表现出不同的敏感程度，现有研究已经建立振动频率加权函数来反映该敏感程度的频率依赖性，例如现行国际标准 ISO 2631-1[11] 中的 W_d、W_k 等。该标准基于大量试验获取的等舒适性曲线定义出频率加权函数，通过轴加权因子计算各部位的加权加速度均方根值，用所有位置加权加速度均方根值平方和的平方根来描述整体的不舒适性。ISO 2631-1[11] 所定义的频率加权一般基于无靠背坐姿，对于倾斜靠背而言，其适用性还有待进一步验证。

PADDAN 等[12]研究了垂向振动激励下不同靠背倾角（90°、112.5°、135°、157.5°和 180°）对舒适性的影响，并且提出了一种频率加权曲线用于评估大倾角靠背条件下振动暴露对舒适性和健康的影响。KATO 等[13]研究发现，倾斜靠背在 20 和 40 Hz 的敏感程度比在垂直靠背的敏感程度高 1.4~1.5 倍，使用 ISO 2631-1[11] 评价倾斜靠背的振动不舒适性会产生误差。BASRI 等[14-15]研究了频率为 1~20 Hz、幅值为 0.2~2.0 m/s^2 r.m.s.的振动激励下，不同靠背倾角下的等舒适性曲线；研究发现对于垂向振动，靠背倾角对主观等舒适性曲线影响不大，可以使用现行标准中的 W_d 频率加权函数，而对于前后轴方向振动，主观舒适性的频率依赖性更类似于频率加权函数 W_b。对于汽车座椅下大倾角靠背与正常靠背倾角坐姿在主观舒适性上的区别尚不明确。

针对上述问题，本研究旨在通过人体主、客观试验，探明大倾角靠背对人-椅耦合系统的客观动力学响应与乘员的主观舒适性的定量影响。本研究招募了 12 名受试者，采用正常靠背和大倾角靠背进行试验；在两种靠背倾角下，对座椅施加垂向和侧向单轴振动，测量其振动传递率，并分析靠背倾角对共振频率及共振峰峰值的影响规律；同时，基于受试者对振动不舒适性的主观评分，建立客观振动加速度与主观舒适性的关联性分析，用 ISO 加权拟合对两种靠背得到了不同的结果，对比分析两种靠背的区别。

1　振动传递特性及主观舒适性试验

1.1　试验设备

本试验研究的测试设备包括六自由度振动台、坐垫加速度传感器 SIT-pad、三向加速度传感器 PCB 356A02 和 LMS SCADAS Mobil 数采系统。其中，六自由度振动台（如图 1 所示）的工作频率范围为 0.5~50 Hz，最大平动峰值位移为 315 mm，最大峰值加速度为 1.5g，完全满足试验的激励要求。



图 1　六自由度振动台

Fig. 1　Six-degree-of-freedom shaking table

试验采用某新能源汽车座椅作为测试对象，将其固定于振动台表面，座椅坐标系的选取参考国际标准 ISO 2631-1[11]，规定乘坐人体正前方为 X 向，人体左侧为 Y 向，人体与座椅（或地板）接触面法向为

Z向。加速度传感器布置参考 ISO 10326-1[16]标准，在座椅脚托正下方中心位置的振动台面上布置一个三向加速度传感器(PCB 356A02)，用于采集输入振动激励，同时在座椅坐垫表面(人体坐骨正下方)和靠背表面(对应人体第十节脊柱位置)各布置一个SIT-pad 坐垫加速度传感器，分别测量坐垫和靠背处的振动响应，测点布置及坐标系定义如图 2 所示。

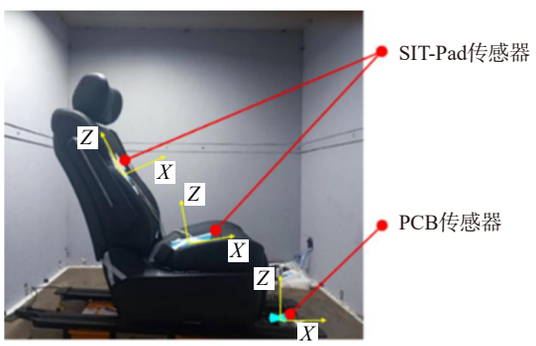


图 2 座椅振动加速度测点布置及坐标系定义

Fig. 2 Measurement points layout of seat vibration acceleration and definition of coordinate system

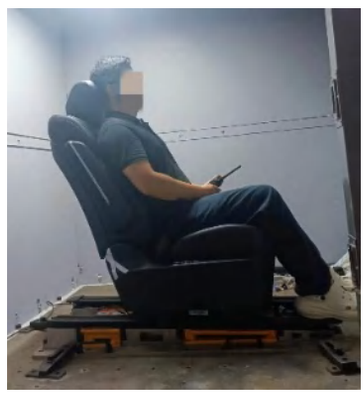
振动信号通过 LMS SCADAS Mobil 数采系统进行采集，采样频率为 500 Hz。试验设置了两种靠背：正常靠背(靠背倾角为 115°，脚托处于最低位置)和大倾角靠背(靠背倾角为 148°，脚托展开至与垂向成 64.6°夹角的最大位置)，如图 3 所示。

1.2 试验对象

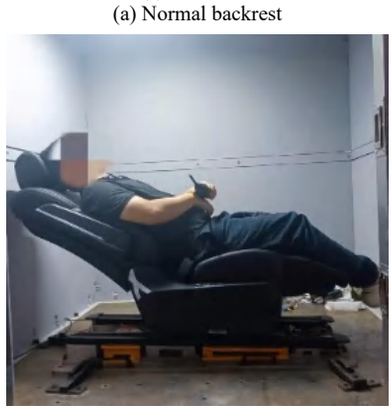
根据《中国成年人人体尺寸》(GB/T 10000—2003)[17]，在第 5、第 50、第 95 百分位数体重左右各招募 4 名男性受试者(共 12 名)参与试验，受试者平均体重为 70.75 kg(范围为 51~90 kg，标准差为 14.73 kg)，平均身高为 173.91 cm(范围为 162~186 cm，标准差为 8.34 cm)，平均年龄为 25.92 岁(范围为 19~35 岁，标准差为 4.58 岁)。受试者身体健康，无骨骼肌肉损伤及疲劳等症状，精神状态良好，试验前签署了知情同意书，并通过浙江大学伦理委员会的审批。试验过程中，受试者保持上身自然的姿势坐于座椅上，后背靠在座椅靠背上，头靠在头枕上，双手置于腹部，脚自然垂下，并维持该姿势至试验结束。

1.3 试验设计

本研究针对车内振动特性，重点考察垂向(Z轴)和侧向(Y轴)振动影响。试验采用单轴宽频随机振动激励，频率范围为 0.5~25 Hz，幅值分别为 0.2、0.4 和 0.8 m/s^2 r.m.s.，持续时间为 60 s。试验共设计 6 种振动工况(2 个振动方向×3 个幅值水平)。振动信号通过 MATLAB R2023b 生成后，经振动台控制系统采用迭代算法复现，实测表明复现信号与设计信号的误差控制在 5% 以内，满足试验精度要求。



(a) 正常靠背
(a) Normal backrest



(b) 大倾角靠背
(b) Large-backrest-angle

图 3 靠背设计

Fig. 3 Design of backrest

试验采用随机化设计，在开始前对所有振动激励信号进行随机排序，以消除顺序效应的影响。测试过程中，受试者需严格保持规定的标准坐姿。通过布置在振动台、坐垫和靠背处的加速度传感器实时采集振动响应信号。每次振动测试结束后，受试者需根据自身感受采用幅值估计法对振动舒适性进行主观评价。

由于个体主观影响，受试者对舒适性感受不同，将每个人主观评价的分数进行归一化处理：

$$R_{\mathrm{nor}}=\frac{100R}{R_{\mathrm{median}}} \tag{1}$$

式中，R_{nor}为归一化后的主观评价分数；R为主观评价分数；R_{median}为单个人所有主观评价分数。

1.4 数据分析

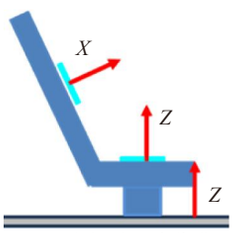
研究采用座椅振动传递率表征座椅的振动特性。座椅振动传递率定义为人-椅交界面与激励输入平面间振动加速度的传递函数，表示为：

$$H(f)=\frac{G_{\mathrm{io}}(f)}{G_{\mathrm{ii}}(f)} \tag{2}$$

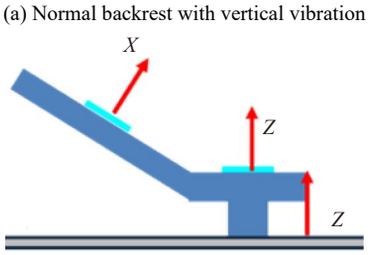
式中，$H(f)$为座椅振动传递率；$G_{\mathrm{io}}(f)$为振动台表面振动加速度和坐垫(靠背)振动加速度间的互功率谱密

度；$G_{ii}(f)$为振动台表面振动加速度的自功率谱密度。

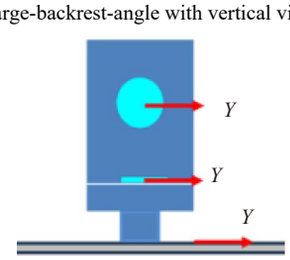
当对人体-座椅耦合系统施加垂向振动激励时，座椅靠背测点中前后交叉轴向的振动响应明显大于垂向直线轴振动响应。因此，对于垂向振动激励，本文采用坐垫的垂向直线轴振动传递函数（即图 4(a)和 (b) 中坐垫 Z 向和地板 Z 向之间的传递函数）和靠背的前后交叉轴振动传递函数（即图 4(a) 和 (b) 中靠背 X 向和地板 Z 向之间的传递函数）来表征座椅的动态特性。在侧向振动激励时，对坐垫和靠背均使用侧向直线轴振动传递函数表征座椅的频响特性（即图 4(c) 和 (d) 中坐垫与靠背 Y 向和地板 Y 向之间的传递函数），如图 4 所示。



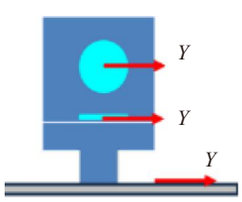
(a) 垂向振动正常靠背
(a) Normal backrest with vertical vibration



(b) 垂向振动大倾角靠背
(b) Large-backrest-angle with vertical vibration



(c) 侧向振动正常靠背
(c) Normal backrest with lateral vibration



(d) 侧向振动大倾角靠背
(d) Large-backrest-angle with lateral vibration

图 4　频响函数输入/输出示意图

Fig. 4　Schematic diagrams of the input and output of frequency response function

通过配对 Wilcoxon 符号秩法对不同振动幅度下的传递率共振频率和共振峰值进行检测，若差异显著（一般认为 p<0.05 时，其中 p 值表示零假设成立时观察到数据的概率），则表示振动幅值的变化对振动传递率的共振频率或共振峰值存在显著影响。此外，研究还采用 Spearman 相关性分析，用于评估两个变量之间的等级相关性（两变量间相关性用相关性系数 ρ 表示，并且一般认为 p<0.05 时，该相关性是显著的）。

研究采用基于 ISO 2631-1[11] 定义的频率加权函数及轴加权系数计算所得加权振动总值来分析其与人体主观舒适性间的关联性。频率加权函数考虑了不同振动输入部位、激励方向和激励频率的影响，反映了人体对输入振动的敏感程度。频率加权加速度均方根值表示为：

$$a_{\mathrm{w}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a_{\mathrm{w}}^2(t)\mathrm{d}t} \tag{3}$$

式中，a_{w} 为加权加速度的时间历程；T 为信号时长；t 为时间。

座椅表面、靠背、振动台表面的总加权加速度均方根值 a_{vi} 为：

$$a_{vi}=\sqrt{\sum k^2a_{\mathrm{w}}^2} \tag{4}$$

式中，k 为各个方向的轴加权系数；下标 i=1,2,3 分别表示座椅表面、靠背、振动台 3 个不同位置。

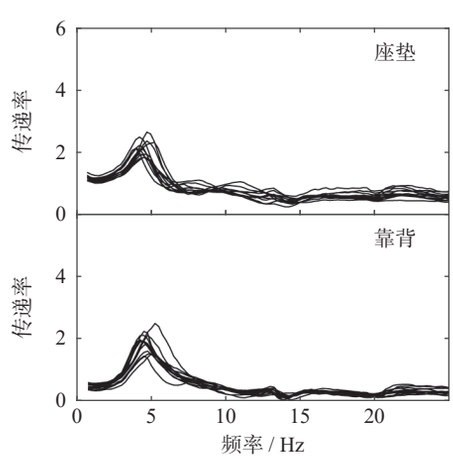
综合上述 3 个位置处的总加权加速度均方根值，可得总加权均方根加速度值 a_{v}：

$$a_{\mathrm{v}}=\sqrt{\sum a_{vi}^2} \tag{5}$$

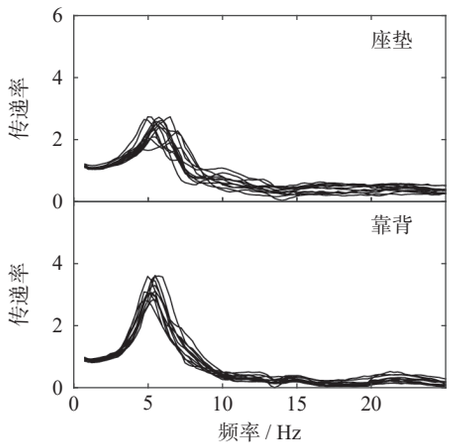
2　振动传递特性及主观舒适性分析

2.1　座椅振动传递特性

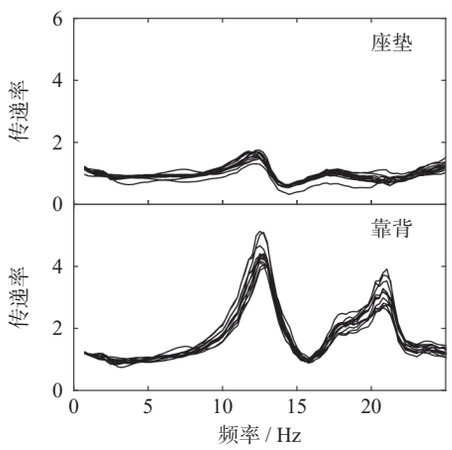
12 名受试者在振动幅值为 0.4 m/s^2 r.m.s.激励下的座椅振动传递率如图 5 所示。振动幅值为 0.2 和 0.8 m/s^2 r.m.s.激励下座椅振动传递率见附录。由图 5 可知，垂向振动激励下，正常靠背的坐垫垂向振动传递率和靠背前后交叉轴振动传递率在 4~5 Hz 之间存在一个峰值为 2.0 左右的共振峰；大倾角靠背的坐垫



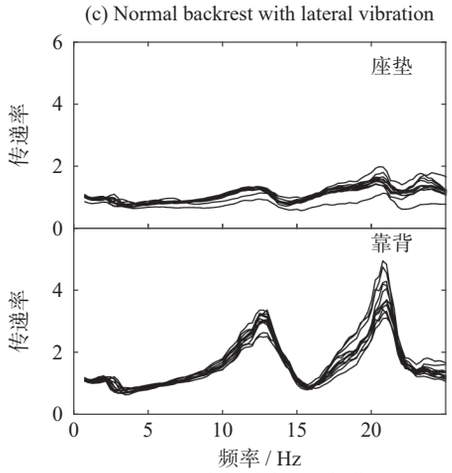
(a) 垂向振动正常靠背
(a) Normal backrest angle with vertical vibration



(b) 垂向振动大倾角靠背
(b) Large-backrest-angle with vertical vibration



(c) 侧向振动正常靠背
(c) Normal backrest with lateral vibration



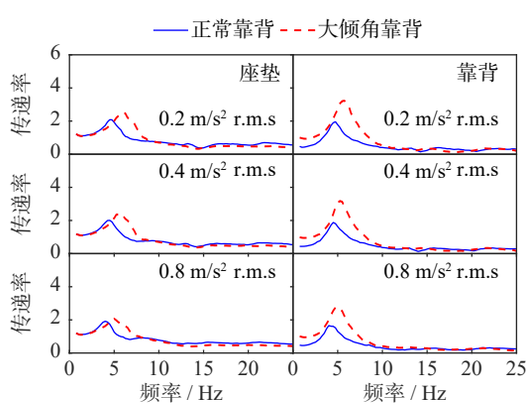
(d) 侧向振动大倾角靠背
(d) Large-backrest-angle with lateral vibration

图 5 0.4 m/s² r.m.s.振动激励下的座椅振动传递率

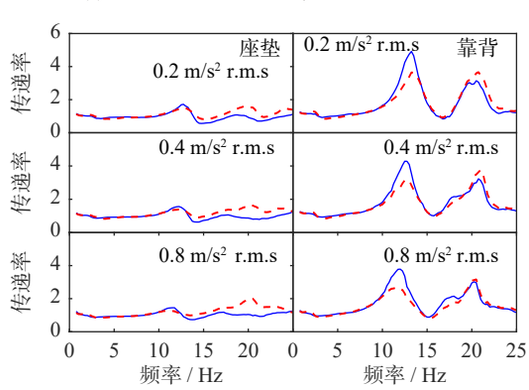
Fig. 5 Vibration transmissibility of seats under 0.4 m/s² r.m.s. vibration excitation

垂向振动传递率和靠背前后交叉轴振动传递率在4.5~6.5 Hz之间存在一个峰值为3.0左右的共振峰。侧向振动激励下，正常靠背的坐垫侧向振动传递率在13 Hz附近存在一个共振峰，大倾角靠背的坐垫侧向振动传递率在13和20 Hz附近存在共振峰，两种靠背的共振峰值较低，在1.0附近。两种靠背的靠背侧向振动传递率在13和20 Hz附近存在共振峰。

12名受试者在正常、大倾角靠背下的座椅振动传递率中值如图6所示。在垂向振动激励时，当受试者从正常靠背转变为大倾角靠背时，坐垫和靠背垂向振动传递率的共振频率及共振峰值均有显著提高(p<0.01, Wilcoxon)。仅在激励幅值为0.8 m/s² r.m.s.时，靠背倾角对坐垫处振动传递率共振峰值影响不显著(p>0.01, Wilcoxon)，正常靠背下的坐垫垂向传递率在低于其共振频率时大于大倾角靠背的坐垫垂向传递率，在大于共振频率处传递率小于大倾角靠背的坐垫垂向传递率，当频率高于8 Hz时，两种靠背的传递率无明显差别。正常靠背所得靠背前后交叉轴振动传递率在9 Hz以下小于大倾角靠背，9 Hz以上两者趋于一致。侧向振动激励下，正常靠背转变为大倾角靠背时坐垫侧向传递率的共振峰值减小(p<0.01, Wilcoxon)。从图6(b)中可以看出，在到达共振频率之前，两种靠背传递率没有明显区别，到达共振频率之后，大倾角靠背的坐垫横向传递率大于正常靠背，靠背侧向传递率第1共振频率处峰值减小(p<0.01, Wilcoxon)，第2共振频率处峰值在振动幅值为0.2和0.4 m/s² r.m.s.时有所增加，在振动幅值为0.8 m/s² r.m.s.时无明显区别(p>0.05, Wilcoxon)。



(a) 受到垂向振动时的垂向传递率
(a) Vertical transmissibility with vertical vibration

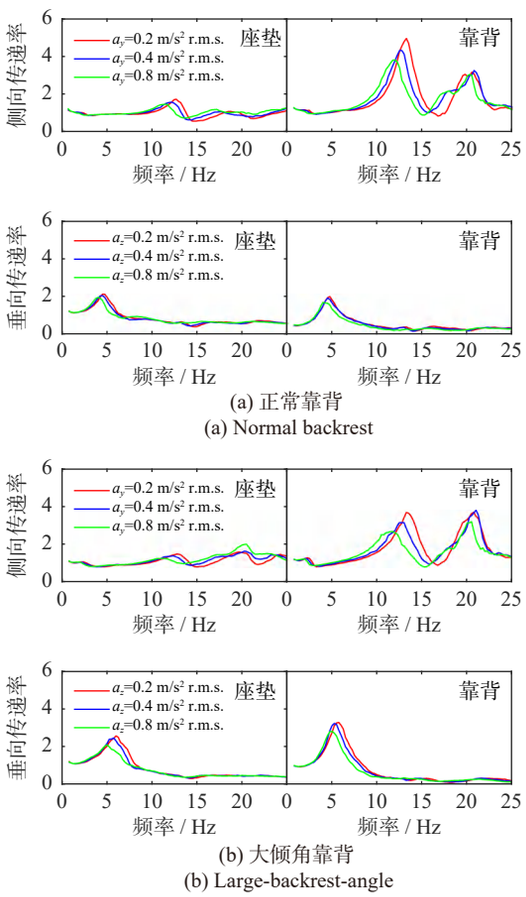


(b) 受到侧向振动时的侧向传递率
(b) Lateral transmissibility with lateral vibration

图 6 12名受试者在正常、大倾角靠背下的座椅振动传递率中值

Fig. 6 Median vibration transmissibility of seats of 12 subjects under normal backrest and large-backrest-angle

振动幅值对座椅振动传递率的影响如图 7 所示。可以看出，整体上座椅传递率的共振频率和共振峰值随振动幅值的增大而减小，表现出明显的非线性特征。激励强度对传递率影响的显著性水平/非参数统计分析如表 1 所示。



(a) 正常靠背
(a) Normal backrest

(b) 大倾角靠背
(b) Large-backrest-angle

图 7　12 名被试者在 3 种振动幅值下的座椅振动传递率中值

Fig. 7　Median vibration transmissibility of seats of 12 subjects under 3 vibration amplitudes

表 1　激励强度对传递率影响的显著性水平/非参数统计分析

Tab. 1　Significance level of the influence of incentive intensity on transmissibility / non-parametric statistical analysis

靠背	垂向振动/(m·s² r.m.s.)	坐垫		靠背	
		共振峰值	共振频率	共振峰值	共振频率
正常靠背	0.2 vs. 0.4	ns	**	ns	ns
	0.2 vs. 0.8	**	**	**	**
	0.4 vs. 0.8	**	**	**	**
大倾角靠背	0.2 vs. 0.4	**	**	ns	**
	0.2 vs. 0.8	**	**	**	**
	0.4 vs. 0.8	**	**	**	**

靠背	侧向振动/(m·s² r.m.s.)	坐垫				靠背			
		一阶	二阶	一阶	二阶	一阶	二阶	一阶	二阶
正常靠背	0.2 vs. 0.4	**	**	**	ns	**	ns	**	**
	0.2 vs. 0.8	**	ns	**	ns	**	ns	**	ns
	0.4 vs. 0.8	**	ns	**	**	**	**	**	**
大倾角靠背	0.2 vs. 0.4	**	*	**	ns	**	ns	**	**
	0.2 vs. 0.8	**	**	*	ns	**	**	**	*
	0.4 vs. 0.8	**	**	*	ns	**	**	**	**

注：“**”表示p< 0.01；“*”表示p< 0.05；“ ns”表示p> 0.05。

垂向振动激励下，正常靠背在 0.2~0.4 m/s² r.m.s. 之间对于坐垫共振峰值、靠背共振峰值及靠背共振频率没有显著影响，其余均有显著影响（p<0.01，Wilcoxon）；大倾角靠背除在 0.2~0.4 m/s² r.m.s.之间对靠背共振峰值没有显著影响外，其余均有显著影响（p<0.01，Wilcoxon）。

侧向激励下，正常靠背下，对于全部的测试工况与测试位置，一阶峰值频率及峰值频率处幅值均出现显著变化；而二阶共振频率则仅在 0.4 和 0.8 m/s² r.m.s. 工况的比较中表现出显著变化；大倾角靠背下，一阶峰值频率和峰值频率处幅值依然在全部测试工况下表现出显著变化，但是部分工况坐垫处的显著性水平有所降低，且二阶峰值频率及峰值频率处幅值受振动强度影响更加明显。

不同振动激励强度下，靠背倾角对座椅振动传递率的影响程度也存在差异。定义 α 为坐姿从正常靠背变为大倾角靠背时座椅振动传递率的一阶共振频率的变化率，β 为坐姿从正常靠背变为大倾角靠背座椅振动传递率的一阶共振峰值的变化率，分别表示为：

$$\alpha = \frac{|F_{\mathrm{lar}} - F_{\mathrm{nor}}|}{F_{\mathrm{nor}}} \times 100\% \qquad (6)$$

$$\beta = \frac{|A_{\mathrm{lar}} - A_{\mathrm{nor}}|}{A_{\mathrm{nor}}} \times 100\% \qquad (7)$$

式中，F_{nor}、F_{lar}分别为正常、大倾角靠背下座椅振动传递率的共振频率；A_{nor}、A_{lar}分别为正常、大倾角靠背下座椅振动传递率的共振峰值。

表 2 为不同振动幅值下共振频率及共振峰值的中值变化率。可以看出，在垂向振动激励下，垂向振动激励幅值为 0.2 m/s² r.m.s.时比 0.8 m/s² r.m.s.时传递率的影响更大，共振频率变化率 α 和共振峰值变化率 β 随着振动幅值的增加而减小。在侧向振动激励下，座垫二阶共振频率的变化率随着振动幅值的增大而减小，靠背一阶共振峰值的变化率随着振动幅值的增大而增大，靠背二阶共振峰值的变化率随着振动幅值的增大而减小。

表 2　不同振动幅值下共振频率及共振峰值的中值变化率

Tab. 2　Median change rate of resonance frequency and resonance peak value under different vibration amplitudes

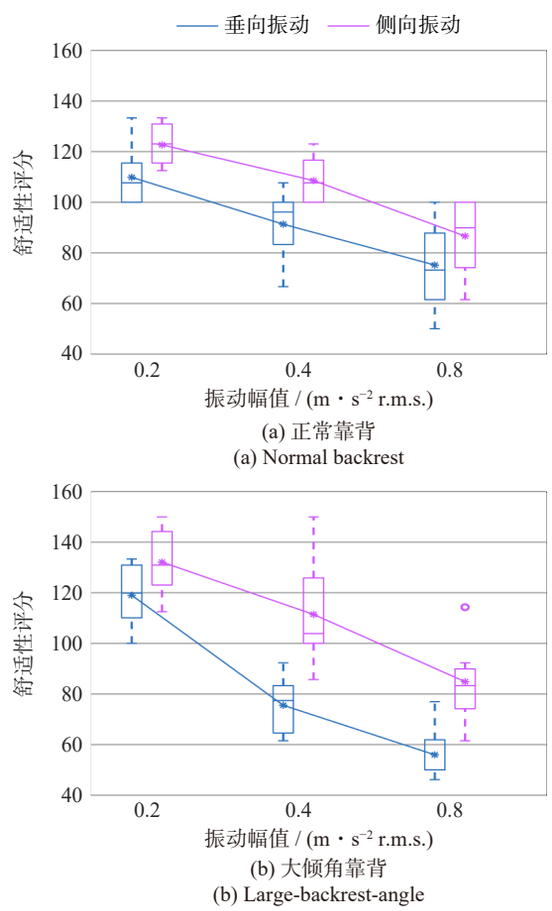
方向	幅值 (m/s² r.m.s.)	坐垫		靠背	
		α	β	α	β
垂向	0.2	33.3	21.8	21.1	64.8
	0.4	27.8	20.9	16.7	69.2
	0.8	25.0	8.1	25.0	67.5

方向	幅值 (m/s² r.m.s.)	坐垫				靠背			
		一阶	二阶	一阶	二阶	一阶	二阶	一阶	二阶
侧向	0.2	0	21.0	13.2	42.1	0	1.2	25.8	16.6
	0.4	0	19.0	10.7	29.5	0	1.2	26.9	16.0
	0.8	2.2	18.0	13.0	60.0	4.2	1.2	29.6	5.0

注：加亮区域表示变化率α或β随振动幅值的变化单调递增或递减。

2.2 振动舒适性主、客观关联分析

图 8 绘制了不同振动幅值下受试者在两种靠背倾角下的主观舒适性。具体舒适性评分数据分布统计如表 3 所示。由于受试者身高体重的不同，具体传递在每个人身上的加速度不同，归一化后舒适性评分呈现一定个体差异化，但不论正常靠背还是大倾角靠背，主观舒适性随着振动幅值的增大而降低，呈负相关（p<0.01, Spearman）。对于不同方向的振动，相同的振动幅值下侧向振动激励的舒适性评分高于垂向振动激励的舒适性评分。此外，归一化后舒适性评分仍然呈现较大的个体差异化，由于受试者身高、体重的不同，具体传递在每个人身上的加速度不同，从而导致舒适性评分的差异。



注：“*”表示 12 名受试者归一化后舒适性评分均值；箱体内的线表示 12 名受试者归一化后舒适性评分中位数；“○”表示异常值。

图 8 12 名受试者归一化舒适性评分箱线图

Fig. 8 Box plots of normalized comfort scores for 12 subjects

进一步，基于史蒂文斯幂定律来探究主观舒适性与客观振动幅值之间的关联性。史蒂文斯幂定律可以用来描述外界刺激下主、客观之间的关系：

$$\Psi = K\varphi^n \tag{8}$$

式中，Ψ表示受试者基于振动激励的主观舒适性评分，在本测试中为 12 名被试者舒适性评分的均值；φ表示振动激励的客观加速度值，对应本测试中各工况下加权的座椅表面加速度的中值；K 为比例常数；n 为由振动引起的主观舒适性的增长率。

表 3 舒适性评分数据分布统计

Tab. 3 Statistics of distribution of comfort scores

坐姿	方向	幅值 (m/s² r.m.s.)	均值	中位数	标准差	Q1	Q3
正常靠背	垂向振动	0.2	109.9	107.7	7.9	100.0	115.5
		0.4	91.3	96.2	8.6	83.3	100.0
		0.8	75.2	73.2	14.4	61.5	87.8
	侧向振动	0.2	122.7	123.1	9.9	115.5	131.0
		0.4	108.6	107.7	12.1	100.0	116.7
		0.8	86.6	61.5	16.7	74.1	100.0
大倾角靠背	垂向振动	0.2	119.0	119.9	13.1	110.1	131.0
		0.4	75.5	77.4	19.0	64.6	83.3
		0.8	56.0	50.0	16.3	50.0	61.9
	侧向振动	0.2	132.1	131.0	12.2	123.1	144.2
		0.4	111.4	103.8	10.9	100.0	125.8
		0.8	84.8	83.3	10.3	74.2	89.9

注：Q1表示下四分位数；Q3表示上四分位数。

将式 (8) 等式两边同时取对数转化为线性关系，即

$$\lg\Psi = \lg K + n\lg\varphi \tag{9}$$

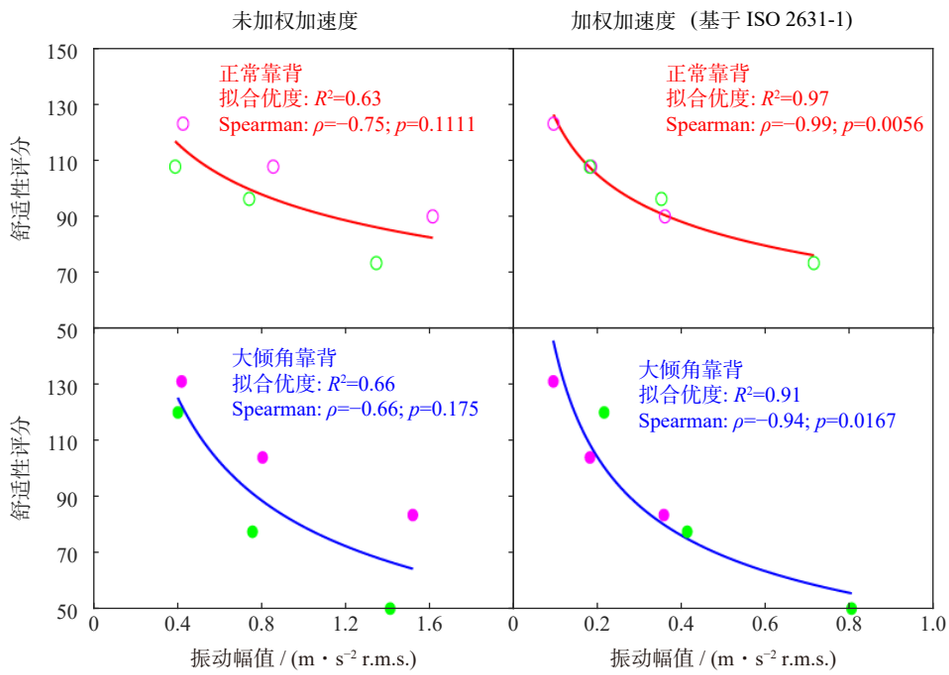
基于史蒂文斯幂定律对人体的振动激励和主观舒适速度评分进行回归分析，主观舒适性与未加权的激励加速度均方根总值、基于 ISO 2631-1[11] 计算的综合总加权加速度均方根之间的拟合结果如图 9 所示。可知，使用未加权的激励加速度总值对主观感受进行拟合时获得的拟合优度 R^2 较低（正常靠背 R^2=0.63，大倾角靠背 R^2=0.66）。基于 ISO 2631-1[11] 中计算的综合总加权加速度考虑到人体对不同频率、不同方向的振动敏感程度不同，应用了加权函数和轴加权系数，正常靠背和大倾角靠背的拟合优度均得到提升（正常靠背 R^2=0.97，大倾角靠背 R^2=0.91）。

正常、大倾角靠背下主、客观响应的拟合结果如表 4 所示。对比分析两种靠背下主、客观之间的关系，大倾角靠背的斜率绝对值显著高于正常靠背，这意味着随着振动幅值的增加，大倾角靠背下人体舒适性感受迅速下降，即大倾角靠背下人体对振动激励更为敏感。两种靠背下人体主、客观响应间关系如图 10 所示。可知，两种靠背的拟合回归交点为（0.19, 106），当总加权加速度低于 0.19 m/s² r.m.s.时，大倾角靠背更为舒适；而当总加权加速度高于 0.19 m/s² r.m.s.时，大倾角靠背的舒适性表现则不如正常靠背。

3 分 析

3.1 座椅振动传递特性

本研究发现，垂向振动激励下，增加靠背倾角会导致坐垫和靠背振动传递率的共振频率及共振峰值提高。垂向振动激励下，靠背倾角为 115°时座椅的



注：左图的客观加速度为坐垫和靠背处未加权加速度均方根总值，右图加速度为基于 ISO 2631-1[11] 中计算的总加权加速度；○：正常靠背、垂向振动；○：正常靠背、侧向振动；●：大倾角靠背、垂向振动；●：大倾角靠背、侧向振动；——：针对正常靠背的散点拟合趋势线；——：针对大倾角靠背的散点拟合趋势线。

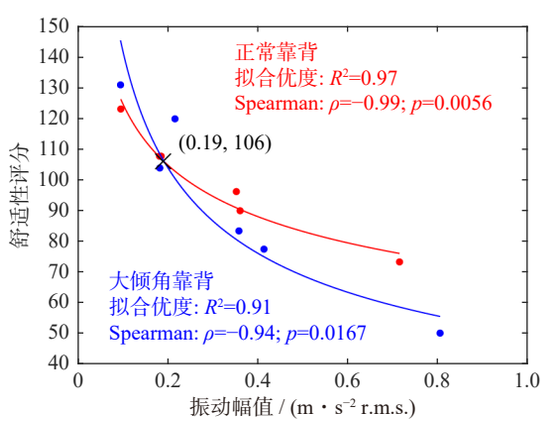
图 9　主观舒适性和客观振动加速度拟合曲线

Fig. 9　Fitting curves for subjective comfort and objective vibration acceleration

表 4　正常、大倾角靠背下主、客观响应的拟合结果

Tab. 4　Fitting results of subjective / objective responses under normal backrest and large-backrest-angle

靠背	n	lg K	R^2
正常靠背	0.2528	1.8440	0.97
大倾角靠背	0.4521	1.7013	0.91



注：●：大倾角靠背、垂向振动；●：大倾角靠背、侧向振动；——：针对正常靠背的散点拟合趋势线；——：针对大倾角靠背的散点拟合趋势线。

图 10　两种靠背倾角下主观舒适性和客观振动加速度（基于 ISO 2631-1[11] 中计算的综合总加权加速度）拟合曲线

Fig. 10　Fitting curves for subjective comfort and objective vibration acceleration (ISO 2631-1[11] overall weighted acceleration) under two backrest inclination angles

垂向振动传递率主共振峰出现在 4 Hz；当坐姿从靠背倾角 115°转变为靠背倾角 148°时，峰值频率增大至 5 Hz，同时共振峰值也相应增加，且振动幅值不同，共振频率及共振峰值变化的程度也不同，与其他研究一致[10]。靠背倾角的调整会改变人-座椅系统的整体刚度分布，从而影响其固有频率和振动传递特性。增加靠背倾角导致坐垫上所受的质量减小，靠背上所受的质量增大，从而可能改变坐垫及靠背的刚度及阻尼。例如，研究发现相比于正常靠背，靠背倾角较大时的人体躯干表现出的身体等效刚度更小，从而导致人椅系统动刚度的改变，共振频率也产生变化[18]。此外，人体对振动响应随坐姿变化而改变，研究表明，当背部得到支撑时，肌电活动会降低，且随靠背倾斜度的增加而降低[19-20]。侧向振动激励下，靠背倾角的变化对于振动传递率的影响主要体现在靠背侧向振动传递率第 1 共振峰的幅值上，靠背倾角的增加导致第 1 共振峰的幅值减小。

本研究试验结果表明，座椅振动传递率共振频率和共振峰值表现出随着振动幅值的增大而减小的非线性特征，与之前的生物动力学研究结论类似[21-23]。对于不同振动幅值下的表观质量的研究表明，坐姿人体的表观质量的共振频率随着振动幅值的增加而减小，即高幅振动激励下的人体刚度小于低幅振动激励下的人体刚度。图 7 所表现的非线性可能是由人体动力学响应的非线性造成的。研究表明，4 Hz 左右的竖脊肌肌电信号明显增加[24]，肌肉激活的程

度可能影响到人体响应，非线性可能是由于人体肌肉主动发力导致的。另外，HUANG 等[25] 认为人体的非线性是由于人体的触变性造成的，即肌肉在运动后的刚度会降低[26]。

3.2 主观振动舒适性

人体对于不同方向、不同频率的振动下的舒适性敏感程度是不同的。研究使用的振动激励信号是频率范围为 0.5~25 Hz 的宽频信号，使用未加权输入加速度关联不同方向的振动舒适性是不合适的（正常靠背 R^2=0.63，大倾角靠背 R^2=0.66）。通过基于 ISO 2631-1[11] 计算的综合总加权加速度极大提升了拟合效果，正常靠背的拟合优度提升到 0.97，大倾角靠背的拟合优度提升到 0.91，两种靠背对比，ISO 2631-1[11] 更适合对正常靠背的座椅提供振动舒适性评估。

由图 10 可知，总加权振动加速度总值高于 0.19 m/s^2 r.m.s.时，大倾角靠背的舒适性低于正常靠背。有研究通过模型计算振动传递率及人体吸收功率来描述人体对振动的疲劳，结果表明，适度增加靠背倾角可以降低人体吸收功率，减轻疲劳，过度增加靠背倾角反而会降低舒适性[27]。

PADDAN 等[12] 的研究表明在 2 m/s^2 r.m.s.的垂向振动激励下，相比于其他靠背倾角（90°、157.5°、180°），112.5°和 135°被认为是最舒适的靠背倾角，而本文发现在加权振动加速度幅值高于 0.19 m/s^2 r.m.s.时，115°的靠背倾角比 148°舒适性高。结论不同可能是由于文中使用的座椅不同，PADDAN 等[12] 使用的座椅为表面覆有 1 mm 厚泡沫橡胶的刚性座椅，刚度远大于本研究中汽车座椅的刚度。此外，在文献 [12] 中，当靠背倾角增加至 157.5°时舒适性表现不如 135°，意味着在 135°~157.5°之间可能存在舒适性降低的转折点，本文采用的大倾角靠背（148°）在此范围区间，而对于舒适性降低的转折点还有待后续研究验证。

过往研究表明，大倾角靠背座椅的体压分布更加趋于均匀[28-30]，髋关节以及腰椎间受到的压力更小[31-34]，因此，一定靠背倾斜角度的坐姿有助于提高座椅静态舒适性。在低振动幅值下，主观感受可能以静态感受为主导，因此低振动幅值时，大倾角靠背相比于正常靠背具有更好的舒适性感受（图 10）。在高振动幅值下，相较静态舒适性，振动不舒适性对人体的主观感受影响更大，而大倾角靠背姿态会放大座椅及靠背的振动响应（图 6），因此相较于正常坐姿有更不舒适的主观感受（图 10）。

3.3 研究的局限性

在确定受试者数量时，本研究参考了人因振动工程领域相关文献中常见的样本规模[2,4-5,7,10]，并且由于年龄并非本研究的主要考察变量，招募过程中未对此作特别限定。然而，已有研究表明，身高、体重、年龄和性别等因素可能影响人体的视在质量[3]，进而推测其对座椅振动传递特性也存在潜在影响。因此，本研究虽然参考了该领域常用的受试者选取方法，但仍存在一定局限性。后续研究有必要进一步扩大样本覆盖范围，纳入不同性别、年龄等群体，以验证大靠背角度对舒适性影响的普适性。

此外，本研究基于某个能够提供大角度靠背的汽车座椅开展，但不同座椅由于刚度、对身体的支撑形面等不同，可能会影响座椅的振动传递。然而，过往研究已发现，不论是汽车座椅[13] 还是由刚性表面支撑发泡构成的简化座椅[9-10]，其振动传递特性都表现出相似的规律；其次，坐姿与振动幅值存在交互效应这一规律是普遍存在的[35]。因此，图 10 所表现出的大倾角靠背在小幅值振动下舒适性较正常坐姿更好、在大幅值下舒适性较正常坐姿差的这一规律可能是一般性的，但具体临界点（本文中是加权振动加速度幅值为 0.19 m/s^2 r.m.s.）可能会由于座椅特性的不同而发生变化。未来可在更多的座椅样本上验证研究结论的普适性。

4 结 论

本研究对某款汽车座椅不同振动方向（垂向、侧向）和振动幅值（0.2、0.4、0.8 m/s^2 r.m.s.）的振动传递特性及主观舒适性进行了研究，对比分析了大倾角靠背和正常靠背在振动传递特性及主观舒适性上的区别，得到以下结论：

（1）大倾角靠背影响座椅振动传递率的共振频率及共振峰值。垂向振动激励下，座椅坐垫垂向振动传递率和靠背的前后交叉轴振动传递率在 4~6.5 Hz 之间存在一个共振峰，坐垫和靠背垂向振动传递率的共振频率及共振峰值随着靠背倾角的增加而提高。侧向振动激励下，两种靠背的侧向振动传递率在 13 和 20 Hz 附近存在共振峰。随着靠背倾角的增加，侧向传递率第 1 共振频率处峰值减小，第 2 共振频率处峰值增加。

（2）不同靠背倾角下，座椅的振动激励幅值对座椅振动传递率的影响不同。对于两种靠背（正常靠背、大倾角靠背），振动传递率的共振频率及共振峰峰值随着振动激励幅值的增加而减小。

（3）随着振动幅值的增大，舒适性评分降低。相同的振动激励幅度下，垂向振动激励所产生的不适感大于侧向振动激励。基于 ISO 2631-1 计算的综合总加权加速度可以拟合不同方向下两种靠背的振动舒适性。在总加权加速度低于 0.19 m/s^2 r.m.s.时，大倾角靠背的舒适性高于正常靠背；高于 0.19 m/s^2 r.m.s.时，大倾角靠背的舒适性表现则不如正常靠背。

参考文献：

[1] WHITMORE M，BOYER J，HOLUBEC K. NASA-STD-3001，space flight human-system standard and the human integration design handbook[C]//Proceedings of the 2012 Industrial and Systems Engineering Research Conference. 2012.

[2] MATSUMOTO Y，GRIFFIN M J. Movement of the upper-body of seated subjects exposed to vertical whole-body vibration at the principal resonance frequency[J]. Journal of Sound and Vibration，1998，215(4)：743-762.

[3] FAIRLEY T E，GRIFFIN M J. The apparent mass of the seated human body：vertical vibration[J]. Journal of Biomechanics，1989，22(2)：81-94.

[4] TOWARD M G R，GRIFFIN M J. Apparent mass of the human body in the vertical direction：effect of seat backrest[J]. Journal of Sound and Vibration，2009，327(3-5)：657-669.

[5] NAWAYSEH N，GRIFFIN M J. Tri-axial forces at the seat and backrest during whole-body vertical vibration[J]. Journal of Sound and Vibration，2004，277(1-2)：309-326.

[6] LIU C，QIU Y. Mechanism associated with the effect of backrest inclination on biodynamic responses of the human body sitting on a rigid seat exposed to vertical vibration[J]. Journal of Sound and Vibration，2021，510：116299.

[7] HUANG Y，GRIFFIN M J. Nonlinear dual-axis biodynamic response of the semi-supine human body during vertical whole-body vibration[J]. Journal of Sound and Vibration，2008，312(1-2)：296-315.

[8] WANG W，RAKHEJA S，BOILEAU P É. Effects of sitting postures on biodynamic response of seated occupants under vertical vibration[J]. International Journal of Industrial Ergonomics，2004，34(4)：289-306.

[9] JALIL N A A，GRIFFIN M J. Fore-and-aft transmissibility of backrests：effect of backrest inclination，seat-pan inclination，and measurement location[J]. Journal of Sound and Vibration，2007，299(1-2)：99-108.

[10] ZHANG X L，YU P J，LI Y J，et al. Dynamic interaction between the human body and the seat during vertical vibration：effect of inclination of the seat pan and the backrest on seat transmissibilities[J]. Ergonomics，2022，65(5)：691-703.

[11] International Organization for Standardization. Mechanical vibration and shock-evaluation of human exposure to whole-body vibration-part 1：general requirements：ISO 2631-1：1997[S]. 1997.

[12] PADDAN G S，MANSFIELD N J，ARROWSMITH C I，et al. The influence of seat backrest angle on perceived discomfort during exposure to vertical whole-body vibration[J]. Ergonomics，2012，55(8)：923-936.

[13] KATO K，HANAI T. The effect of backrest angles on discomfort caused by fore-and-aft back vibration[J]. Industrial Health，1998，36(2)：107-111.

[14] BASRI B，GRIFFIN M J. The vibration of inclined backrests：perception and discomfort of vibration applied normal to the back in the x-axis of the body[J]. Journal of Sound and Vibration，2011，330(18-19)：4646-4659.

[15] BASRI B，GRIFFIN M J. The vibration of inclined backrests：perception and discomfort of vibration applied parallel to the back in the z-axis of the body[J]. Ergonomics，2011，54(12)：1214-1227.

[16] International Organization for Standardization. Mechanical vibration-laboratory method for evaluating vehicle seat vibration-part 1：basic requirements：ISO 10326-1：2016[S]. 2016.

[17] 国家市场监督管理总局，国家标准化管理委员会. 中国成年人人体尺寸：GB/T 10000—2023[S]. 北京：中国标准出版社，2016.
State Administration for Market Regulation of the People's Republic of China，Standardization Administration of the People's Republic of China. Human dimensions of chinese adults：GB/T 10000—2023[S]. Beijing：Standards Press of China，2016.

[18] REZALI K A M，GRIFFIN M J. Transmission of vibration through glove materials：effects of contact force[J]. Ergonomics，2018，61(9)：1246-1258.

[19] ANDERSSON B J，ORTENGREN R. Lumbar disc pressure and myoelectric back muscle activity during sitting. Ⅱ. Studies on an office chair[J]. Scandinavian Journal of Rehabilitation Medicine，1974，6(3)：115-121.

[20] GUNNAR ANDERSSON B J，ÖRTENGREN R，NACHEMSON A L，et al. The sitting posture：an electromyographic and discometric study[J]. Orthopedic Clinics of North America，1975，6(1)：105-120.

[21] MANSFIELD N J，GRIFFIN M J. Non-linearities in apparent mass and transmissibility during exposure to whole-body vertical vibration[J]. Journal of Biomechanics，2000，33(8)：933-941.

[22] MATSUMOTO Y，GRIFFIN M J. Effect of muscle tension on non-linearities in the apparent masses of seated subjects exposed to vertical whole-body vibration[J]. Journal of Sound and Vibration，2002，253(1)：77-92.

[23] MATSUMOTO Y，GRIFFIN M J. Non-linear characteristics in the dynamic responses of seated subjects exposed to vertical whole-body vibration[J]. Journal of Biomechanical Engineering，2002，124(5)：527-532.

[24] 张超飞. 振动诱导下驾驶人腰背部肌肉响应机理及建模方法研究 [D]. 北京：清华大学，2019.
ZHANG Chaofei. Study on mechanism and modeling method of driver's back muscle response under whole body vibration [D]. Beijing：Tsinghua University，2019.

[25] HUANG Y，GRIFFIN M J. Nonlinearity in apparent mass and transmissibility of the supine human body during vertical whole-body vibration[J]. Journal of Sound and Vibration，2009，324(1-2)：429-452.

[26] LAKIE M，ROBSON L G. Thixotropic changes in human muscle stiffness and the effects of fatigue[J]. Quarterly Jour-

nal of Experimental Physiology，1988，73(4)：487-500.

[27] 陈满，赵清海，杨景周. 考虑座椅靠背倾角对人体振动的响应研究 [J]. 机械设计，2023，40(2)：77-83.
CHEN Man，ZHAO Qinghai，YANG Jingzhou. Research on human-body vibration response with backrest inclination taken into account[J]. Journal of Machine Design，2023，40(2)：77-83.

[28] 杜长江，乔宇，彭伟强，等. 基于工况分析的零重力座椅乘坐姿态研究 [J]. 中国汽车，2023，33(10)：61-64.
DU Changjiang，QIAO Yu，PENG Weiqiang，et al. Research on seating position of zero-gravity-seats based on working condition analysis[J]. China Auto，2023，33(10)：61-64.

[29] 谢杰，高开展，陈宇，等. 乘用车零重力座椅舒适姿态及体压分布研究 [J]. 汽车工程学报，2025，15(4)：603-610.
XIE Jie，GAO Kaizhan，CHEN Yu，et al. Research on comfortable posture and body pressure distribution for automotive zero-gravity seats[J]. Chinese Journal of Automotive Engineering，2025，15(4)：603-610.

[30] 张程. 乘用车零重力座椅布置及优化设计 [J]. 汽车文摘，2023(4)：35-39.
ZHANG Cheng. Car zero gravity seat layout and optimization design[J]. Automotive Digest，2023(4)：35-39.

[31] NACHEMSON A. Towards a better understanding of low-back pain：a review of the mechanics of the lumbar disc[J]. Rheumatology and Rehabilitation，1975，14(3)：129-143.

[32] MANDAL A C. Investigation of the lumbar flexion of the seated man[J]. International Journal of Industrial Ergonomics，1991，8(1)：75-87.

[33] SHIELDS R K，COOK T M. Effect of seat angle and lumbar support on seated buttock pressure[J]. Physical Therapy，1988，68(11)：1682-1686.

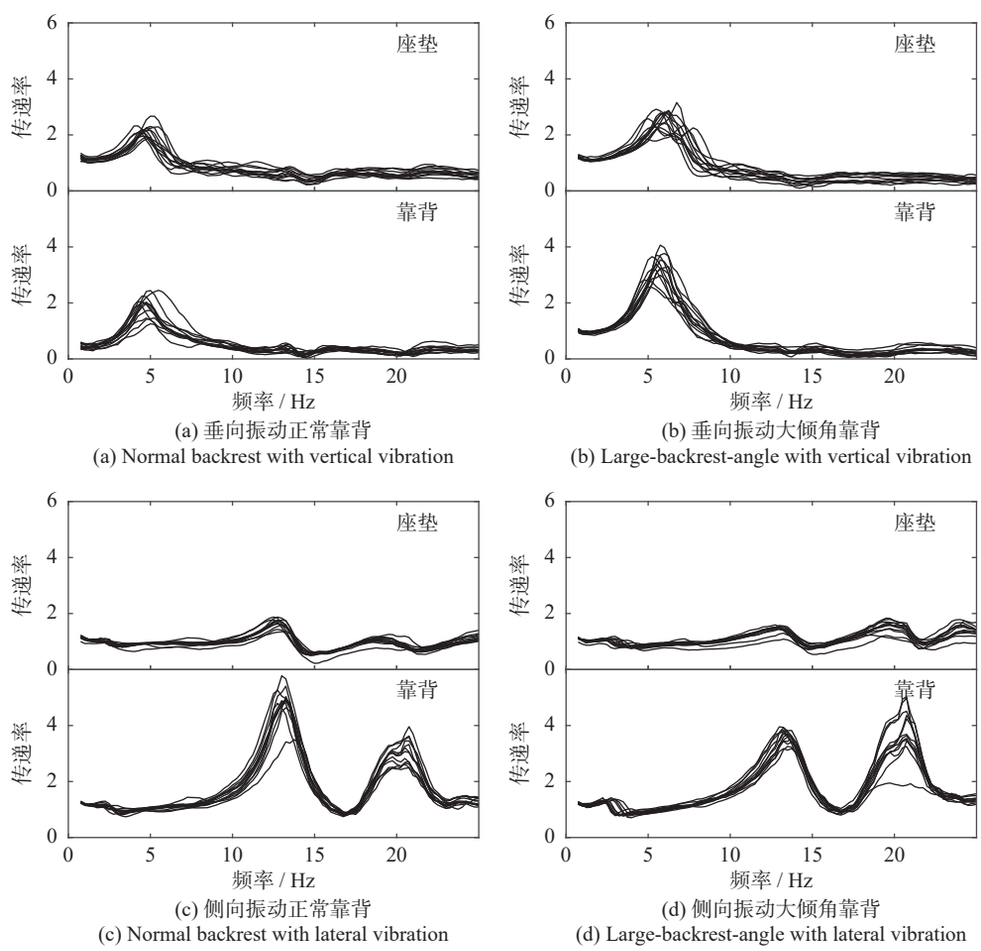
[34] CABALLERO-BRUNO I，TÖPFER D，WOHLLEBE T，et al. Assessing car seat posture through comfort and user experience[J]. Applied Sciences，2022，12(7)：3376.

[35] 尹玮倓，邱毅. 三轴振动激励下悬挂座椅垂向传递率试验研究 [J]. 声学学报，2024，49(2)：209-216.
YIN Weitan，QIU Yi. An experimental study of the vertical transmissibility of the suspension seat with tri-axis translational vibration[J]. Acta Acustica，2024，49(2)：209-216.

第一作者：粟芷馨(2000—)，女，硕士研究生。
E-mail：zhixin1215@zju.edu.cn

通信作者：刘 迟(1985—)，男，博士，研究员。
E-mail：chi.liu@zju.edu.cn

附 录



(a) 垂向振动正常靠背
(a) Normal backrest with vertical vibration

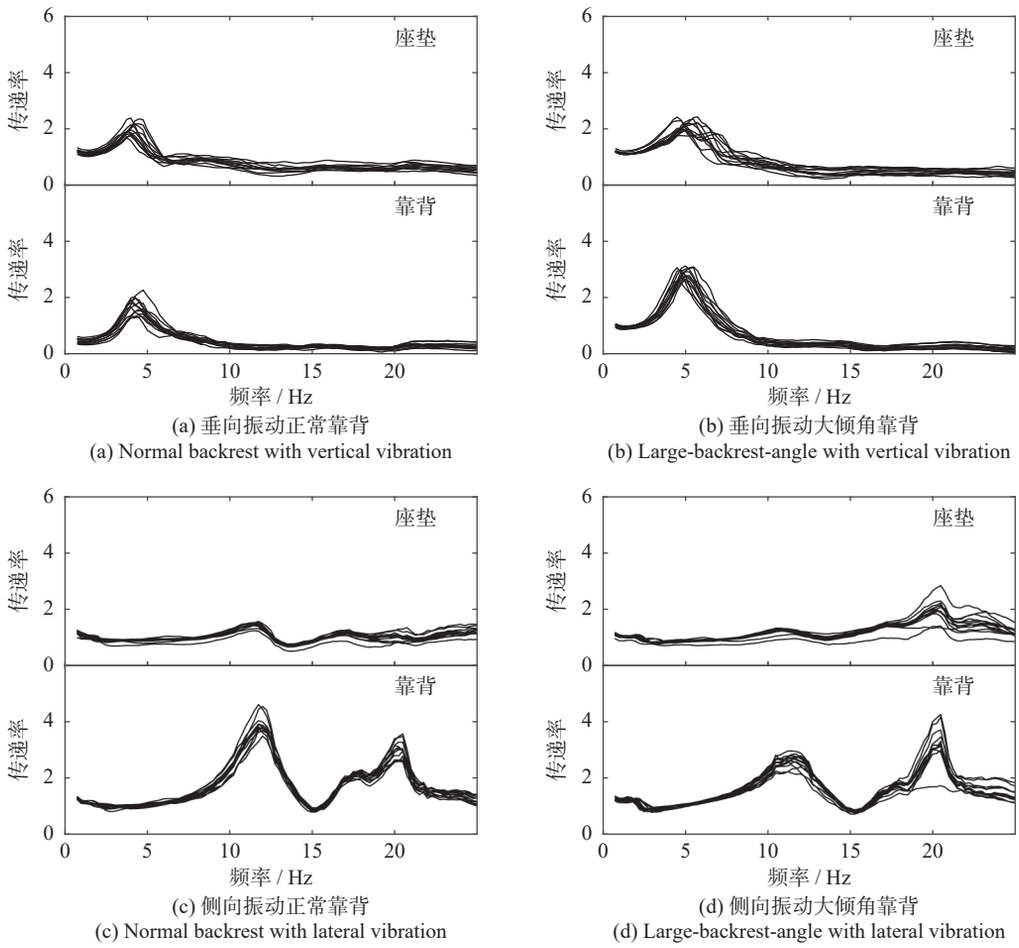
(b) 垂向振动大倾角靠背
(b) Large-backrest-angle with vertical vibration

(c) 侧向振动正常靠背
(c) Normal backrest with lateral vibration

(d) 侧向振动大倾角靠背
(d) Large-backrest-angle with lateral vibration

图 A1 0.2 m/s² r.m.s.振动激励下的座椅振动传递率

Fig. A1 Vibration transmissibility of seats under 0.2 m/s² r.m.s. vibration excitation



(a) 垂向振动正常靠背
(a) Normal backrest with vertical vibration

(b) 垂向振动大倾角靠背
(b) Large-backrest-angle with vertical vibration

(c) 侧向振动正常靠背
(c) Normal backrest with lateral vibration

(d) 侧向振动大倾角靠背
(d) Large-backrest-angle with lateral vibration

图 A2　0.8 m/s^2 r.m.s.振动激励下的座椅振动传递率

Fig. A2　Vibration transmissibility of seats under 0.8 m/s^2 r.m.s. vibration excitation

融合特征降维与人工神经网络的坐姿人体头部振动特性研究

张筱璐，陈相玉，段远飞，孙浩宇，林 森

（北京工业大学机械与能源工程学院，北京 100124）

摘要：从座椅传递至人体头部的低频振动会影响乘员的舒适性，甚至会导致晕动症等疾病。本文基于低频人体振动试验，构建一种用于预测从座椅到头部传递函数的人工神经网络模型；并针对体征参数间的耦合相关导致的模型多重共线性问题，分别采用主成分分析法和核主成分分析法对模型的体征参数特征进行降维优化，以准确预测不同乘坐环境下的座椅到头部传递函数。结果显示，在不同靠背接触条件下，经主成分分析法降维后的优化模型与反向传播人工神经网络模型相比，在预测单轴或多轴激励下座椅到头部传递函数时，预测精度均显著提升。在预测不同坐姿条件下（有、无靠背接触）座椅到头部传递函数时，融合核主成分分析法相较于融合主成分分析法的模型，预测误差分别进一步降低了 2.5% 和 28.7%，预测精度分别达到 0.9657 和 0.9676。研究表明，对于不同坐姿条件下的多轴振动激励环境，核主成分分析法比主成分分析法能够更有效地减少模型参数的冗余信息，并提高对座椅到头部传递函数的预测精度。

关键词：人体振动；座椅到头部传递函数；体征参数；人工神经网络；特征降维

中图分类号：TP393 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508081

Modeling of the seat-to-head transmissibility based on the artificial neural network and the feature dimensionality reduction method

ZHANG Xiaolu, CHEN Xiangyu, DUAN Yuanfei, SUN Haoyu, LIN Sen

（College of Mechanical and Energy Engineering，Beijing University of Technology，Beijing 100124，China）

Abstract: Low-frequency vibrations transmitted from the seat to the head of the seated individuals can impact riding comfort and even induce motion sickness. Based on the whole-body vibration experiments，artificial neural network models to predict the seat-to-head transmissibility were developed. To address the multicollinearity issue caused by anthropometric parameters and to enable accurate prediction of the seat-to-head transmissibility，the dimensionality of the anthropometric parameters in the model was optimized by employing both principal component analysis and kernel principal component analysis. The results indicate that under conditions with and without a backrest，the prediction accuracy of the seat-to-head transmissibility for single-axis or multi-axis excitation was significantly improved in the model incorporating principal component analysis，compared to the backpropagation artificial neural network model. When predicting the seat-to-head transmissibility under conditions with and without a backrest，the model fused with kernel principal component analysis exhibits further reduced prediction errors by 2.5% and 28.7%，achieving accuracies of 0.9657 and 0.9676，respectively，compared to the principal component analysis integrated model. The research suggested the kernel principal component analysis is more efficient than the principal component analysis at minimizing redundant information，thereby enhancing the prediction precision of the seat-to-head transmissibility.

Keywords: whole-body vibration; seat-to-head transmissibility; anthropometric parameters; artificial neural network; feature reduction

车辆行驶等振动环境下的人体头部振动响应可能会影响乘员的视觉功能和驾乘舒适性，甚至可能导致晕动症等疾病[1-2]。因此，构建用于预测振动环境下座椅到人体头部振动传递函数的模型，对优化座椅设计及避免人体振动损伤具有重要的实践意义。

座椅到头部传递函数（seat-to-head transmissibility，STHT）常用于量化从座椅至人体头部的振动传递特性[3]。集中参数模型、多体动力学模型和有限元模型已被广泛用于分析和预测 STHT[4]。其中，集中参数模型由质量块、阻尼和弹簧组成，多用于分析振

收稿日期：2025-08-15；**修订日期：**2025-09-27

基金项目：国家自然科学基金资助项目（51605010）

动环境下的平移运动, 而多体动力学模型可更准确地模拟分析俯仰运动[5]。有限元模型有效改进了上述两种建模方法对人体与座椅接触界面的力学行为过于简化的局限性, 但计算成本较高[6-9]。由于上述传统动力学模型的参数设定需要基于特定座椅条件以及个体体征参数的试验数据, 而驾乘人员体征参数又存在显著的个体差异性, 因此需探索泛化能力更强的建模方法。

与传统动力学建模方法相比, 人工神经网络(artificial neural network, ANN)建模方法能够通过交互式学习灵活捕获振动环境下输入特征与 STHT 间的关联[10-11]。基于上述特点, GOHARI 等[10] 采用 ANN 模型预测 STHT 垂向同轴响应, 预测精度达 95% 以上。但该模型基于刚性座椅测试条件下的试验数据构建, 而实际设计汽车座椅时需考虑包括开孔聚氨酯泡沫等弹性部件的座椅动力学特性对 STHT 的影响[12-15]。SAVELJIC 等[11] 基于 ANN 模型预测有靠背的真实汽车座椅条件下的 STHT 水平前后向同轴响应, 模型有效包含了真实人-椅接触面的力学特性。但上述 ANN 模型均集中于单轴振动激励工况, 而实际振动环境中涉及多轴振动激励, 且有研究表明单轴与多轴振动激励的 STHT 变化规律相异, 如固定水平前后向振动激励时, 附加水平左右向振动激励会提高 STHT 水平前后向同轴响应的共振处幅值[16]。上述研究表明单轴振动激励难以准确代表车辆振动环境, 将多种振动激励方向组合作为 ANN 模型输入变量有助于提高模型泛化能力和应用范围。

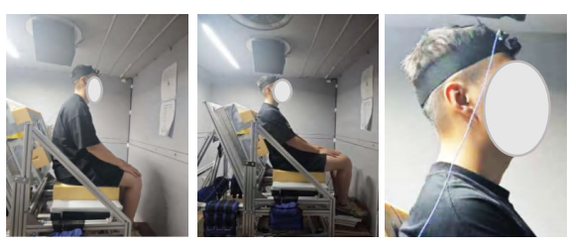
研究发现, 相同乘坐环境下性别、身高、体重等体征参数对 STHT 垂向同轴响应存在影响[17], 例如相同体重条件下, 男性的 STHT 垂向同轴共振频率显著高于女性[18]。此外, 年龄、BMI、体重等体征参数对垂向同轴座椅传递率存在影响, 例如垂向同轴座椅传递率的共振频率随着年龄的增加而增大[19]。因此, 将多个体征参数作为模型输入有助于提升模型的泛化能力, 但上述体征参数之间存在的相关性[20-21] 可能导致 ANN 模型对相似信息重复处理, 并对不同特征分配不合理的权重, 从而降低模型的预测精度。当前缺乏对 ANN 模型的输入特征降维研究, 且没有特征降维的 ANN 模型训练时间成本高[22]。因此, 合理选择降维方法以减少体征参数之间的冗余信息, 有助于提升 ANN 模型对不同乘坐环境下 STHT 的预测精度和效率。研究表明, 主成分分析法(principal component analysis, PCA)能有效分析去除输入特征的线性关联[23], 而核主成分分析法(kernel principal component analysis, KPCA)作为 PCA 的扩展, 能在高维空间中准确提取输入特征的有效信息[24], 且 PCA 和 KPCA 与机器学习模型相互融合能提高模型的预测精度和效率。

本文基于低频人体振动试验数据, 建立经主成分分析法和核主成分分析法降维优化体征参数的人工神经网络模型, 以实现对多轴振动激励时不同坐姿条件下的 STHT 的准确预测, 并对比分析不同降维方法对 STHT 的预测效果, 为进一步探究座椅到头部的传递函数和改善驾乘舒适性提供参考。

1　坐姿人体振动试验

1.1　试验方法

本试验采用六自由度振动平台, 在 1~10 Hz 范围内生成幅值为 0.4 m/s^2 r.m.s.的限宽白噪声作为激励信号, 持续 60 s(见图 1)。试验共设置 4 组激励幅值工况(见表 1), 代表轨道车辆振动环境下对驾乘舒适性影响较大的激励方向, 以及 2 组座椅工况(无靠背、倾斜靠背接触)。刚性座椅的坐垫和靠背中心位置处分别固定开孔聚氨酯泡沫(450 mm × 450 mm × 80 mm)。头部与座椅处加速度分别由两个三轴加速度计(PCB 356A16)测得, 其中头部加速度计使用自制的头带固定。



(a) 无靠背 (a) Without backrest contact　(b) 倾斜靠背 (b) With an inclined backrest　(c) 头部传感器佩戴 (c) An accelerometer fixed to the forehead

图 1　试验设置图

Fig. 1　Experimental setup diagram

表 1　试验工况

Tab. 1　Experimental conditions

序号	激励轴工况		
	*Z*激励/(m·s^{-2} r.m.s.)	*Y*激励/(m·s^{-2} r.m.s.)	Roll激励/(rad·s^{-2} r.m.s.)
1	0.4	—	—
2	0.4	0.4	—
3	0.4	—	0.4
4	0.4	0.4	0.4

本研究招募 14 名健康中国参试人员(10 男 4 女, 无骨骼肌肉疾病), 其体征参数如表 2 所示。试验前, 参试人员需阅读试验注意事项, 并在弹性座椅上静坐 5 min 以稳定聚氨酯泡沫。试验时, 参试人员坐在无靠背或倾斜靠背的座椅上, 保持上半身直立或

自然倚靠，双腿分开，双手平放在大腿上，大腿与地面平行，小腿垂直。试验管理人员通过视觉检查确保参试人员头部自然直立，以提高试验数据的可靠性。振动平台运行时，参试人员全程佩戴安全带并手握紧急制动按钮以确保试验安全。

表 2 参试人员体征参数

Tab. 2 Anthropometric parameters of participants

体征参数	最小值	最大值	均值	标准差
年龄/岁	19	31	25.70	3.84
体重/kg	51.7	90	67.94	9.78
身高/cm	158	180	171.14	6.54
BMI/(kg·m^{-2})	17.1	27.8	23.15	2.63
膝盖高/cm	39	55	48.88	3.90
臀膝长/cm	37	50	46.04	3.54
臀宽/cm	31	42	35.87	3.40

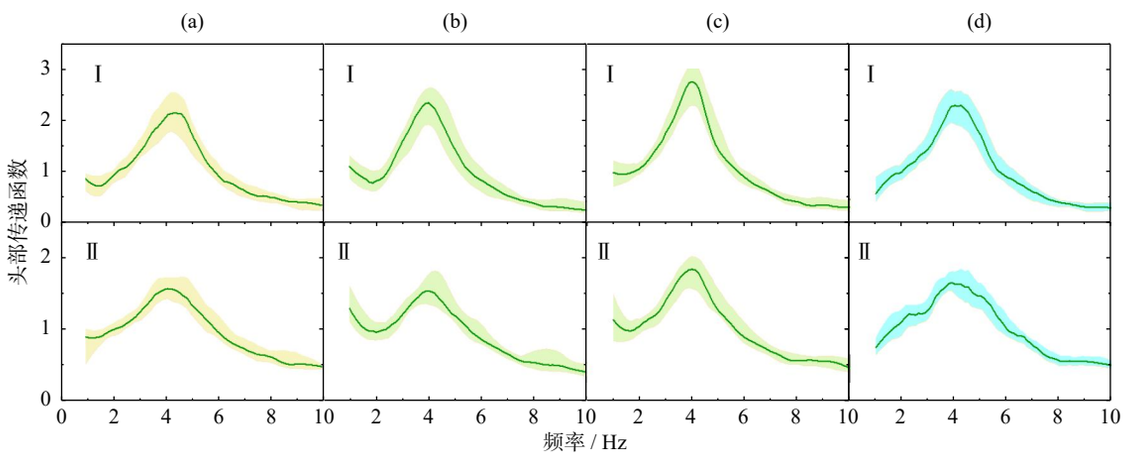
1.2 STHT

STHT 可由人体头部振动响应与座椅处输入激励计算确定。本研究采用互谱密度法 CSD(cross spectral density)定量描述 STHT，计算公式如下：

$$H(f)=\frac{G_{a_{zf}a_{zs}}}{G_{a_{zf}}} \tag{1}$$

式中，a_{zf}为座椅处测得的垂向加速度输入信号；a_{zs}为头部测得的垂向加速度输出信号；$G_{a_{zf}}$为a_{zf}的自功率谱密度；$G_{a_{zf}a_{zs}}$为a_{zs}和a_{zf}的互功率谱密度；$H(f)$为STHT幅值。

图 2 展示了在 2 种靠背工况和 4 种激励工况下的 STHT。图中展示了 14 名参试人员 STHT 的中位数曲线，并以 25% 分位数(Q1)和 75% 分位数(Q3)作为上、下界范围。试验结果表明，不同参试人员在相同工况下 Q1 和 Q3 均远离中位数，体征参数个体差异性对 STHT 有显著影响。



注：Ⅰ: 无靠背；Ⅱ: 25°倾斜靠背；(a) a_z=0.4 m/s^2 r.m.s.; (b) a_z=0.4 m/s^2 r.m.s., a_y=0.4 m/s^2 r.m.s.; (c) a_z=0.4 m/s^2 r.m.s., a_r=0.4 rad/s^2 r.m.s.; (d) a_z=0.4 m/s^2 r.m.s., a_y=0.4 m/s^2 r.m.s., a_r=0.4 rad/s^2 r.m.s.。

图 2 体征参数个体差异性对 STHT 的影响规律

Fig. 2 Influence patterns of individual variability in physiological parameters on STHT

2 STHT 预测模型建立

2.1 输入特征降维与优化

2.1.1 基于主成分分析的体征参数降维

试验研究表明，体征参数间存在关联，这可能导致模型出现多重共线性问题进而影响对 STHT 的预测精度。由于主成分分析可通过线性变换提取数据主要特征，减少参数间线性关联和降低维数[23]，因此本研究首先采用 PCA 对体征参数进行降维优化：

(1)建立体征参数样本矩阵 $\boldsymbol{X}$

$\boldsymbol{X}$包含n个体征参数，总共有m个样本，$\boldsymbol{X}$可表示为：

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

(2)标准化运算

取 $\boldsymbol{X}$ 样本中的数据，z_{ij}表示第i个样本的第j个体征参数取值。对z_{ij}进行标准化运算以消除量纲和数量级的影响：

$$\bar{z}_j=\sum_{i=1}^{m} z_{ij}/m \bar{z}_{ij}=(z_{ij}-\bar{z}_j)/s_j; i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$s_j=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(z_{ij}-\bar{z}_j)^2/(m-1)} \tag{4}$$

式中，$\bar{z}_{ij}$为标准化后的体征参数；$\bar{z}_j$和s_j分别为第j个体征参数的均值和方差。

(3)构造相关系数矩阵 $\boldsymbol{R}$

根据原始体征参数计算相关性系数r_{jk}，r_{jk}越大，

表明体征参数 j、k间的相关性越大。并根据计算结果建立相关系数矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{jk})_{m\times m}$。

$$r_{jk}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_{ij}-\bar{z}_j)(z_{jk}-\bar{z}_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_{ij}-\bar{z}_j)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_{ik}-\bar{z}_k)^2}} \tag{5}$$

式中, $\bar{z}_k$为第 k 个体征参数的均值。

(4)计算主成分得分矩阵

通过特征方程$|\boldsymbol{R}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$, 其中, λ为特征值, $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵, 求出特征值λ及其对应特征向量, 将特征向量按照对应特征值大小降序排序, 得到主成分特征向量矩阵。标准化体征参数矩阵右乘主成分特征向量矩阵得到主成分得分矩阵。

2.1.2　基于核主成分分析的体征参数降维

当体征参数间存在非线性关系时, PCA 可能无法达到理想的降维效果, 而 KPCA 具备在高维特征空间中有效过滤体征参数间相关性的能力[24]。本研究中, KPCA 运用高斯核函数将体征参数隐性映射到高维核希尔伯特空间(reproducing kernel Hilbert space, RKHS)中, 并在 RKHS 中构造核矩阵 $\boldsymbol{K}$, 其元素 $k_{ij}=k(x_i,x_j)=\exp\left(\frac{-\|x_i-x_j\|^2}{2\sigma^2}\right)$, 其中, k_{ij}表示第 i个和第 j个体征参数间的相似性, k为核函数, σ 为核参数, σ 由试错法确定为 10。最后在 RKHS 中对核矩阵$\boldsymbol{K}$执行 PCA 建模过程的步骤并计算核主成分的得分矩阵, 作为后续 ANN 模型输入特征。

2.2　BP-ANN 模型建立与超参数设置

由于本研究采用由多个神经元组成的模拟人脑神经系统的 ANN 模型预测 STHT, 模型中每个神经元通过激活函数对输入特征(年龄、性别、体重、身高、BMI、臀宽、膝盖高、臀膝长, 激励频率, 激励方向)进行变换, 从而有效捕捉不同乘坐环境下 STHT 与输入特征之间的关联。此外, 为训练该 ANN 模型, 本研究采用反向传播算法(backpropagation, BP)最小化预测值与试验值间的误差。鉴于输入特征与 STHT 间关系复杂, 模型设计为双隐藏层结构(见图 3)。

适度增加工况数量能够提升模型对不同振动应用环境的泛化能力, 但输入维度过多也可能导致过拟合现象以及模型训练过程难以收敛等困难; 同时, 样本数量的适当增加可以提高模型预测结果的稳定性, 也会增加相应试验成本。因此, 本研究选用单轴、双轴、三轴激励等典型工况建模, 并通过特征降维剔除冗余信息, 兼顾模型的代表性与鲁棒性。建模流程如图 4 所示, STHT 预测模型基于 14 名参试人员在 2 种坐姿条件(无靠背接触和倾斜靠背接触)和 4 种振动激励工况(垂向、垂向附加水平左右向、垂向附加俯仰、垂向附加水平左右向和俯仰)下的

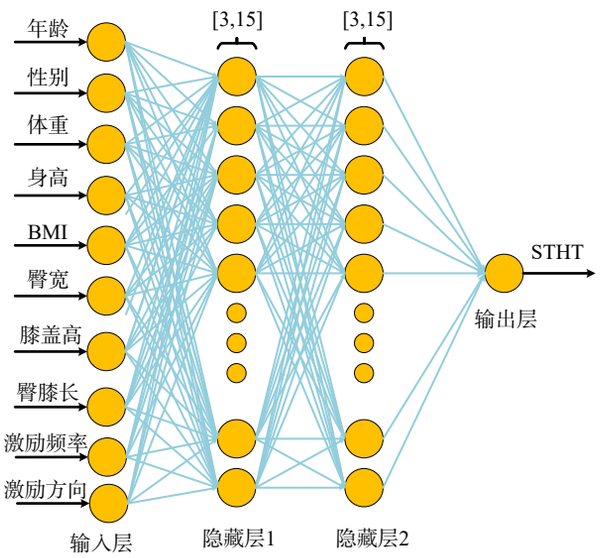


图 3　BP-ANN 模型结构示意图

Fig. 3　Structural schematic diagram of BP-ANN model

低频人体振动试验数据构建。14 名参试人员在 4 种振动激励工况条件下提供了 56 组试验数据, 每组数据在 1~10 Hz 范围内以 0.125 Hz 分辨率采集加速度信号, 共生成 4088 组独立数据。为确保模型训练的准确性和泛化能力, 数据集被划分为完全独立的子集: 3504 组训练样本, 292 组测试样本和 292 组验证样本。模型训练时, 分别为有、无靠背坐姿建立独立模型, 以准确预测不同坐姿条件下输入特征与 STHT 间的关联规律。此外, 基于经 PCA 和 KPCA 降维优化前后的体征参数数据, 分别构建 BP-ANN、PCA-BP-ANN 和 KPCA-BP-ANN 模型用以对比分析预测效果。

模型的超参数包括学习率(取值范围为 0.01~0.1, 步长为 0.01)、动量因子(取值范围为 0.1~1.0, 步长为 0.1)及第一层和第二层隐藏节点数(取值范围为 3~15, 步长为 1)。在相同设置条件下, 每个模型训练 20 次以减少随机误差, 并依据均方根误差 *RMSE*、平均绝对误差 *MAE* 和决定系数 R^2 评估模型的预测性能:

$$RMSE=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-y_i)^2} \tag{6}$$

$$MAE=\frac{1}{m}|Y_i-y_i| \tag{7}$$

$$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i-y_i)^2}{\sum_{i=1}^{m}\left(\bar{Y}_i-y_i\right)^2} \tag{8}$$

式中, Y_i表示第 i个样本的试验值; y_i表示第 i个样本的预测值; $\bar{Y}_i$表示所有样本的试验平均值。

2.3　模型预测与对比分析

2.3.1　PCA-BP-ANN 预测结果与分析

对体征参数标准化处理后, 进行皮尔逊相关性

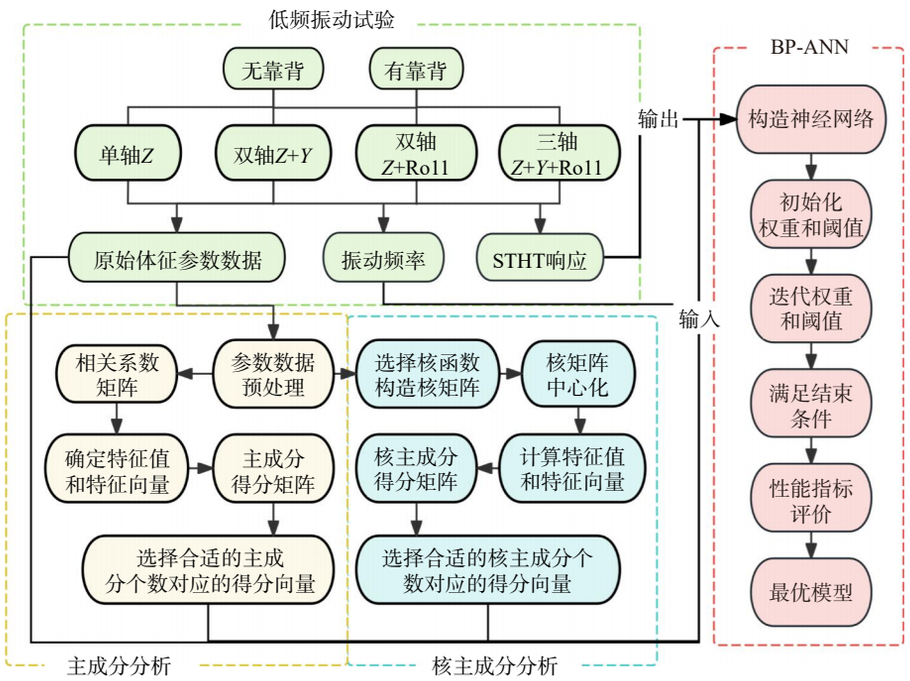


图 4 建模分析流程图

Fig. 4 Modeling and analysis flowchart

分析(见图 5),图中,p 表示显著性判断标准。结果显示,性别与身高等体征参数之间显著负相关,体重与 BMI 等显著正相关。为验证 PCA 的适用性,对标准化后的数据执行 Kaiser-Meyer-Olkin(KMO)检验,得出 KMO 系数为 0.81,说明模型对原始体征参数数据集进行 PCA 降维处理具有必要性和适用性。计算主成分的方差解释率和累积方差贡献率发现,前 4 个主成分累积方差贡献率高达 88%(见图 6)。因此,选取前 4 个主成分作为 BP-ANN 模型的输入特征。

将 PCA 降维后的体征参数(PC1、PC2、PC3、PC4)、4 种激励方向及激励频率作为 PCA-BP-ANN 模型的输入,再次进行超参数调优。模型训练过程中发现 PCA-BP-ANN 相较于 BP-ANN 模型训练时间缩减了 51%,这是因为 PCA 对体征参数降维从而降低了模型的计算复杂度。此外,采用散点图评估模型预测精度(见图 7,散点横、纵坐标分别表示试验值和预测值,参考线为 $y=x$,参考区边界为 $y=x\pm0.2$)发现:无靠背坐姿条件下,R^2 为 0.9225,87% 的预测值落入参考区,表明 87% 的预测值与试验值绝对误差不超过 0.2;有靠背坐姿条件下,R^2 为 0.9200,94% 预测值与试验值绝对误差保持在 0.2 以内,PCA-BP-ANN 模型预测的 STHT 与试验测得值具有较高的拟合度。这是因为 PCA 降维通过线性变换将多维的体征参数整合到少量独立主成分中,消除了体征参数线性相关的冗余信息。因此,PCA-BP-ANN 模型能有效捕捉影响 STHT 的体征参数关键信息,同时提升了模型的预测效率和准确性。

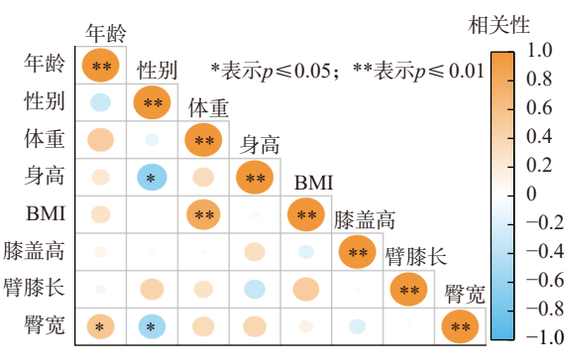


图 5 体征参数相关性热度图

Fig. 5 Heat map of the correlation between anthropometric parameters

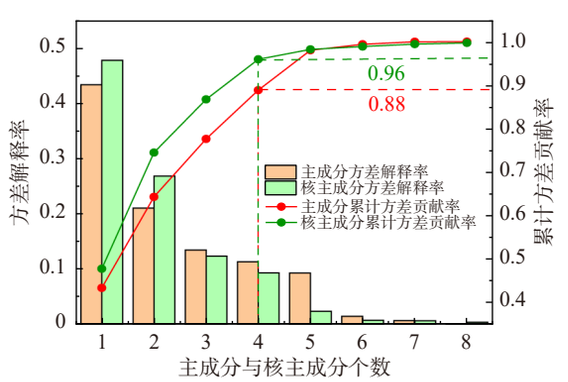


图 6 模型主成分方差解释率和累计方差贡献率

Fig. 6 Variance explanation rate and cumulative variance contribution rate of the principal components of model

2.3.2 KPCA-BP-ANN 预测结果与分析

计算核主成分的方差解释率和累积方差贡献率发现,前 3 个核主成分的累积方差贡献率为 86%,比

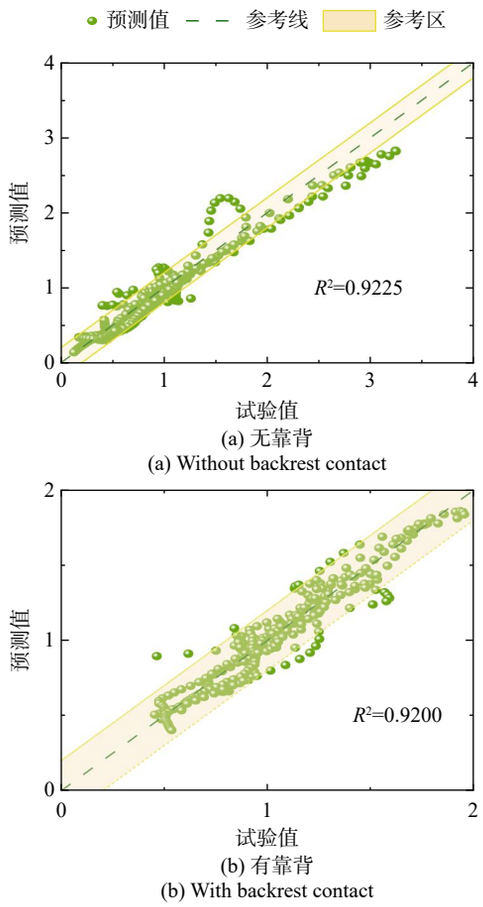


图 7　PCA-BP-ANN 最佳模型预测头部传递函数的试验值-预测值散点图

Fig. 7　Scatter diagrams of the experimental data and predicted data from the PCA-BP-ANN model for STHT

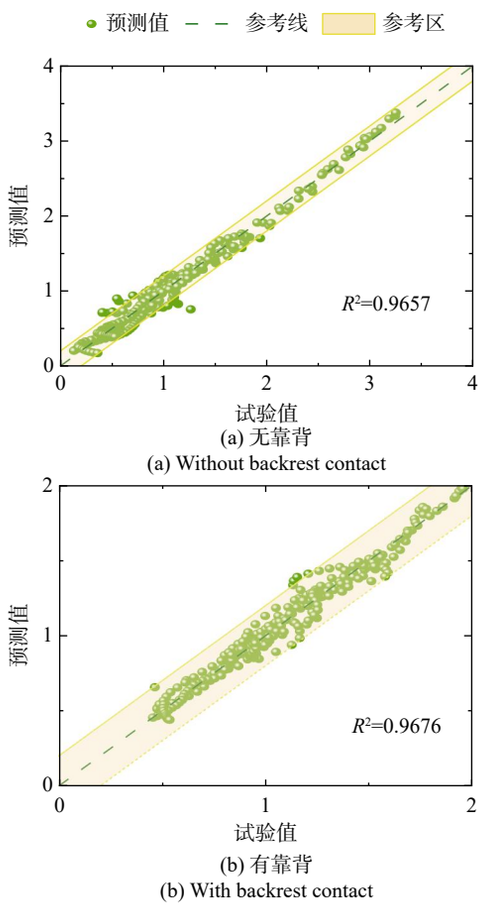


图 8　KPCA-BP-ANN 最佳模型预测头部传递函数的试验值-预测值散点图

Fig. 8　Scatter diagrams of the experimental data and predicted data from the KPCA-BP-ANN model for STHT

前 3 个主成分的累计方差贡献率高 9%, 且仅比前 4 个主成分的累计方差贡献率低 2%。前 4 个核主成分的累计方差贡献率更是达到 96%, 比前 4 个主成分高出 8%(见图 6), 表明 KPCA 能够更有效地捕捉体征参数的主要信息。为和 PCA 进行横向降维效果对比, 可选取前 4 个核主成分作为 BP-ANN 模型的输入特征。

对使用 KPCA 降维后的体征参数再次进行超参数调优和模型训练, 发现 KPCA-BP-ANN 与 PCA-BP-ANN 模型训练时间基本一致, 这可能是因为 PCA 和 KPCA 均把体征参数降到 4 维, 两个模型复杂度相似。图 8(散点横、纵坐标分别表示试验值和预测值, 参考线为 $y=x$, 参考区边界为 $y=x\pm0.2$)散点分布表明, 在有、无靠背坐姿条件下, KPCA-BP-ANN 对 STHT 进行预测拟合度较高, R^2 分别达到 0.9657 和 0.9676, 99% 的预测值与试验值的绝对误差均小于 0.2。这是因为 KPCA 将原始体征参数映射到 RKHS 中并确定体征参数间的非线性关联, 有效解决了 BP-ANN 模型出现多重共线性问题, 进而提升了模型的预测效果。

2.3.3　模型预测性能对比与分析

将 PCA-BP-ANN、KPCA-BP-ANN 和 BP-ANN 模型的预测结果与试验结果进行综合对比分析可知, 2 种坐姿条件下 3 种模型预测的 STHT 变化趋势均与试验结果保持一致(见图 9), 说明尽管上述模型在数据处理和特征提取方面有所差异, 但均能基本反映振动传递过程的关键特征, 并准确预测不同工况下的系统振动传递特性。

进一步对比 3 种模型对 STHT 共振频率及共振处幅值的预测发现: 对于无靠背坐姿, KPCA-BP-ANN 模型预测的 STHT 共振频率和幅值与试验结果基本吻合, 而 PCA-BP-ANN 和 BP-ANN 模型的 STHT 共振频率预测值均比试验值略低, 共振幅值则分别比试验值高 0.24 和 0.22, 且 BP-ANN 模型在 6~8 Hz 频率范围内的幅值最大预测误差为 0.38(见图 9(a)); 对于有靠背坐姿, KPCA-BP-ANN 模型的 STHT 共振频率预测值与试验值基本一致, 而 PCA-BP-ANN 和 BP-ANN 模型的共振频率预测值分别比试验值低 0.375 Hz 和 0.125 Hz, 且共振幅值预测值分别比试验值高 0.05 和低 0.26(见图 9(b))。综上说明, KPCA-BP-ANN 模型在共振频率和共振幅值预测方面表现最佳, PCA-BP-ANN 次之。此外, 相较于无靠背坐姿, 有靠背坐姿条件下 PCA-BP-ANN 和 KPCA-BP-ANN 模型的 STHT

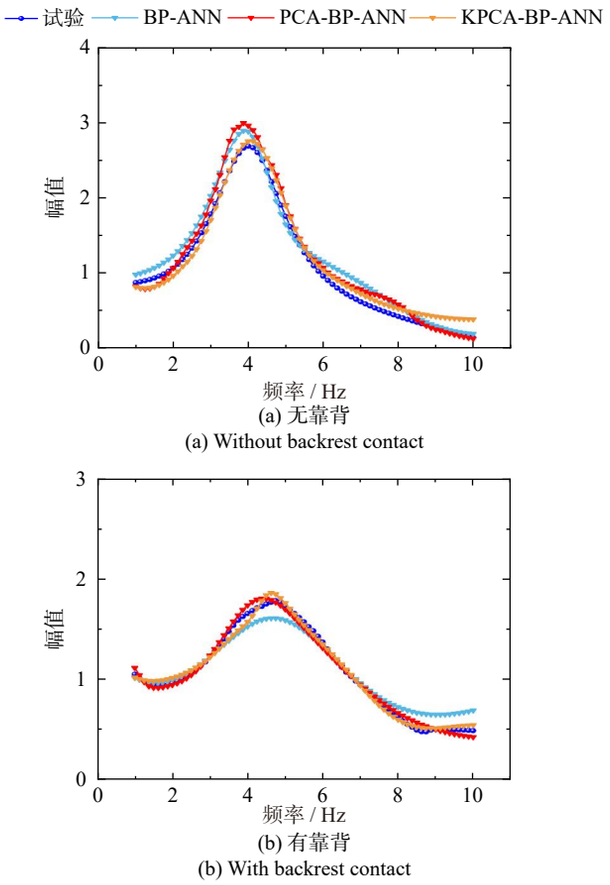


图 9 不同模型的 STHT 预测结果与试验结果的对比

Fig. 9 Comparison of experimental data and predicted data for STHT from various models

预测值与试验值的最大绝对误差均更小(见图 7 和 8),这是因为靠背接触约束了人体上身的俯仰运动,减小了数据波动性。

进一步利用 *RMSE*、*MAE* 和 R^2 三项客观指标量化评估体征参数降维对 BP-ANN 模型预测改进效果,能够从整体层面反映模型的拟合精度,并与图 9 中曲线的直观趋势相互补充。对于无靠背坐姿,PCA-BP-ANN 相较于 BP-ANN 模型,训练集和测试集的 *RMSE* 分别下降 2.7% 和 40.7%, *MAE* 分别下降 7.1% 和 35.5%, R^2 分别上升 5.3% 和 3.9%; 而 KPCA-BP-ANN 相较于 PCA-BP-ANN 模型,训练集和测试集的 *RMSE* 分别下降 34.9% 和 2.5%, *MAE* 分别下降 43.2% 和 18.2%, R^2 分别上升 4.0% 和 5.4%。对于有靠背坐姿, PCA-BP-ANN 相较于 BP-ANN 模型,训练集和测试集的 *RMSE* 分别下降 30.0% 和 25.9%, *MAE* 分别下降 22.9% 和 25.2%, R^2 分别上升 3.4% 和 7.7%; 而 KPCA-BP-ANN 相较于 PCA-BP-ANN 模型,训练集和测试集的 *RMSE* 进一步分别下降 26.3% 和 28.7%, *MAE* 进一步分别下降 27.4% 和 28.5%, R^2 进一步分别上升 2.0% 和 5.5%(见表 3)。这得益于 KPCA 能够在高维空间中处理体征参数间的非线性特征,而 PCA 则主要侧重于体征参数的线性降维。

表 3 BP-ANN、PCA-BP-ANN 和 KPCA-BP-ANN 模型的预测性能

Tab. 3 Prediction performance of the BP-ANN、PCA-BP-ANN and KPCA-BP-ANN models

	数据集		BP-ANN	PCA-BP-ANN	KPCA-BP-ANN
无靠背 STHT	训练集	*RMSE*	0.1811	0.1763	0.1130
		MAE	0.1381	0.1283	0.0854
		R^2	0.8951	0.9480	0.9786
	测试集	*RMSE*	0.3178	0.1886	0.1804
		MAE	0.2466	0.1590	0.1546
		R^2	0.8837	0.9225	0.9657
有靠背 STHT	训练集	*RMSE*	0.1599	0.1120	0.0699
		MAE	0.1111	0.0857	0.0522
		R^2	0.9369	0.9690	0.9874
	测试集	*RMSE*	0.1389	0.1029	0.0631
		MAE	0.1051	0.0786	0.0487
		R^2	0.8544	0.9200	0.9676

3 结 论

本研究以多轴低频(1~10 Hz)人体振动试验为基础,构建了一种能够准确预测 STHT 的人工神经网络模型,并针对体征参数间相关性导致的模型多重共线性问题,分别采用 PCA 和 KPCA 对体征参数进行降维优化。研究结果表明,在预测不同坐姿条件下的 STHT 时,与 BP-ANN 模型相比,经主成分分析优化后的 PCA-BP-ANN 模型的预测精度得到显著提升,而经核主成分分析优化后的 KPCA-BP-ANN 模型的预测精度可进一步提升至 0.9676 和 0.9657。相较于无靠背坐姿,有靠背坐姿时的 PCA-BP-ANN 和 KPCA-BP-ANN 模型预测值与试验值的最大绝对误差均更小。未来研究可尝试通过扩大样本量并涵盖更广泛的变量范围,以探索加强模型的泛化能力,并通过引入可解释性工具(如 SHAP、决策树等)以进一步量化体征参数对座椅到头部传递函数预测精度的影响规律并提升模型鲁棒性。

参考文献:

[1] ZHAO Y L, BI F R, KHAYET M, et al. Study of seat-to-head vertical vibration transmissibility of commercial vehicle seat system through response surface method modeling and Genetic Algorithm[J]. Applied Acoustics, 2023, 203: 109216.

[2] 林杰威, 李蒙, 郭智, 等. 垂向振动下坐姿人体局部频率敏感特性研究 [J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2024, 57(5): 482-488.
LIN Jiewei, LI Meng, GUO Zhi, et al. Research on local frequency-dependence of seated human body under vertical vibration[J]. Journal of Tianjin University(Science and Technology), 2024, 57(5): 482-488.

[3] BHIWAPURKAR M K, SARAN V H, HARSHA S P.

Effects of posture and vibration magnitude on seat to head transmissibility during exposure to fore-and-aft vibration[J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2019, 38(2): 826-838.

[4] 石霄鹏，钟欣言，牟浩蕾，等. 垂向冲击下的民机乘员腰椎载荷研究 [J]. 航空学报，2024，45(8)：192-209.
SHI Xiaopeng, ZHONG Xinyan, MOU Haolei, et al. Lumbar load of seated occupant under vertical impact[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2024, 45(8): 192-209.

[5] 张志飞，胡正权，徐中明，等. 面向振动响应特性的坐姿人体动力学模型 [J]. 振动与冲击，2016，35(4)：104-109.
ZHANG Zhifei, HU Zhengquan, XU Zhongming, et al. A dynamic model of a seated human body based on dynamic response[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(4): 104-109.

[6] YADAV S K, HUANG C, MO F H, et al. Analysis of seat cushion comfort by employing a finite element buttock model as a supplement to pressure measurement[J]. International Journal of Industrial Ergonomics, 2021, 86: 103211.

[7] 张文会，伊静，刘委，等. 基于 MADYMO 的大客车追尾碰撞事故乘员损伤机理 [J]. 吉林大学学报(工学版)，2022，52(1)：118-126.
ZHANG Wenhui, YI Jing, LIU Wei, et al. Injury mechanism of occupants in bus during rear-end crash based on MADYMO[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2022, 52(1): 118-126.

[8] DONG R C, GUO L X. Human body modeling method to simulate the biodynamic characteristics of spine in vivo with different sitting postures[J]. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 2017, 33(11): e2876.

[9] 高振海，高菲，沈传亮，等. 汽车椅面倾角对驾驶员乘坐舒适性的影响分析 [J]. 湖南大学学报(自然科学版)，2017，44(8)：43-49.
GAO Zhenhai, GAO Fei, SHEN Chuanliang, et al. Analyses of driver sitting comfort in different automotive seat-pan angle[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2017, 44(8): 43-49.

[10] GOHARI M, RAHMAN R A, RAJA R I, et al. A novel artificial neural network biodynamic model for prediction seated human body head acceleration in vertical direction[J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2012, 31(3): 205-216.

[11] SAVELJIC S M, ARSIC B, SAVELJIC I, et al. Artificial neural network for prediction of seat-to-head frequency response function during whole body vibrations in the fore-and-aft direction[J]. Tehnicki Vjesnik-Technical Gazette, 2022, 29(6): 2001-2007.

[12] 陈长，梁远路，薛博阳，等. 车辆振动特征与人体乘坐舒适性的关系 [J]. 同济大学学报(自然科学版)，2020，48(7)：1007-1015.
CHEN Zhang, LIANG Yuanlu, XUE Boyang, et al. Relationship between vehicle vibration characteristics and human ride comfort[J]. Journal of Tongji University (Natural Sciences), 2020, 48(7): 1007-1015.

[13] 范沁红，江星辰，武学良，等. 基于理想压力的机车座椅优化设计与舒适度试验研究 [J]. 机械工程学报，2022，58(10)：383-394.
FAN Qinhong, JIANG Xingchen, WU Xueliang, et al. Experimental research on optimization design and comfort of locomotive seat based on ideal pressure[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(10): 383-394.

[14] LANTOINE P, LECOCQ M, BOUGARD C, et al. Car seat impact on driver's sitting behavior and perceived discomfort during prolonged real driving on varied road types[J]. PLoS One, 2021, 16(11): e0259934.

[15] ZHANG X L, ZHANG Q Y, LI Y J, et al. Effect of the thickness of polyurethane foams at the seat pan and the backrest on fore-and-aft in-line and vertical cross-axis seat transmissibility when sitting with various contact conditions of backrest during fore-and-aft vibration[J]. Applied Ergonomics, 2021, 93: 103354.

[16] MANDAPURAM S, RAKHEJA S, BOILEAU P É, et al. Apparent mass and seat-to-head transmissibility responses of seated occupants under single and dual axis horizontal vibration[J]. Industrial Health, 2010, 48(5): 698-714.

[17] SINGH A, NAWAYSEH N, RAKHEJA S. Ensemble modeling for predicting head vibration based on driving seating conditions: towards adaptive seating systems[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2025, 145: 110174.

[18] DEWANGAN K N, SHAHMIR A, RAKHEJA S, et al. Vertical and fore-aft seat-to-head transmissibility response to vertical whole body vibration: gender and anthropometric effects[J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2013, 32(1-2): 11-40.

[19] MARTONKA R, PFLIEGEL V. Transmission mechanical vibrations in the car seat in the laboratory conditions[J]. Current Methods of Construction Design, 2020, 35: 351-356.

[20] DEWANGAN K N, RAKHEJA S, MARCOTTE P. Gender and anthropometric effects on whole-body vibration power absorption of the seated body[J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2018, 37(2): 167-190.

[21] TOWARD M G R, GRIFFIN M J. The transmission of vertical vibration through seats: influence of the characteristics of the human body[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(26): 6526-6543.

[22] ALSHABI M, NAWAYSEH N, BETTAYEB M. Hybrid artificial genetic-neural network model to predict the transmission of vibration to the head during whole-body vibration training[J]. Journal of Vibroengineering, 2020, 22(3): 705-720.

[23] SUN Y Y, SHAN H T, ZHANG W J, et al. Reliability prediction of distribution network based on PCA-GA-BP neural network[C]//Proceedings of AIP Conference Proceedings. Hohhot: AIP Publishing, 2019, 2154(1): 020048.

[24] ZHANG X Y, QIN X Y, LEI J, et al. A novel method on recognizing drum load of elastic tooth drum pepper harvester based on CEEMDAN-KPCA-SVM[J]. Agriculture, 2024, 14(7): 1114.

通信作者：张筱璐(1984—)，男，博士，副教授。
E-mail: xiaolu.zhang@bjut.edu.cn

多轴振动对坐姿人体视在质量的影响研究

匡 昊[1]，邱 毅[1,2]，刘 迟[1]，郑 旭[1]

（1. 浙江大学能源工程学院，浙江 杭州 310013；2. 福耀科技大学运载与智慧交通学院，福建 福州 350109）

摘要：研究坐姿人体在多轴振动下的视在质量对于指导农业和工业机械的减振设计具有重要意义。然而，多轴振动的频率、方向和振幅对视在质量的影响机理尚不明确。本研究测量了 13 名受试者在纵向（x）、横向（y）、垂向（z）和俯仰（p）振动组合激励下人体的视在质量，并量化了各方向振动对人体生物动力学响应的贡献。结果表明，在多直线轴（x、y 和 z）和多直线轴耦合俯仰（x、y、z 和 p）振动下，人体 x、y 和 z 向的生物动力学响应都主要受其同向振动输入的影响。在多轴振动与单轴振动下，人体在座椅座板处 x、y 和 z 向的视在质量共振频率之间存在显著差异。基于多轴振动加权和线性回归算法，建立了多轴振动下人体视在质量共振频率的预测模型，并通过粒子群优化算法确定了预测模型中各向振动的最优权重组合。

关键词：多轴振动；坐姿人体；生物动力学；振动舒适性

中图分类号：U461.4；TP393 **文献标志码：**A DOI：10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508085

Effect of multi-axis vibration on the apparent mass of seated human body

KUANG Hao[1], QIU Yi[1,2], LIU Chi[1], ZHENG Xu[1]

（1.College of Energy Engineering，Zhejiang University，Hangzhou 310013，China；
2.School of Vehicles and Intelligent Transportation，Fuyao University of Science and Technology，Fuzhou 350109，China）

Abstract: Studying the apparent mass of the seated human body exposed to multi-axis vibration is important in guiding vibration reduction designs of agricultural and industrial machinery. However，the effect of frequency，direction，and magnitude of multi-axis vibration on the apparent mass is not well understood. In this study，the apparent masses of 13 subjects exposed to stimuli with various combinations of vibration in fore-aft (x)，lateral (y)，vertical (z)，and pitch (p) directions were measured，and the contribution of vibration in each direction to biodynamic response was quantified. The results showed that the resonance frequencies of apparent mass in x，y，and z directions at the seat pan with multi-axis vibration excitation differed significantly from those with single-axis vibration excitation. With tri-axial (x，y，and z) and four-axis (x，y，z，and p) vibration，the forces in x，y，and z directions at the seat pan were dominated by the in-line vibration，respectively. For predicting the resonance frequencies of the apparent mass with multi-axis vibration excitation，the method of calculating the magnitude of multi-axis vibration with weighting factors for vibration in each direction was applied，and an optimal combination of weightings that makes the magnitude of multi-axis vibration have a higher correlation with the resonance frequency of apparent mass was obtained by the optimization algorithm.

Keywords: multi-axis vibration; seated human body; biodynamics; vibration comfort

在汽车、火车、飞机、轮船等交通工具的行驶过程中，人体通常会受到多轴向振动的影响，包括纵向、横向、垂向的直线轴振动，以及侧倾、俯仰、偏航的角振动。在工程机械、农用和越野等车辆中，驾乘人员会长期暴露在以纵向、横向、垂向和俯仰振动为主的高幅值多轴振动激励下。这种恶劣的驾乘环境会对人员的生理和心理健康造成显著的负面影响[1-3]，甚至导致不可逆的身心损伤。研究坐姿人体在纵向、横向、垂向和俯仰振动耦合激励下的生物动力学响应特性，对于降低车辆振动、提高驾乘人员的乘坐舒适性具有重要意义。

在人体生物动力学的研究中，诸如视在质量之类的频率响应函数已被广泛用于表征人体在振动下的动态响应。视在质量定义为以人-座椅接触面上的振动加速度信号为输入，力信号为输出计算得到的频响应函数。对于坐姿人体而言，视在质量的共振频率对应于人体的模态频率[4-6]，在该频率下放大的振动会引起人体极大的不适。由于实验条件的限制，以往大多数研究都集中于人体在单轴振动下的视在质量特性。当坐姿人体受到纵向、横向和垂向的单轴振动时，人体在座椅座板处的直线轴视在质量（振动输入和力响应同向）的主共振频率分别在

收稿日期：2025-08-15；**修订日期：**2025-09-22

2~4、1~3 和 4~6 Hz 之间[7]。然而，由于人体为复杂的非线性力学系统，其在多轴振动下的动力学响应不能简单地通过线性叠加单轴振动下的动力学响应来表征[7-9]。MANDAPURAM 等[10]对比了不同频率响应估计方法计算得到的多轴振动与单轴振动下人体的视在质量，指出不同方法计算结果之间存在差异是由于人体的生物动力学响应受到了多轴振动输入耦合效应的影响。WU 等[11]测量了侧倾、横向和垂向耦合激励下坐姿人体在人-座椅界面上的动态力响应，并对比了单输入单输出 (single-input and single-output, SISO) 和多输入单输出 (multi-input and single-output, MISO) 方法计算得到的人体视在质量，结果表明 MISO 方法更适用于计算具有多个相干振动输入的人体视在质量。

探究人体在多轴振动下的视在质量特性对于提高驾乘人员的舒适性具有重要意义，但目前大多数研究主要关注多直线轴振动工况。然而，角振动激励也会对驾驶员的身心健康产生显著影响，尤其是俯仰方向的振动激励[12]。WYLLIE 等[13]探究了 12 名受试者在低频纵向和俯仰振动下的舒适性变化规律，结果显示人体对纵向和俯仰振动有着不同的感知机制，这表明在评估多轴振动下坐姿人体的舒适性时，应分别考虑纵向和俯仰振动的效应。振动环境下坐姿人体的舒适性与生物动力学响应间存在明显的相关性[14]，然而目前坐姿人体在多直线轴和俯仰耦合振动下的生物动力学响应特性仍未探明，难以为车辆的振动舒适性优化提供指导。

本研究的目的在于确定在多直线轴耦合俯仰振动下与在单轴振动下坐姿人体视在质量之间的差异，探究振动轴向、幅值和频率特性对坐姿人体生物动力学响应的影响规律，并为车辆减振优化提供有价值的指导建议。

1　多轴振动下人体生物动力学试验

1.1　试验仪器

试验在浙江大学声学振动与人因工程实验室内使用六自由度振动试验台进行，如图 1 所示。

如图 2 所示，试验时，在振动台面固定了一个刚性座椅，用于采集人体的生物动力学响应。在低于 25 Hz 的频率范围内，该刚性座椅没有振动模态。试验进行全程中，受试者需系好安全带，以正常直立的姿势坐在刚性座椅上，背部倚靠于竖直靠背之上。刚性座椅的座板和靠背分别安装了一个三轴测力板和一个三轴力传感器，分别用于测量座面和靠背处的动态力响应，其中测力板型号为 Kistler 9281 B 型，力传感器型号为熙源电子科技有限公司 L3010 型力传感器。除此之外，在测力板和靠背的中心位置各自安装了 2 个三向加速度坐垫传感器，型号为 PCB 356B41，用于测量座板和靠背处的加速度；在振动台的地板上安装了 1 个三向加速度传感器，型号为 356A17，用于测量地板上的加速度。信号采集使用具有 24 个通道的 LMS SCADAS 移动式设备，采样频率为 400 Hz。

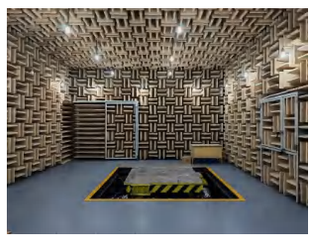


图 1　半消声室内的六自由度振动台

Fig. 1　The six-axes vibrator at the semi anechoic laboratory

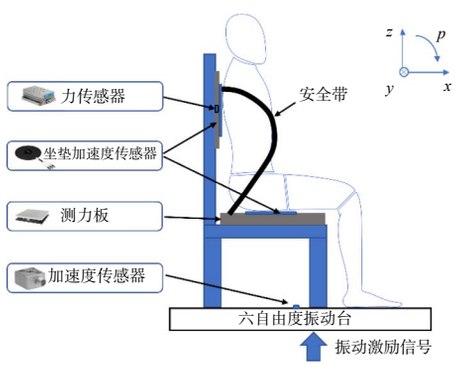


图 2　实验仪器布置示意图

Fig. 2　The diagram of the experimental setup

1.2　受试者

共有 13 名受试者参与了此次试验，皆为浙江大学的在校学生，他们的平均年龄为 22.9 岁（年龄范围为 20~30 岁，标准差为 3.1 岁），平均身高为 171.5 cm（身高范围为 160~182 cm，标准差为 5.7 cm），平均体重为 68.8 kg（体重范围为 50~81 kg，标准差为 9.7 kg）。在进行试验前，所有受试者均需确认没有任何以振动为诱因的身体疾病或认知障碍，并签署了试验健康安全协议。本试验研究获得了浙江大学科技伦理委员会的批准。

1.3　试验流程

试验中共设计并使用了 51 个振动激励，包括不同加速度均方根值的单轴、双轴、三轴和四轴振动信号，具体信息如表 1 所示。所有振动激励均为宽频白噪声振动信号，频率范围均为 0.5~20 Hz，时长均为 50 s。其中，单轴振动信号幅值为 0.4、0.8、1.2 m/s^2，多轴振动信号由不同轴向的幅值为 0.4、0.8、1.2 m/s^2 的组合构成（考虑到试验安全性，使用的四轴振动信号没有包括单一轴向振动幅值为 1.2 m/s^2 的信号）。

在试验过程中，以随机顺序对每位受试者播放振动激励信号。

表 1 试验中所使用的振动激励信号

Tab. 1 Vibration stimuli used in the experiment

激励信号	振动加速度幅值/(m·s^{-2})			
	纵向(x)	横向(y)	垂向(z)	俯仰(p)
1	0.4			
2	0.8			
3	1.2			
4		0.4		
5		0.8		
6		1.2		
7			0.4	
8			0.8	
9			1.2	
10				0.4
11				0.8
12				1.2
13			0.4	0.4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
33	1.2	1.2		
34	0.4		0.8	0.4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
42	0.8	0.8	0.8	
43	0.4	0.4	0.8	0.4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
51	0.8	0.8	0.8	0.8

2 数据分析与处理

2.1 视在质量

采用传统的单输入单输出系统，视在质量$M(f)$的计算公式为：

$$M(f)=\frac{G_{xy}(f)}{G_{xx}(f)} \tag{1}$$

式中，$G_{xy}(f)$为输入振动信号$X(t)$与输出力信号$Y(t)$的互功率谱；$G_{xx}(f)$为输入振动信号$X(t)$的自功率谱。输入信号与输出信号的相干函数可表示为：

$$\gamma_{xy}^2(f)=\frac{\left|G_{xy}(f)\right|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)} \tag{2}$$

式中，$\gamma_{xy}^2(f)$为相干函数。该相干函数可用于在频域中描述输入信号与输出信号之间的相关性。

对于多输入单输出系统，采用单输入单输出的方法会导致对视在质量的估计出现偏差[15]。特别地，当存在q个相关输入信号时，使用多输入单输出方法的视在质量$M_{iy}(f)(i=1,2,3,\cdots,q)$为：

$$M_{iy}(f)=\frac{G_{iy\cdot(i-1)!}(f)}{G_{ii\cdot(i-1)!}(f)} \tag{3}$$

式中，$G_{iy\cdot(i-1)!}(f)$为输入信号$X_{i\cdot(i-1)!}(t)$与输出信号$Y(t)$之间的互功率谱，而$X_{i\cdot(i-1)!}(t)$为去除了前$i-1$个输入信号$X_1(t), X_2(t), X_3(t),\cdots, X_{i-1}(t)$的线性影响后的第$i$个输入信号$X_i(t)$；$G_{ii\cdot(i-1)!}(f)$为输入信号$X_{i\cdot(i-1)!}(t)$的自功率谱。$G_{iy\cdot(i-1)!}(f)$和$G_{ii\cdot(i-1)!}(f)$可通过迭代算法[16]获得。输入信号$X_{i\cdot(i-1)!}(t)$与输出信号$Y(t)$之间的相关性可以通过偏相干函数来描述，其表达式为：

$$\gamma_{iy\cdot(i-1)!}^2=\frac{\left|G_{iy\cdot(i-1)!}\right|^2}{G_{ii\cdot(i-1)!}G_{yy}} \tag{4}$$

式中，G_{yy}为输出信号$Y(t)$的自功率谱。偏相干性$\gamma_{iy\cdot(i-1)!}^2$可用于描述在去除输入信号$X_1(t), X_2(t), X_3(t),\cdots, X_{i-1}(t)$的线性影响后，输入信号$X_i(t)$与输出信号$Y(t)$之间的相干性。对于具有$q$个输入的多输入单输出系统，多重相干性为：

$$\gamma_{y:q!}^2=\sum_{i=1}^{q}\gamma_{iy\cdot(i-1)!}^2 \tag{5}$$

多重相干性可以作为所有输入信号与输出信号相干性的度量。基于偏相干性和多重相干性，对于具有q个输入信号的多输入单输出系统，输出信号的自功率谱可以表示为：

$$G_{yy}=\gamma_{y:q!}^2G_{yy}+G_{nn}=\sum_{i=1}^{q}\gamma_{iy\cdot(i-1)!}^2G_{yy\cdot(i-1)!}+G_{nn} \tag{6}$$

式中，G_{nn}为噪声信号$N(t)$的自功率谱；$G_{yy\cdot(i-1)!}$为输出信号$Y(t)$移除前$i-1$个输入信号的线性影响后的自功率谱。在去除输入信号$X_1(t), X_2(t), X_3(t),\cdots, X_{i-1}(t)$的线性影响后，输入信号$X_i(t)$对输出信号$Y(t)$的贡献可以用偏相干输出功率谱来表示：

$$P_{y:i\cdot(i-1)!}=\gamma_{iy\cdot(i-1)!}^2G_{yy\cdot(i-1)!} \tag{7}$$

同时，式(6)可以表示为：

$$G_{yy}=\sum_{i=1}^{q}P_{y:i\cdot(i-1)!}+G_{nn} \tag{8}$$

2.2 非参数统计分析

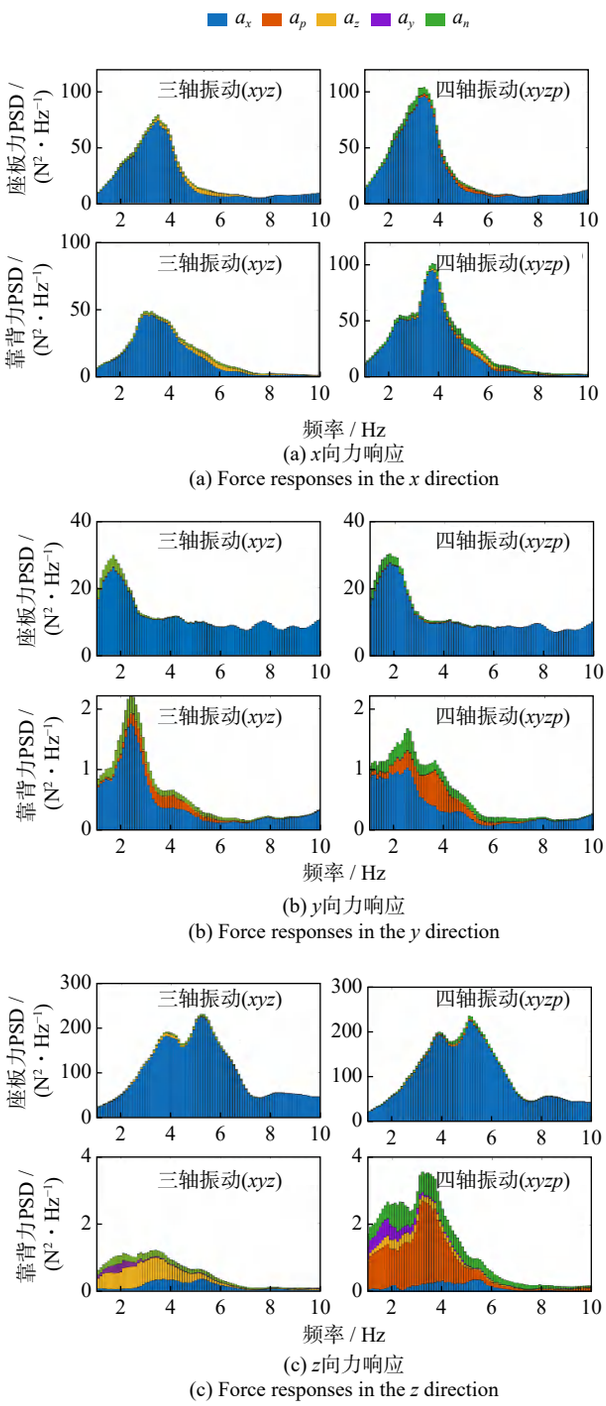
采用 Wilcoxon 配对符号秩检验和 Friedman 检验来检验坐姿人体在不同振动激励下视在质量是否存在显著差异。Wilcoxon 配对符号秩检验用于确定两个独立样本的中位差是否为零，而 Friedman 检验用于检验多个样本分布是否存在显著差异。Pearson 相关性检验用于确定视在质量的共振频率与振动幅值之间的相关性。在本研究中，分别使用 Matlab 中的“signrank”“friedman”和“corr”函数来执行 Wilcoxon 配对符号秩检验、Friedman 检验和 Pearson 相关性检验，显著性水平均取值为 0.05。

3 结果与讨论

3.1 振动输入对人-座椅接触面上力响应的贡献量分析

根据第 2.1 节中提出的方法，可以计算得到不同

方向振动输入对人-座椅接触面力响应的贡献量。图 3 展示了在三轴（x、y 和 z）和四轴（x、y、z 和 p）振动下坐姿人体在座板和靠背处力响应的功率谱密度（power spectral density, PSD）。根据偏相干性的计算，需要对输入源进行排序，各振动输入参考文献 [11] 中的方法进行排序后（以输入与响应信号之间的相干性大小从高到低进行排序），如每个图中图例显示顺序所示，例如对于座板处的 x 向力响应，输入的振动加速度排序顺序为：a_x、a_y、a_z、a_p 和 a_n，分别为 x、y、z 和 p 向的振动加速度信号及系统的噪声信号。



(a) x向力响应
(a) Force responses in the x direction

(b) y向力响应
(b) Force responses in the y direction

(c) z向力响应
(c) Force responses in the z direction

注：图中右上角文字对应不同的多轴振动工况，图例对应各轴的振动输入信号。

图 3　多轴振动下座椅处力响应功率谱密度中值的堆叠条形图

Fig. 3　Stacked bar chart of the median PSD of forces at the human-seat interface with multi-axis vibration

在 0.5~10 Hz 范围内，在三轴和四轴振动下，座板处 x、y 和 z 向的力响应主要受同向的振动输入影响，在靠背处 x 向的力响应中也能观察到类似的现象。然而，对于靠背处 y 和 z 向的力响应，交叉轴振动输入的贡献增加，尤其是在 x 和 p 方向。贡献量分析的结果指出，尽管在多个方向上有振动输入，座椅位置力响应仍主要受同轴振动影响，这表明多轴振动激励并没有从根本上改变系统内振动输入的传导路径。因此，减少同向振动输入的幅值是降低响应幅值的最有效方法。

3.2　多轴振动下坐姿人体的视在质量

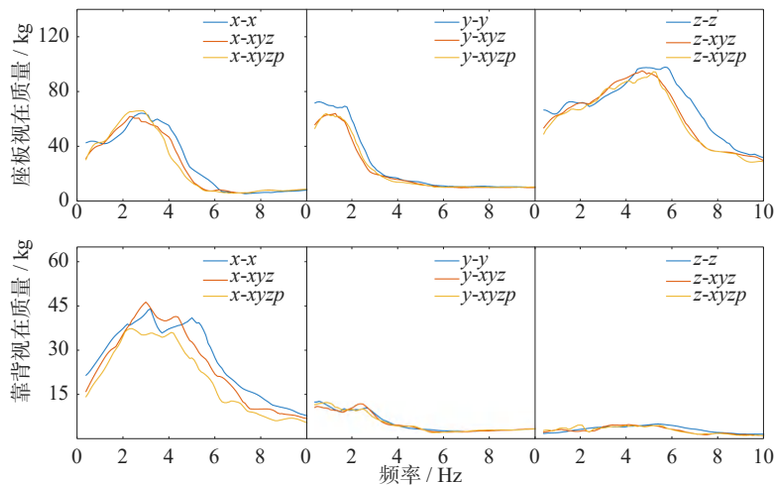
图 4 中，对 13 名受试者在单轴（x、y 或 z 向）、三轴（x、y 和 z 向）以及四轴（x、y、z 和 p 向）振动下座椅座板和靠背处视在质量中值进行了比较，各向振动幅值均为 0.8 m/s^2。与单轴振动下坐姿人体的视在质量相比，三轴和四轴振动下坐姿人体在座板和靠背处 x、y 和 z 向的视在质量共振频率均有所降低。

在此前提下，研究人员针对坐姿人体在单轴、三轴及四轴振动环境下的视在质量特性开展了 Wilcoxon 检验，结果如图 5 所示。图中，蓝色、黄色、紫色与红色 4 种椭圆形分别代表 4 个不同方向的振动激励；椭圆形的重叠区域则对应三轴或四轴同时施加振动激励的工况。重叠区域内的符号显示的是多轴振动激励与单轴振动工况下，视在质量的主共振频率及主共振峰幅值经 Wilcoxon 检验后的结果。

与单轴振动下坐姿人体的 x 向直线轴视在质量相比，在三轴和四轴振动下坐姿人体在座板处 x 向视在质量的主共振频率均出现显著变化（Wilcoxon 检验，p<0.05），但其主共振峰幅值仅在三轴振动时发生显著变化；就靠背处 x 向视在质量而言，三轴与四轴振动均使其主共振频率产生显著变化（Wilcoxon 检验，p<0.05），而主共振峰幅值仅在四轴振动条件下出现显著变化。

对于坐姿人体的 y 向直线轴视在质量，相较于单轴振动情况，三轴和四轴振动均导致座板处 y 向视在质量的主共振频率与主共振峰幅值发生显著变化（Wilcoxon 检验，p<0.05）；靠背处 y 向视在质量的主共振频率仅在四轴振动时出现显著变化（Wilcoxon 检验，p<0.05），其主共振峰幅值在三轴与四轴振动下均无显著变化。

对比单轴振动下坐姿人体的 z 向直线轴视在质量，三轴和四轴振动中座板处 z 向视在质量的主共振频率及主共振峰幅值均有显著变化（Wilcoxon 检



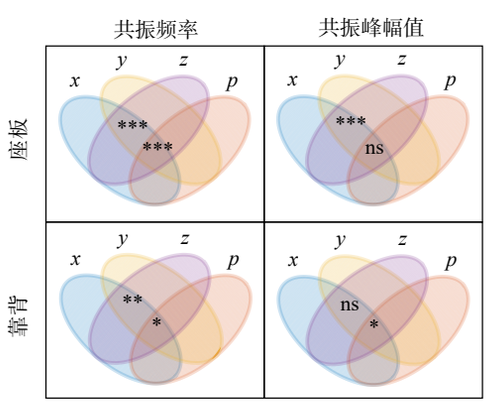
注：图例对应不同振动激励工况，例如，*x-xyz* 表示在 *x* 向、*y* 向和 *z* 向振动下的 *x* 向视在质量。

图 4 13 名受试者在不同幅值的单轴、三轴和四轴振动激励下座椅直线轴视在质量的中值

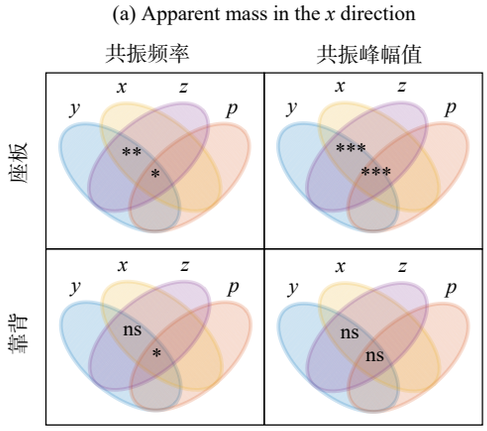
Fig. 4 The median apparent mass of 13 subjects exposed to single-axis, tri-axis, and four-axis vibration

验，p<0.05)；而靠背处 *y* 向视在质量的主共振频率在三轴与四轴振动下均发生显著变化(Wilcoxon 检验，p<0.05)，其主共振峰幅值则未出现显著变化。

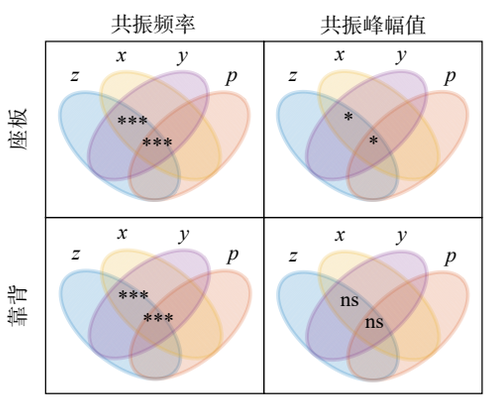
在多轴振动下，人体在矢状面上运动的耦合效应通常被认为是最显著的[17]。QIU 等[18]测定了坐姿人体在垂向和纵向双轴振动下的视在质量，结果表明单一方向的振动会影响坐姿人体在另一方向上的视在质量特性。然而，本节的研究结果还证明，矢状面内的振动输入(*x*、*z* 和 *p* 向)能够对人体在冠状面



(a) *x*向视在质量
(a) Apparent mass in the *x* direction



(b) *y*向视在质量
(b) Apparent mass in the *y* direction



(c) *z*向视在质量
(c) Apparent mass in the *z* direction

注：“ns”表示 p>0.05；“*”表示 p<0.05；“**”表示 p<0.01；“***”表示 p<0.005。

图 5 单轴、三轴和四轴振动下视在质量特性的 Wilcoxon 检验结果

Fig. 5 Wilcoxon signed-rank test results for apparent mass characteristics under single-axis, tri-axial, and four-axis vibration

(*y* 向)的视在质量特性产生影响。上述结果表明，如果将人体视为一个质量-弹簧-阻尼系统，则来自各个方向的振动输入都可能会导致特定方向上的弹簧刚度发生变化，并最终导致视在质量的共振频率发生改变。在对处于多轴振动环境中的坐姿人体生物力学进行建模分析时，应当将此因素考虑在内。

3.3 多轴振动幅值对视在质量共振频率的影响

在以往的研究中多轴振动的总幅值 a_{overall} 可计算为各向振动加速度的数和平方根(root sum squares, RSS)，如下式所示：

$$a_{\text{overall}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + a_p^2} \tag{9}$$

式中，a_x、a_y、a_z 和 a_p 分别为 *x*、*y*、*z* 和 *p* 方向的加速度均方根值。

多轴振动的总幅值常被认为与视在质量的主共振频率线性相关, 其关系可表示为:

$$f_r = k \cdot a_{\text{overall}} + C \tag{10}$$

式中, f_r为视在质量的主共振频率; k 为回归系数; C 为常数。

基于式(9)可计算得到表 1 中每个振动激励的总幅值, 与本研究中测定的 13 名受试者视在质量主共振频率的中值进行皮尔逊相关性检验, 结果如图 6 所示。结果表明, x、y 和 z 向视在质量的主共振频率与多轴振动的总幅值大小呈正相关 (Pearson 检验, p<0.01)。具体而言, x、y 和 z 向视在质量的主共振频率随着多轴振动幅度的增加而降低。

然而, 根据式(9)计算得到的多轴振动总幅值与视在质量主共振频率之间的相关系数仍较低, 尤其是垂向视在质量主共振频率与多轴振动总幅值之间的相关系数仅为 0.53。这表明式(10)可能并非量化多轴振动总幅值的最优形式。文献 [11] 提出多轴振动的总幅值a_{overall}(在横向、垂向和侧倾振动下), 可通过下式计算:

$$a_{\text{overall}} = \sqrt{\sum_{i=y,z,rx} (W_i \cdot a_i)^2} \tag{11}$$

式中, W_y、W_z和W_{rx}分别为横向、垂向和侧倾振动的权重, 表征了人体对于特定方向振动的敏感度; a_i 为各向振动激励的幅值。采用这种形式, a_{overall}可以用当前研究中使用的 x、y、z 和 p 振动来表示:

$$a_{\text{overall}} = \sqrt{\sum_{i=x,y,z,p} (W_i \cdot a_i)^2} \tag{12}$$

式中, W_x、W_y、W_z和W_p分别为沿 x、y、z 和 p 方向振动的待定权重值。设定权重值在 0 到 2 之间变化, 对于表 1 中的任意振动激励信号 j, 可以计算出 i 向(i=x、y、z)视在质量的主共振频率为$f_{pre_{ij}}$。实验测定的 13 名受试者在任意信号 j 激励下, i 向视在质量的主共振频率中位值可以表示为$f_{mea_{ij}}$。因此, 对于 i 向(i=x、y、z)视在质量的主共振频率, 当振动激励信号总数为 n 时, 优化误差函数E_i可表示为:

$$E_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\left(f_{mea_{ij}} - f_{pre_{ij}}\right)^2}}{n} \tag{13}$$

$$f_{pre_{ij}} = k_i \sqrt{\sum_{i=x,y,z,p} (W_i \cdot a_i)^2} + C_i \tag{14}$$

式中, k_i为$f_{pre_{ij}}$与a_i之间的回归系数; C_i为常数值。

本研究中采用了粒子群算法, 通过将各权重的变化范围设置为 0 到 2 之间, 以E_i为优化误差函数, 最终确定了权重的最优组合。优化前后的误差函数E_i和 Pearson 相关系数如表 2 所示, 而优化后的权重、k_i和 C_i 则如表 3 所示。

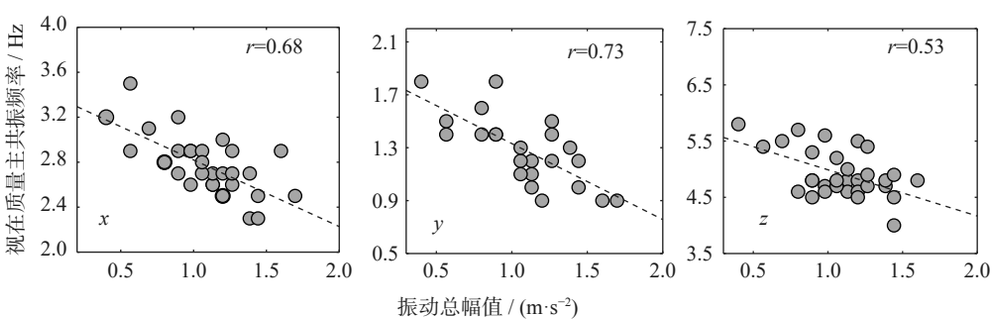


图 6　视在质量主共振频率中值与振动总幅值的散点图

Fig. 6　Scatter plot of apparent mass resonance frequency median and total vibration magnitude

表 2　优化前后的误差函数 E_i 和 Pearson 相关系数

Tab. 2　Original and optimal error function E_i, Pearson correlation coefficient

视在质量的方向	E_i		相关系数	
	初始	优化后	初始	优化后
x	0.040	0.030	0.46	0.57
y	0.037	0.031	0.53	0.65
z	0.063	0.060	0.28	0.35

表 3　优化后的权重、k_i 和 C_i 值

Tab. 3　Optimal weightings, value of k_i and C_i

视在质量的方向	优化后的系数值					
	W_x	W_y	W_z	W_p	k_i	C_i
x	1.76	0.97	1.09	0.88	−0.46	3.44
y	1.28	2.00	0.87	1.80	−0.40	1.98
z	1.69	0.50	2.00	1.32	−0.42	5.51

如表 2 所示, 使用优化后权重组合计算得出的多轴振动总幅值与视在质量主共振频率之间具有更高的置信度和相关系数, 并且误差函数值更小。然而, z 向视在质量的主共振频率与总振动幅值之间的相关系数仅为 0.35, 在未来的研究中有必要通过建立非线性回归模型或建立包含交叉相关项的线性回归模型等方法, 来进一步探究视在质量的主共振频率与多轴振动总幅值之间的关系。

4　结　论

本研究针对坐姿人体在纵向、横向、垂向和俯仰耦合振动下的生物动力学响应特性开展了试验研究, 探究了多轴振动幅值、轴向和频率因素对坐姿

人体视在质量特性的影响。研究结果表明,多轴振动下与单轴振动下的坐姿人体视在质量存在显著差异。在多直线轴和多直线轴耦合角振动激励下,坐姿人体在座板 x、y 和 z 向的力响应,以及靠背 x 向的力响应都主要受同方向振动输入的影响。Pearson 相关性检验的结果表明,多轴振动总幅值与视在质量的主共振频率之间存在显著的相关性,但目前通用的多轴振动总幅值计算方法未能充分考虑各向振动输入之间的差异性。本文采用了考虑各向振动权重的多轴振动总幅值计算方法,并通过粒子群优化算法确定了使多轴总幅值与视在质量的共振频率具有最高相关性的各向振动权重组合。

参考文献:

[1] KIM J H, DENNERLEIN J T, JOHNSON P W. The effect of a multi-axis suspension on whole body vibration exposures and physical stress in the neck and low back in agricultural tractor applications[J]. Applied Ergonomics, 2018, 68: 80-89.

[2] TIEMESSEN I J, HULSHOF C T J, FRINGS-DRESEN M H W. An overview of strategies to reduce whole-body vibration exposure on drivers: a systematic review[J]. International Journal of Industrial Ergonomics, 2007, 37(3): 245-256.

[3] JÖNSSON P, JOHANSSON Ö. Prediction of vehicle discomfort from transient vibrations[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 282(3-5): 1043-1064.

[4] WU J, QIU Y, SUN C. Modelling and analysis of coupled vibration of human body in the sagittal and coronal planes exposed to vertical, lateral and roll vibrations and the comparison with modal test[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 166: 108439.

[5] SUN C, LIU C, ZHENG X, et al. An analytical model of seated human body exposed to combined fore-aft, lateral, and vertical vibration verified with experimental modal analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 200: 110527.

[6] WU J, QIU Y. Modelling of seated human body exposed to combined vertical, lateral and roll vibrations[J]. Journal of Sound and Vibration, 2020, 485: 115509.

[7] MANSFIELD N J, MAEDA S. The apparent mass of the seated human exposed to single-axis and multi-axis whole-body vibration[J]. Journal of Biomechanics, 2007, 40(11): 2543-2551.

[8] LIN Z F, ZHANG J H, LI M, et al. Torque response of seated human body to sinusoidal lateral and roll dual-axis vibration[J]. Ergonomics, 2023, 66(7): 916-926.

[9] ZHENG G T, QIU Y, GRIFFIN M J. Vertical and dual-axis vibration of the seated human body: nonlinearity, cross-axis coupling, and associations between resonances in transmissibility and apparent mass[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(26): 5880-5894.

[10] MANDAPURAM S, RAKHEJA S, BOILEAU P É, et al. Apparent mass and head vibration transmission responses of seated body to three translational axis vibration[J]. International Journal of Industrial Ergonomics, 2012, 42(3): 268-277.

[11] WU J, QIU Y, ZHOU H. Biodynamic response of seated human body to vertical and added lateral and roll vibrations[J]. Ergonomics, 2022, 65(4): 546-560.

[12] WYLLIE I H, GRIFFIN M J. Discomfort from sinusoidal oscillation in the roll and lateral axes at frequencies between 0.2 and 1.6 Hz[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2007, 121(5): 2644-2654.

[13] WYLLIE I H, GRIFFIN M J. Discomfort from sinusoidal oscillation in the pitch and fore-and-aft axes at frequencies between 0.2 and 1.6 Hz[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 324(1-2): 453-467.

[14] MATSUMOTO Y, GRIFFIN M J. Nonlinear subjective and biodynamic responses to continuous and transient whole-body vibration in the vertical direction[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 287(4-5): 919-937.

[15] WU J, QIU Y. The study of seat vibration transmission of a high-speed train based on an improved MISO method[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 143: 106844.

[16] HARRIS B, BENDAT J S, PIERSOL A G. Random data: analysis and measurement procedures[J]. Technometrics, 1975, 17(2): 271.

[17] MANSFIELD N J, MAEDA S. Comparison of the apparent masses and cross-axis apparent masses of seated humans exposed to single-and dual-axis whole-body vibration[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 298(3): 841-853.

[18] QIU Y, GRIFFIN M J. Biodynamic responses of the seated human body to single-axis and dual-axis vibration[J]. Industrial Health, 2010, 48(5): 615-627.

第一作者: 匡 昊(1996—),男,博士。
E-mail: 21860028@zju.edu.cn

通信作者: 邱 毅(1960—),男,博士,教授。
E-mail: yiqiu@fyust.edu.cn

层合圆锥壳及组合壳的受迫与自由振动特性分析

吴江海，段 勇，尹志勇

（中国船舶科学研究中心船舶振动噪声重点实验室，江苏 无锡 214082）

摘要：为研究层合圆锥壳及其组合壳结构的振动特性，本文基于层合薄壳理论，采用谱元法推导了复合材料层合圆锥壳的基本动刚度矩阵，并利用单个圆锥壳的边界条件和锥顶角变化拼接构建了组合壳体结构的动力学模型。通过与有限元计算（finite element method, FEM）的固有频率与振动响应对比，验证了本文计算方法和层合圆锥壳动力学模型的正确性。本文分析了圆锥壳两端任意弹性刚度边界、层合铺设角度、铺设层数以及圆锥壳锥顶角等参数对层合圆锥壳振动特性的影响。研究发现铺设角度与弹性边界对固有频率存在影响；随着锥顶角增大，共振峰向低频移动。本文的研究结果可为层合圆锥壳及其组合壳结构的参数化设计和振动计算提供有效的分析工具。

关键词：层合圆锥壳；振动特性；谱元法；任意边界；固有频率

中图分类号：TH113.1 **文献标志码：**A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202504067

Analysis of forced and free vibration characteristics of laminated conical shells and combined shell structures

WU Jianghai, DUAN Yong, YIN Zhiyong

（National Key Laboratory on Ship Vibration & Noise，China Ship Scientific Research Center，Wuxi 214082，China）

Abstract: This study presents a comprehensive investigation into the vibration characteristics of composite laminated conical shells and combined structures through the integration of laminated thin shell theory and spectral element method. The dynamic model of the combined shell structure is constructed by combining the boundary conditions of individual conical shells and the variations of semi-vertex angles. A novel vibration analysis methodology is formulated，establishing the dynamic stiffness matrix for multi-layered conical shell structures. The validity of both the computational framework and dynamic modeling approach has been rigorously verified through comparative analyses of natural frequencies and vibration responses against finite element method (FEM) simulations，demonstrating excellent agreement. The systematic parametric investigation examines critical factors influencing vibrational behavior，including：elastic boundary constraints at shell extremities，ply orientation angles，number of laying layers，and semi-vertex angle configurations. Key findings reveal that ply orientation and boundary stiffness significantly influence natural frequency spectra. Semi-vertex angle variations demonstrate frequency-dependent effects，where increased semi-vertex angles induce progressive downward shifts in resonance peaks toward lower frequency ranges. The developed methodology offers valuable analytical tools for vibration prediction and parametric optimization in laminated conical shell and combined shell structures design. This research particularly contributes to the accurate modeling of complex boundary conditions and anisotropic material effects in composite shell structures，providing essential insights for aerospace，mechanical，and civil engineering applications requiring precision vibration control.

Keywords: cross-ply laminate conical shell; vibration characteristics; spectral element method; general boundary conditions; natural frequency

圆锥壳结构是潜艇、鱼雷、水下无人航行器等海洋工程装备的典型艉部结构。复合材料因具有抗海水腐蚀性能和减振降噪功能，越来越多地应用于艉部圆锥壳结构中[1-3]。但由于内部设备和外部流体脉动激励，长期过大的振动会引起圆锥壳结构的失效破坏。需要在圆锥壳设计阶段对其振动特性进行预测，以避免其固有频率与设备激励发生共振。因此，复合材料圆锥壳结构的振动特性成为研究的热点。

田宏业等[4]基于一阶剪切变形理论，研究了一般边界条件下功能梯度开口圆锥的自由振动特性，采用不同类型的弹簧模拟圆锥的边界和连续条件。张春雨等[5-6]基于动刚度法，建立了适用任意边界下圆锥壳动力学模型，推导了严格满足控制方程的位移形函数，构建了联系结构边界位移与内力之间关系的动刚度矩阵。史冬岩等[7]采用谱几何方法对不同边界条件下复合材料双层圆锥壳与环板耦合结构

收稿日期：2025-04-30；**修订日期：**2025-07-13

基金项目：国家自然科学基金资助项目 (12374447)；无锡市青年科技人才托举行动 (TJXD-2024-110)

的振动特性进行了建模分析，同样采用虚拟弹簧技术来模拟边界，将结构与外部边界条件通过哈密顿原理进行组装。ZHU 等[8]采用动刚度法研究了部分充水或者浸水下层合圆锥壳的振动特性，给出了圆锥壳动刚度矩阵中的系数表达式。张宇航等[9]通过弹簧模拟壳体结构的边界条件，采用行波模态分析法建立了旋转功能梯度圆锥-圆柱连接壳体的动力学模型，并研究了圆锥角对功能梯度圆锥壳非线性振动响应的影响[10]。伊海铭等[11]将圆锥壳沿母线、环向和法向的位移分别写成幂级数解的形式，并推导了幂级数之间的递推关系式，采用梁模拟环肋，研究了环肋圆锥壳的振动特性。张帅等[12]基于能量泛函、经典薄板理论和 Love 壳体理论，提出了一种改进傅里叶级数的封口锥-柱组合壳自由振动特性分析的半解析方法，并结合波传播法和 Galerkin 法研究了水下环肋圆锥壳临界压力与固有频率之间的关系[13]。THINH 等[14]提出动态刚度法（DSM）分析流体填充复合材料圆柱壳的自由振动，通过试验验证了增加流体高度会显著降低固有频率，且 DSM 在高频计算中的精度优于有限元法。PATEL 等[15]采用有限元法研究层合锥柱壳，发现几何不连续处（锥-柱连接）存在局部刚度效应，锥角接近时基频升高，且铺层顺序影响模态特性（如对称铺层频率更高）。KOUCHAKZADEH 等[16]基于 Donnell 理论建立级数解析解，发现连接锥壳的基频随半顶角差减小而增大，锥-板结构频率最低，且复合材料中铺层的层数增至 4 层后频率变化趋缓。JAVED 等[17]研究了简支和固支边界下变厚度圆锥壳的自由振动特性。KIM 等[18]采用哈尔小波法建立了层合圆锥-圆柱的自由振动特性分析方法。

综上所述，已有大量关于圆锥壳振动特性的研究工作，但关于复合材料圆锥壳振动特性的研究还比较少。本文在上述研究基础上，采用谱元法建立了一种收敛快、计算效率高的任意边界层合圆锥壳动力学模型，并开展了任意弹性边界、层合铺设角度和锥顶角对复合材料层合圆锥壳动力学特性的影响规律分析。

1 层合圆锥壳振动理论

1.1 层合理论

经典壳理论和高阶剪切壳理论是目前常用的壳理论模型，它们在描述和分析薄壳结构时具有不同的假设和优势，并且有显著的差异。经典壳理论是基于 Kirchhoff 假设的壳理论模型。经典壳理论假设壳体内没有横向变形，这意味着壳体内每一层的弯曲变形是一致的。这一假设适用于薄壳，即半径与厚度比小于 20 的壳。水下航行器通常具有较小的厚径比，因此本文中的理论选用经典薄壳理论。根据薄壳理论[19]，距离中性面为 z 的壳体厚度方向上的应变 e_x、e_θ、$e_{x\theta}$ 可以写成关于中性面应变的表达式：

$$\begin{aligned} e_x &= e_1 + zk_1, \\ e_\theta &= e_2 + zk_2, \\ e_{x\theta} &= \gamma + 2z\tau \end{aligned} \tag{1}$$

式中，e_1、e_2 和 γ 为壳体中性面上三个方向的应变，不同薄壳理论中关于中性面的应变假设形式不同，上述表达式均可以写成关于层合圆柱壳体中三个方向位移的表达式；k_1、k_2 和 τ 为层合圆柱壳中性面上曲率，表达式可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} &e_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, e_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right), \gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ &k_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, k_2 = \frac{1}{R^2}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right), \\ &\tau = \frac{1}{R}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

式中，u、v 和 w 分别为圆锥壳的轴向、切向和径向位移；R 为圆锥壳的半径；θ 为圆锥壳的转角。

根据胡克定律，薄壁层合圆柱壳中的应力 σ_x、σ_θ、$\sigma_{x\theta}$ 可以写成与应变有关的表达式：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_\theta \\ e_{x\theta} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{Q}_{ij}$ 为二维刚度矩阵。根据薄壳理论，内力和弯矩可以通过应力沿壳体厚度方向积分获得，层合圆柱壳中的内力和弯矩沿厚度方向的表达式为：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} \mathrm{d}z, \begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} z\mathrm{d}z \tag{4}$$

联立式 (1)~(4)，将壳体截面上的内力和弯矩写成关于壳应变的矩阵表达式：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma \\ k_1 \\ k_2 \\ 2\tau \end{Bmatrix} \tag{5}$$

式中，A_{ij} 为拉伸刚度；D_{ij} 为弯曲刚度；B_{ij} 为拉伸与弯曲耦合刚度，三者的表达式为：

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right) \end{aligned} \tag{6}$$

式中，z_k 为距离中性面的距离；$\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ 为第 k 层的弹性

刚度，其表达式为：

$$\bar{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}} \tag{7}$$

关于层合圆柱壳中铺设角度α的转换矩阵$\boldsymbol{S}$可以写成如下形式[11]：

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \end{bmatrix} \tag{8}$$

对于正交铺设层合圆柱壳中，$\bar{Q}_{16}=\bar{Q}_{26}=0$，相应的，$A_{16}=A_{26}=0$，$B_{16}=B_{26}=0$和 $D_{16}=D_{26}=0$，式 (5) 得到相应的简化。

图 1 为层合圆锥壳的受力和位移示意图，刚度矩阵可以从层合材料杨氏模量和泊松比参数中获得：

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}, Q_{12} = \frac{E_2\mu_{12}}{1-\mu_{12}\mu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}, Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \tag{9}$$

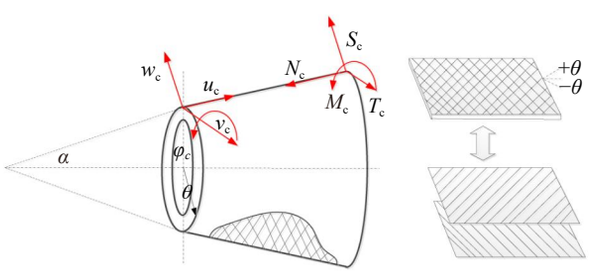


图 1　层合圆锥壳受力与位移示意图

Fig. 1　Schematic diagram of force and displacement of laminated conical shell

1.2　圆锥壳振动理论

根据文献 [20]，圆锥壳的振动控制方程可以写成：

$$\begin{aligned} L_{11}^{\mathrm{c}}u_{\mathrm{c}} + L_{12}^{\mathrm{c}}v_{\mathrm{c}} + L_{13}^{\mathrm{c}}w_{\mathrm{c}} &= 0, \\ L_{21}^{\mathrm{c}}u_{\mathrm{c}} + L_{22}^{\mathrm{c}}v_{\mathrm{c}} + L_{23}^{\mathrm{c}}w_{\mathrm{c}} &= 0, \\ L_{31}^{\mathrm{c}}u_{\mathrm{c}} + L_{32}^{\mathrm{c}}v_{\mathrm{c}} + L_{33}^{\mathrm{c}}w_{\mathrm{c}} &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

式中，$L_{ij}^{\mathrm{c}}(i.j=1,2,3)$为层合圆锥壳振动控制方程中微分算子。式 (10) 中的圆锥壳三向位移可以写成幂级数展开的形式：

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}},\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{n,\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}})\cos(n\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_m x_{\mathrm{c}}^m \cos(n\theta), \\ v_{\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}},\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} V_{n,\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}})\sin(n\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x_{\mathrm{c}}^m \sin(n\theta), \\ w_{\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}},\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_{n,\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}})\cos(n\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x_{\mathrm{c}}^m \cos(n\theta) \end{aligned} \tag{11}$$

式中，a_m、b_m、c_m为三个位移方向的幂级数展开系数，这三个系数与幂级数截断数 m 相关；n 为周向模态数，θ 为壳体截面上任意参考 0 点的夹角。将式 (11) 中圆锥壳三向位移表达式代入式 (10) 层合圆锥壳振动控制方程中，可以得到圆锥壳位移表达式中幂级数系数之间的递推关系式：

$$\begin{aligned} a_{m+2} &= \sum_{i=1}^{6} A_{a,i}a_{m-5+i} + \sum_{i=1}^{4} B_{a,i}b_{m-3+i} + \sum_{i=1}^{4} C_{a,i}a_{m-3+i}, \\ b_{m+2} &= \sum_{i=1}^{4} A_{b,i}a_{m-3+i} + \sum_{i=1}^{6} B_{b,i}b_{m-5+i} + \sum_{i=1}^{5} C_{b,i}a_{m-3+i}, \\ c_{m+2} &= \sum_{i=1}^{6} A_{c,i}a_{m-3+i} + \sum_{i=1}^{5} B_{c,i}b_{m-3+i} + \sum_{i=1}^{8} C_{c,i}a_{m-5+i} \end{aligned} \tag{12}$$

式中，递归系数的具体表达式可以在文献 [5] 中找到。根据上述递推关系，当幂级数 m>0 时，式 (12) 中的所有系数可以由 8 个系数 a_0、a_1、b_0、b_1、c_0、c_1、c_2、c_3表示。这 8 个系数也称为圆锥壳的位移基函数。根据上述方程，圆锥壳的位移函数表达式可以写成：

$$\begin{aligned} U_{n,\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}}) &= \boldsymbol{u}_{\mathrm{c},n}\cdot\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},n}, \\ V_{n,\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}}) &= \boldsymbol{v}_{\mathrm{c},n}\cdot\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},n}, \\ W_{n,\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}}) &= \boldsymbol{w}_{\mathrm{c},n}\cdot\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},n} \end{aligned} \tag{13}$$

其中：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{\mathrm{c},n} &= [u_{\mathrm{c},n}^1(x_{\mathrm{c}}) \quad u_{\mathrm{c},n}^2(x_{\mathrm{c}}) \quad u_{\mathrm{c},n}^3(x_{\mathrm{c}}) \quad u_{\mathrm{c},n}^4(x_{\mathrm{c}}) \quad u_{\mathrm{c},n}^5(x_{\mathrm{c}}) \\ &\quad u_{\mathrm{c},n}^6(x_{\mathrm{c}}) \quad u_{\mathrm{c},n}^7(x_{\mathrm{c}}) \quad u_{\mathrm{c},n}^8(x_{\mathrm{c}})], \\ \boldsymbol{v}_{\mathrm{c},n} &= [v_{\mathrm{c},n}^1(x_{\mathrm{c}}) \quad v_{\mathrm{c},n}^2(x_{\mathrm{c}}) \quad v_{\mathrm{c},n}^3(x_{\mathrm{c}}) \quad v_{\mathrm{c},n}^4(x_{\mathrm{c}}) \quad v_{\mathrm{c},n}^5(x_{\mathrm{c}}) \\ &\quad v_{\mathrm{c},n}^6(x_{\mathrm{c}}) \quad v_{\mathrm{c},n}^7(x_{\mathrm{c}}) \quad v_{\mathrm{c},n}^8(x_{\mathrm{c}})], \\ \boldsymbol{w}_{\mathrm{c},n} &= [w_{\mathrm{c},n}^1(x_{\mathrm{c}}) \quad w_{\mathrm{c},n}^2(x_{\mathrm{c}}) \quad w_{\mathrm{c},n}^3(x_{\mathrm{c}}) \quad w_{\mathrm{c},n}^4(x_{\mathrm{c}}) \quad w_{\mathrm{c},n}^5(x_{\mathrm{c}}) \\ &\quad w_{\mathrm{c},n}^6(x_{\mathrm{c}}) \quad w_{\mathrm{c},n}^7(x_{\mathrm{c}}) \quad w_{\mathrm{c},n}^8(x_{\mathrm{c}})], \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{c},n} &= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & b_0 & b_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{14}$$

将式 (13) 和 (14) 中的位移表达式代入圆锥壳位移表达式 (11) 中，则层合圆锥壳的最终表达式可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}},\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_{\mathrm{c},n}\cdot\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},n}\cos(n\theta), \\ v_{\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}},\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{v}_{\mathrm{c},n}\cdot\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},n}\sin(n\theta), \\ w_{\mathrm{c}}(x_{\mathrm{c}},\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{w}_{\mathrm{c},n}\cdot\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},n}\cos(n\theta) \end{aligned} \tag{15}$$

根据薄壳理论中位移与内力之间的关系，圆锥壳截面上的内力表达式可以写成：

$$\begin{aligned} N_{x,\mathrm{c}} &= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u_{\mathrm{c}}}{\partial x} + \mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_{\mathrm{c}}}{\partial\theta} + \frac{s}{R}u_{\mathrm{c}} + \frac{c}{R}w_{\mathrm{c}}\right) - k\frac{c}{R}\frac{\partial^2 w_{\mathrm{c}}}{\partial x^2}\right], \\ M_{x,\mathrm{c}} &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left[-\frac{\partial^2 w_{\mathrm{c}}}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{c}{R^2}\frac{\partial v_{\mathrm{c}}}{\partial\theta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w_{\mathrm{c}}}{\partial\theta^2} - \frac{s}{R}\frac{\partial w_{\mathrm{c}}}{\partial x}\right) + \right. \\ &\quad \left.\frac{c}{R}\frac{\partial u_{\mathrm{c}}}{\partial x}\right], \\ N_{x\theta,\mathrm{c}} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u_{\mathrm{c}}}{\partial\theta} + \frac{\partial v_{\mathrm{c}}}{\partial x} - \frac{s}{R}v_{\mathrm{c}} + \right. \\ &\quad \left.\left(-\frac{c}{R^2}\frac{\partial^2 w_{\mathrm{c}}}{\partial x\partial\theta} + \frac{c^2}{R^2}\frac{\partial v_{\mathrm{c}}}{\partial x} + \frac{cs}{R^3}\frac{\partial w_{\mathrm{c}}}{\partial\theta} - \frac{c^2 s}{R^3}v_{\mathrm{c}}\right)\right], \\ V_{x,\mathrm{c}} &= Q_{x,\mathrm{c}} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\theta,\mathrm{c}}}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{16}$$

其中：

$$
\begin{aligned}
Q_{x,\mathrm{c}} &= \frac{1}{R}\frac{\partial (RM_{x,\mathrm{c}})}{\partial x} - \frac{M_{\theta,\mathrm{c}}s}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\theta,\mathrm{c}}}{\partial \theta},\\
M_{\theta,\mathrm{c}} &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left[-\frac{1}{R^2}\frac{\partial w_{\mathrm{c}}^2}{\partial \theta^2} - \frac{s}{R}\frac{\partial w_{\mathrm{c}}}{\partial x} - \mu\frac{\partial^2 w_{\mathrm{c}}}{\partial x^2} - \frac{cs}{R^2}u_{\mathrm{c}} - \frac{c^2}{R^2}w_{\mathrm{c}}\right],\\
M_{x\theta,\mathrm{c}} &= \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\left[-\frac{1}{R}\frac{\partial w_{\mathrm{c}}^2}{\partial \theta \partial x} + \frac{c}{R}\frac{\partial v_{\mathrm{c}}}{\partial x} + \frac{s}{R^2}\frac{\partial w_{\mathrm{c}}}{\partial \theta} - \frac{cs}{R^2}v_{\mathrm{c}}\right]
\end{aligned}
\tag{17}
$$

式中，Q 为剪切力；V 为圆锥壳截面内部剪力；s、c、k 的含义可参考文献 [6, 21]。

通过将位移和内力之间的关系方程 (16) 代入式 (15) 中，圆锥壳截面上的内力也可以写成基函数的表达式。将圆锥壳两端 ($x_{\mathrm{c}} = -L_{\mathrm{c}}$ 和 $x_{\mathrm{c}} = L_{\mathrm{c}}$) 上的边界和位移视为圆锥壳的两个节点，则获得层合圆锥壳两端的动刚度矩阵表达式：

$$
\begin{bmatrix} N_n^{\mathrm{C}}(0)\\ T_n^{\mathrm{C}}(0)\\ S_n^{\mathrm{C}}(0)\\ M_n^{\mathrm{C}}(0)\\ N_n^{\mathrm{C}}(L)\\ T_n^{\mathrm{C}}(L)\\ S_n^{\mathrm{C}}(L)\\ M_n^{\mathrm{C}}(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} & D_{17} & D_{18}\\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} & D_{27} & D_{28}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} & D_{37} & D_{38}\\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} & D_{47} & D_{48}\\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58}\\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{67}\\ D_{71} & D_{72} & D_{73} & D_{74} & D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78}\\ D_{81} & D_{82} & D_{83} & D_{84} & D_{85} & D_{86} & D_{87} & D_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n^{\mathrm{C}}(0)\\ V_n^{\mathrm{C}}(0)\\ W_n^{\mathrm{C}}(0)\\ \psi_n^{\mathrm{C}}(0)\\ U_n^{\mathrm{C}}(L)\\ V_n^{\mathrm{C}}(L)\\ W_n^{\mathrm{C}}(L)\\ \psi_n^{\mathrm{C}}(L) \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{C}} \begin{bmatrix} U_n^{\mathrm{C}}(0)\\ V_n^{\mathrm{C}}(0)\\ W_n^{\mathrm{C}}(0)\\ \psi_n^{\mathrm{C}}(0)\\ U_n^{\mathrm{C}}(L)\\ V_n^{\mathrm{C}}(L)\\ W_n^{\mathrm{C}}(L)\\ \psi_n^{\mathrm{C}}(L) \end{bmatrix} \tag{18}
$$

式中，各变量为动刚度矩阵内部的元素，下标为对应矩阵中的位置；$\boldsymbol{D}_{\mathrm{C}}$ 为层合圆锥壳的动刚度矩阵。由于在圆锥壳坐标系下赫姆霍兹声学波动方程没有具体的流体载荷表达式，本文中的计算方法还未能处理浸水层合圆锥壳的振动。

1.3 任意边界条件

在获得该动刚度矩阵后，可通过人工弹簧实现层合圆锥壳的任意弹性边界条件，人工弹簧技术目前是处理任意弹性边界的一种成熟技术，具体方法可参考文献 [6-7, 16]。在式 (18) 的整体刚度矩阵中对应自由度元素上安装弹簧 $\boldsymbol{K}$（弹簧的单位与壳体的动刚度矩阵一致，均为 N/m），当 $\boldsymbol{K}$ 接近 0 时，整个模型处于自由边界条件；当 $\boldsymbol{K}$ 较大时，如 $\boldsymbol{K}$=10^{20} N/m 及以上的时候，则可认为整个模型是处于刚性固支边界条件；且该刚度 $\boldsymbol{K}$ 可以取对应的任何数值，以实现弹性边界。人工弹簧任意边界的实现，可以施加在具体某个自由度上，为线边界（即整条边上的边界条件一致）。如圆锥壳的轴向、切向、径向或转动方向上，也可以同时施加在几个自由度上，实现传统壳体中经典边界难以覆盖的难点。

通过对上述式 (18) 中动刚度矩阵行列式最小值进行搜索，可以求得层合圆锥壳的固有频率。而层合圆锥壳的响应求解，则可通过对式 (18) 求逆。因此上述动层合圆锥壳的刚度矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{C}}$ 是本文计算方法的基础。

1.4 壳体的组合过程

本文以单个圆锥壳的动刚度矩阵为基础开展组合壳体的拼接。在组合壳的拼接过程中，将圆锥壳的两条边上的位移和力假设为两个节点。以图 2 中的典型圆锥壳和圆柱壳耦合结构为例，圆锥壳包括两条边，边①和边②；圆柱壳同样包含两条边，边③和边④。

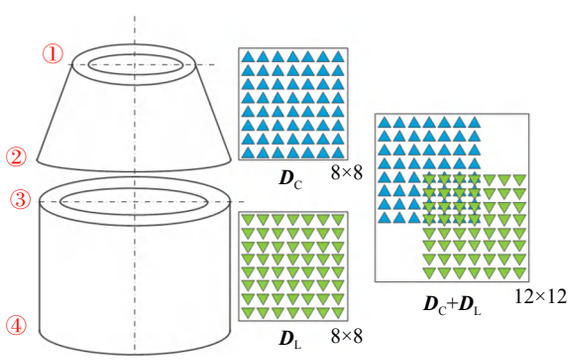


图 2 锥-柱耦合结构的拼接过程

Fig. 2 Conical-cylindrical shell splicing process

根据文中式 (18) 可知，单个圆锥壳（或圆柱壳）的动刚度矩阵为 8×8，如图 2 中所示的蓝色和绿色矩阵。因此圆锥壳和圆柱壳的动刚度矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{C}}$ 和 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}$ 可以写成：

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{F}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1\\ \boldsymbol{U}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{C}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1\\ \boldsymbol{U}_2 \end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_3\\ \boldsymbol{F}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{33} & \boldsymbol{D}_{34}\\ \boldsymbol{D}_{43} & \boldsymbol{D}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_3\\ \boldsymbol{U}_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_3\\ \boldsymbol{U}_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

式中的力、位移和矩阵元素均为矢量矩阵，其中动刚度矩阵元素 $\boldsymbol{D}_{ij}$ (i,j=1,2,3,4) 为 4× 4 矩阵；$\boldsymbol{F}_i$ 为壳体边上的 1×4 力矩阵；$\boldsymbol{U}_i$ 为壳体边上的 1×4 位移矩阵。因为圆锥壳的边②和圆柱壳的边③重叠，因此在该重叠拼接边上需满足两个壳体的位移连续和力的平衡条件：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_2 &= \boldsymbol{U}_3 = \boldsymbol{U}^*,\\
\boldsymbol{F}_2 &+ \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{F}^*
\end{aligned}
\tag{20}
$$

式中，$\boldsymbol{U}^*$ 为拼接边上的新的位移矩阵；$\boldsymbol{F}^*$ 为拼接边上新的力矩阵。联立式 (19) 和 (20) 可得：

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{F}^*\\ \boldsymbol{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22}+\boldsymbol{D}_{33} & \boldsymbol{D}_{34}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_{43} & \boldsymbol{D}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1\\ \boldsymbol{U}^*\\ \boldsymbol{U}_4 \end{bmatrix} \tag{21}
$$

式 (21) 即为锥-柱耦合结构的整体动刚度矩阵，也可

通过图 2 中两个刚度矩阵的拼接图表示。

通过式(21)求得的是式(18)中的 U、V、W，而壳体圆周上任意位置处的响应 u、v 和 w 需要通过乘以式(15)中的 $\cos(n\theta)$ 或者 $\sin(n\theta)$ 获得。若需要获得壳体内部的响应，则需要在对应的位置处将壳体分割，以此获得该位置处的响应，原理与有限元中的网格划分一致。

2　参数特性分析

2.1　计算方法验证

为验证上述谱元法计算方法和层合圆锥壳动力学模型的正确性，本文采用 ABAQUS 软件建立层合圆锥壳有限元模型，开展计算方法验证。其中圆锥壳小端半径 r_1=0.4 m，大端半径 r_2=1.0 m，锥顶角 α=30°，采用 0°-90°-0° 正交三层铺设角度。有限元模型网格尺寸为 0.02 m，整体采用结构化网格，共有 13200 个壳体单元。材料属性为：E_1=138 GPa，E_2=8.96 GPa，μ_{12}=0.3，G_{12}=7.1 GPa，密度 ρ=1645 kg/m^3，整个模型重量为 52.09 kg。整个层合圆锥壳的厚度为 t=0.006 m，均匀分为三层，每层的厚度为 0.002 m，每层为各向异性。针对 0°-90°-0° 铺设角度下层合圆锥壳，有限元模型如图 3 所示。

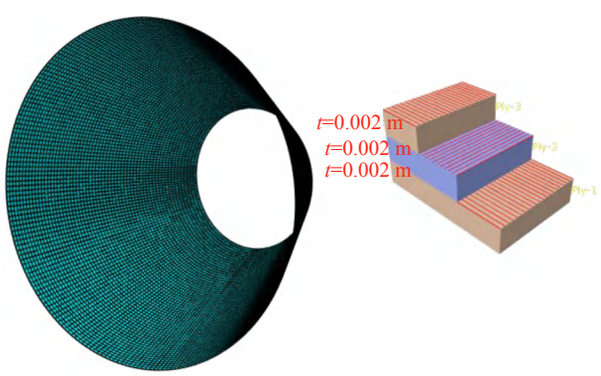


图 3　层合圆锥壳有限元模型

Fig. 3　Finite element model of laminated conical shell

圆锥壳小端为固支边界条件，大端为自由边界条件。在大端边上，沿圆锥壳局部坐标系径向施加一单位简谐激励力。因薄壳响应与壳体周向模态数 n 相关，在一定的频率范围内，根据模态叠加理论，需要在该频率范围内具有完备的周向模态数。因此，为保证计算精度，本文首先开展周向模态数收敛性分析。

从图 4 中可以看出，当周向模态数 n=20 时，层合圆锥壳轴向位移和径向位移收敛稳定。为了提高计算的收敛性，本文中周向模态数 n 取 20。如式 (11) 所示，圆锥壳的三向位移表达式还与幂指数 m 相关，而实际情况中，幂指数不可能取无限大，因此本文开展层合圆锥壳响应的幂级数截断数收敛性分析。

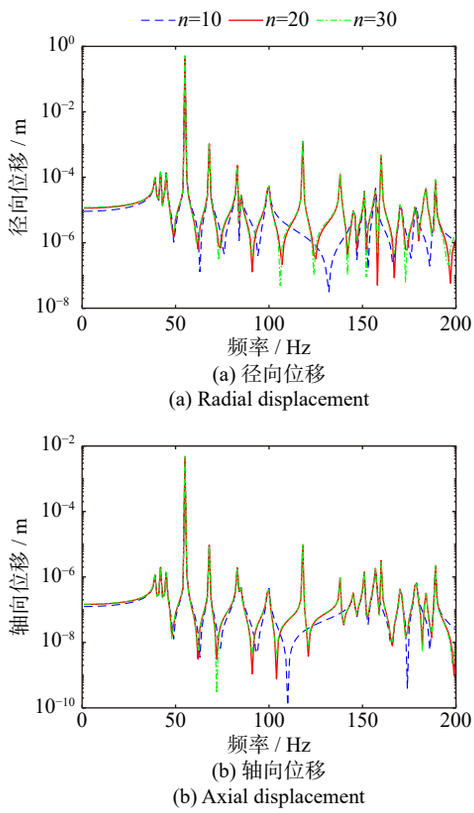


图 4　周向模态数对层合圆锥壳位移收敛性分析

Fig. 4　Analysis of circumferential modes on laminated conical shell convergence of displacement

从图 5 中可以看出，针对本文算例尺寸，当幂级数 m=8 时，层合圆锥壳的位移响应开始收敛。在层合圆锥壳的大端边上，沿圆锥壳径向施加一单位简谐激励力 $F(t)=e^{i\omega t}$，采用本文中谱元法与有限元计算对比的层合圆锥壳轴向和径向的位移响应对比如图 6 所示，可以看出在 200 Hz 频率范围内，本文中谱元法固有频率计算结果与有限元计算结果一致，证明了本文计算方法的正确性。由于本文计算方法无法考虑结构每个振型下的模态阻尼，而是通过结构材料参数中复数杨氏模量 $E=E_0(1+\eta j)$ 提供整体结构的阻尼。因此在固有频率一致的前提下，部分响应幅值偏差比较大。但图 3 中所示圆锥壳有限元模型振动响应计算时间约为 2 小时，而本文中采用谱元法振动响应计算只需 5 分钟，计算效率远远高于有限元软件。

从图 6 中响应可以看出，激励载荷为径向，但层合圆锥壳的径向位移共振峰频率与轴向位移共振峰频率对应，说明层合圆锥壳的径向与轴向响应是耦合的。图中响应曲线前 8 个共振峰频率分别为 39、42、45、55、68、83、85 和 100 Hz，对应的 8 阶固有振型如图 7 所示，前 8 阶对层合圆锥壳径向和轴向位

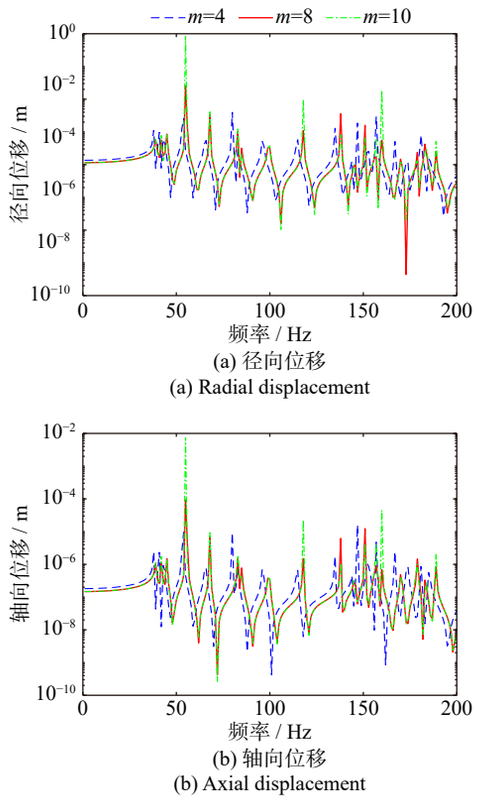


图 5 幂级数截断数对层合圆锥壳位移收敛性的影响

Fig. 5 Analysis of power series truncation on laminated conical shell convergence of displacement

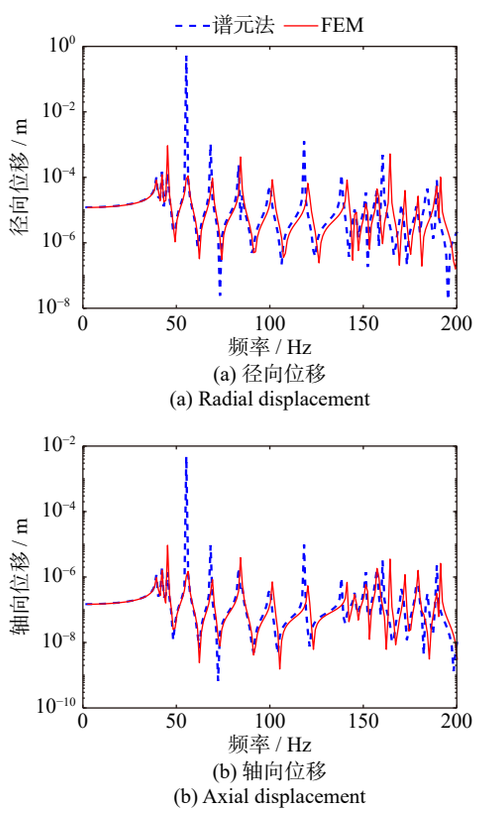


图 6 层合圆锥壳受迫振动响应验证

Fig. 6 Verification of laminated conical shell forced vibration response

移响应有贡献的固有振型均为径向振型。

进一步，为验证本文中计算方法的正确性，采用

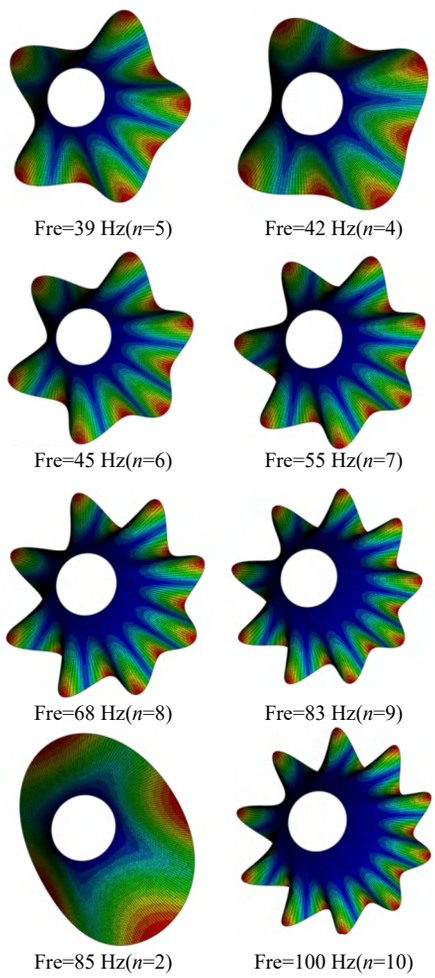


图 7 层合圆锥壳前 8 阶固有振型

Fig. 7 First eight order natural frequencies of laminated conical shell

上述谱元法与有限元计算不同边界下固有频率的对比如表 1 所示，表中 C 为固定边界，F 为自由边界，第一个字母代表圆锥壳小端，第二个字母代表圆锥壳大端。从表中可以看出，采用本文中谱元法计算两种铺设角度下层合圆锥壳固有频率与有限元计算结果一致，证明本文计算方法的正确。随着两端边界条件约束增强，层合圆锥壳固有频率升高；自由状态下，层合圆锥壳固有频率随着周向模态数依次递增，而在其他边界下，则并不随着周向模态数的增加而增加；相同边界，但不同铺设角度时，层合圆锥壳周向模态数出现循序并不一致，90°-0°-90° 铺设角度的固有频率高于 0°-90°-0° 铺设角度下的固有频率。

本文开展了弹性边界下圆锥壳固有频率的对比验证。算例中圆锥壳小端为固支约束边界，大端 u、v、w 和 ψ 某个自由度为弹性约束 10^3 N/m或 10^7 N/m，同时圆锥壳大端另外三个自由度设置为无限大刚度。采用本文计算方法与文献 [5] 中计算结果对比，如表 2 所示。可以看出在弹性边界下，本文计算圆锥壳固有频率与文献结果较为一致。

表 1　层合圆锥壳在典型边界条件下固有频率验证（单位：Hz）

Tab. 1　Verification of natural frequencies of laminated conical shells under typical boundary conditions (Unit: Hz)

90°-0°-90°								
C-F			C-C			F-F		
n	FEM	本文	n	FEM	本文	n	FEM	本文
3	55.4	55.4	5	192.8	192.5	2	9.3	9.4
4	60.4	60.3	4	198.1	197.8	3	26.5	26.4
2	78.7	78.7	6	211.7	211.3	4	50.2	50.1
5	81.8	81.6	7	241.9	241.3	5	78.7	78.5
6	110.4	110.0	3	242.7	242.5	6	109.9	109.5
1	141.9	141.8	8	279.9	278.9	7	144.4	143.6
0°-90°-0°								
C-F			C-C			F-F		
n	FEM	本文	n	FEM	本文	n	FEM	本文
5	39.5	39.4	7	143.1	142.6	2	3.6	3.8
4	42.2	42.2	6	145.6	145.3	3	9.6	9.7
6	45.1	44.8	8	150.2	149.6	4	17.8	17.6
7	55.4	55.0	5	160.7	160.5	5	27.9	27.7
3	55.6	55.7	9	164.1	163.2	6	39.9	39.6
8	68.7	68.0	10	182.5	181.3	7	53.4	52.9

2.2　弹性边界的影响

在实际工程中，圆锥壳往往处于多种边界条件，传统理论中的简支、固支边界往往不能覆盖工程中的实际情况。因此，与实际工程更加贴近的任意弹性边界目前成为相关研究的热点。图 8 为四种不同正交铺设角度下，层合圆锥壳两端任意弹性边界刚度对三种周向模态数下固有频率的影响。从图 8 中可以看出，随着两端弹性刚度的增加，n=3、4、5 三种周向模态数下的固有频率均呈现上升趋势；且随着两端弹性刚度的增加，周向模态数出现的循序发生变化。可以从图中发现，当两端边界刚度大于 10^7 N/m 后，周向模态数较大的 n=5 固有频率更低；而当刚度大于 10^{10} N/m 后，三种周向模态数下的固有频率趋于收敛，可默认为固支边界条件。

由图 8 中固有频率变化曲线可以看出，曲线中间的斜率比较大，这是因为当任意边界中弹簧的刚度与圆锥壳本身的刚度接近时，弹性边界的影响比较明显；当任意弹性边界的刚度远小于圆锥壳本身刚度时，则可近似为自由边界，而当任意弹性边界刚度远大于圆锥壳本身刚度时，圆锥壳固有频率保持不变，收敛为固支边界。

图 9 为圆锥壳两端轴向、周向和径向三个方向分别为 10^6 N/m 和 10^{12} N/m 两种刚度下，层合圆锥壳前 9 阶固有频率的变化曲线。从图中可以看出，当弹性刚度为 10^6 N/m 时，径向位移 W 的任意边界对层合圆锥壳的固有频率影响最大，周向位移 V 的影响最小；而当两端刚度为 10^{12} N/m 时，周向位移 V 的任意弹性边界对整体层合圆锥壳固有频率的影响最大，轴向位移 U 的影响几乎呈现线性，与径向位移 W 的约束接近。

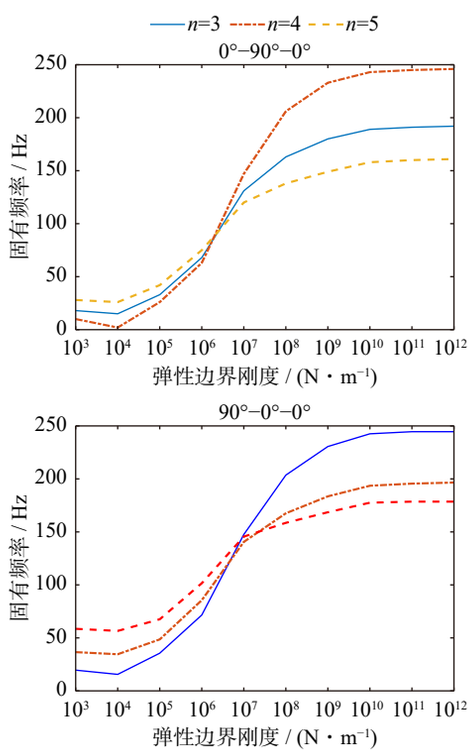
表 2　圆锥壳在弹性边界条件下固有频率验证（单位：Hz）

Tab. 2　Verification of natural frequencies of conical shells under elastic boundary conditions (Unit: Hz)

弹簧刚度/(N·m^{-1})		模态数	文献[5]	本文	误差/%
k_u	10^3	1	17.69	17.61	0.45
		2	19.98	19.89	0.45
		3	28.61	28.58	0.10
	10^7	1	19.68	19.63	0.25
		2	27.32	27.31	0.04
		3	29.02	29.12	0.34
k_v	10^3	1	66.60	66.62	0.03
		2	73.18	73.24	0.08
		3	74.72	74.67	0.07
	10^7	1	58.65	58.72	0.12
		2	66.61	66.66	0.08
		3	73.18	73.22	0.05
k_w	10^3	1	67.13	67.19	0.89
		2	73.46	73.41	0.68
		3	77.53	77.50	0.38
	10^7	1	67.21	67.27	0.89
		2	73.53	73.59	0.81
		3	77.63	77.56	0.90
k_ψ	10^3	1	67.21	67.27	0.89
		2	73.49	73.55	0.81
		3	77.67	77.73	0.77
	10^7	1	67.53	67.48	0.74
		2	73.83	73.78	0.67
		3	78.09	78.14	0.63

2.3　层合角度的影响

图 10 为 0°-90°-0°、90°-0°-0°、90°-0°-90°、90°-90°-0°



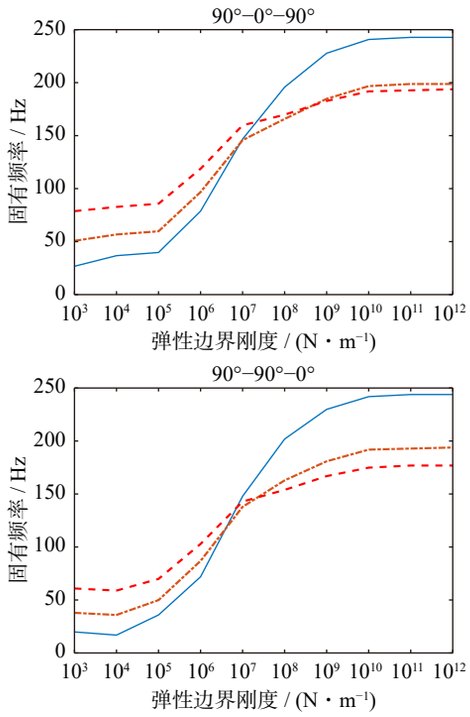
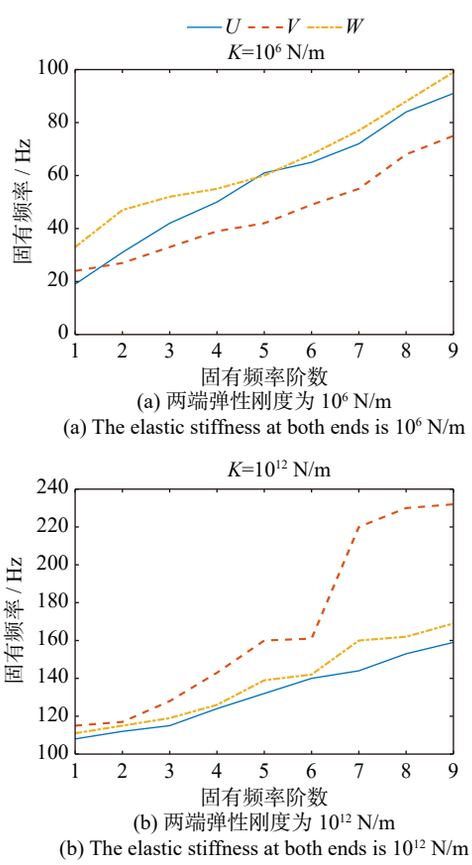


图 8 弹性边界刚度对不同铺设角度下固有频率的影响

Fig. 8 The influence of elastic boundary stiffness on natural frequencies with different layed angles



(a) 两端弹性刚度为 10^6 N/m

(a) The elastic stiffness at both ends is 10^6 N/m

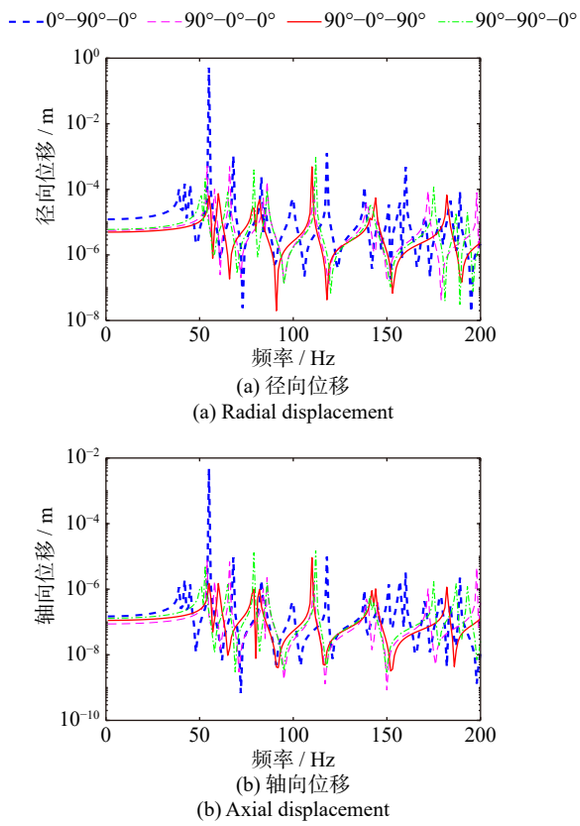
(b) 两端弹性刚度为 10^{12} N/m

(b) The elastic stiffness at both ends is 10^{12} N/m

图 9 层合圆锥壳三个方向刚度对固有频率的影响

Fig. 9 The influence of three direction stiffness on the natural frequency

四种不同层合铺设角度下，层合圆锥壳轴向和径向位移响应对比。从图中可以看出，在 0°-90°-0° 下，轴



(a) 径向位移

(a) Radial displacement

(b) 轴向位移

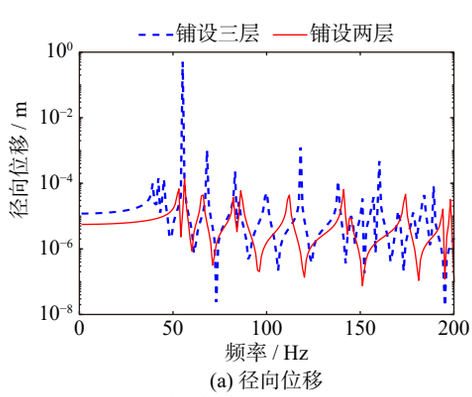
(b) Axial displacement

图 10 层合铺设角度对位移响应的影响

Fig. 10 Influence of layered angle on displacement response

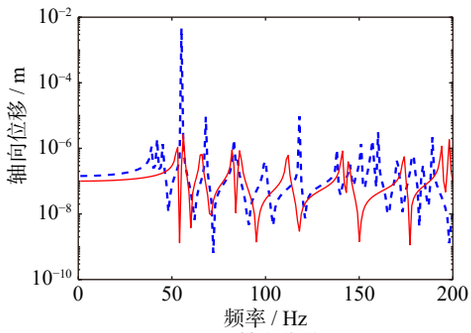
向位移和径向位移共振峰数量最多，在低频 50 Hz 范围内存在三个共振峰，且在低频段响应的幅值最大，共振峰的位置可由该几何参数下层合圆锥壳动刚度矩阵特征值求解获得。此外层合圆锥壳的响应与激励力的扫频间隔、模型中的阻尼比也有关联；90°-0°-0° 和 90°-0°-90° 两种铺设角度下，两种响应曲线基本重叠，这是因为两者在三层铺设角度下，有两层的方向保持一致，第三层的影响可以忽略。

在上述分析的基础下，保持层合圆锥壳的厚度 0.06 m 保持不变，将层合圆锥壳分为两层，每层厚度为 0.03 m，两层采用 0°-90° 铺设角度。在层合圆锥壳几何尺寸、边界条件和载荷保持不变的前提下，径向和轴向位移对比如图 11 所示。从图中可以看出，采用两层铺设层合圆锥壳的位移响应中共振峰频率



(a) 径向位移

(a) Radial displacement



(b) 轴向位移
(b) Axial displacement

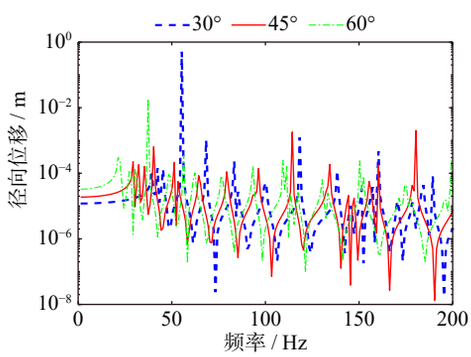
图 11　铺设层数对位移响应的影响

Fig. 11　The influence of layers on displacement response

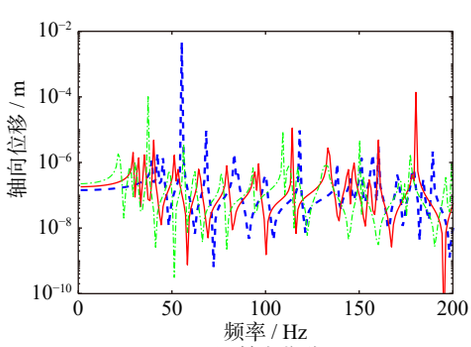
偏高，位移幅值较小。

2.4　锥顶角的影响

锥顶角是圆锥壳的重要几何参数之一，在保持铺设角度为 0°-90°-0°、圆锥壳母线长度和边界条件与外激励载荷不变前提下，图 12 为 30°、45°、60° 三种锥顶角下，层合圆锥壳轴向和径向的位移响应。从图中可以看出，随着锥顶角的增加，轴向和径向位移响应中共振峰频率向低频段移动，且位移响应幅值增大。



(a) 径向位移
(a) Radial displacement

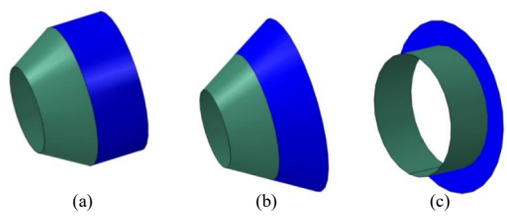


(b) 轴向位移
(b) Axial displacement

图 12　锥顶角对位移响应的影响

Fig. 12　The influence of semi-vertex angle on displacement response

当锥顶角退化成 0° 时，则层合圆锥壳退化成层合圆柱壳；而当锥顶接近 90° 时，则可认为退化成圆环板[21-22]。由于复合材料的耐海水腐蚀性能较高，玻璃钢等复合材料常常被用作水下航行器的蒙皮，以保持航行器具有较好的流体力学性能。水下航行器中常用的几何外形包括圆锥-圆锥、圆锥-圆柱、圆锥-平板等结构。本文在验证了单个层合圆锥壳正确性的前提下，通过改变圆锥壳锥顶角，采用圆锥壳与圆锥壳拼接形成多种水下航行器中常见的复合材料组合壳体结构，如图 13 所示。



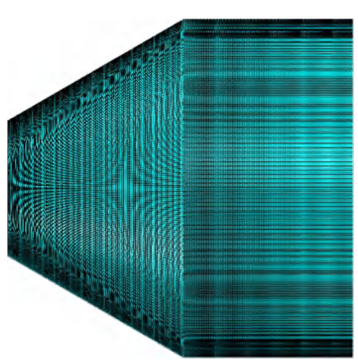
(a)　(b)　(c)

$\alpha_1\neq0°, \alpha_2=0°$　$\alpha_1=\alpha_2\neq0°$　$\alpha_1=0°, \alpha_2=90°$

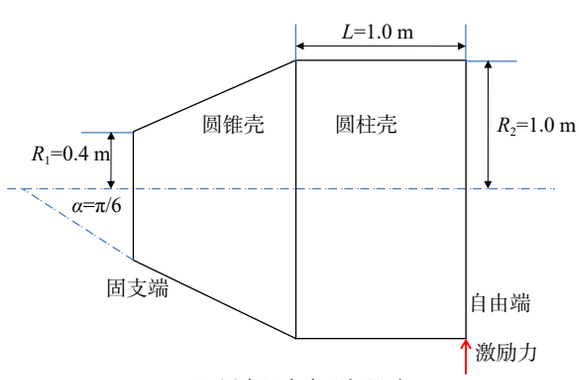
图 13　改变锥顶角的组合壳体

Fig. 13　Combined shell with changed semi-vertex angles

为验证图 13 中复合材料组合壳计算方法的正确性，采用本文计算方法与 1.4 节中壳体组装方法，与有限元模型进行一正交三层铺设组合壳固有频率对比。计算模型几何尺寸和材料属性为：$\alpha=\pi/6$，R_1=0.4 m，$R_2=R_L$=1.0 m，$h_C=h_L$=0.006 m，每层厚度为 0.002 m，圆柱壳长度为 1.0 m。有限元模型采用壳体单元，网格尺寸为 0.002 m，共有 27280 个单元。有限元模型与几何尺寸如图 14 所示。



(a) 层合组合壳体有限元模型
(a) Finite element model of laminated combined shell



(b) 层合组合壳几何尺寸
(b) Geometric dimensions of laminated combined shells

图 14　层合组合壳计算模型有限元与几何尺寸

Fig. 14　Finite element analysis and geometric dimensions of layered composite shell calculation model

层合圆锥-圆柱组合壳前 6 阶固有频率对比如表 3 所示。

表 3 三层正交圆锥-圆柱组合壳固有频率(单位：Hz)

Tab. 3 Natural frequency of three-layer laminated conical-cylindrical combined shell (Unit: Hz)

90°-0°-90°								
C-F			C-C			F-F		
mode	FEM	本文	mode	FEM	本文	mode	FEM	本文
n=3	60.835	60.79	n=4	155.61	155.58	n=2	7.0503	6.82
n=2	22.083	21.99	n=5	161.18	161.14	n=3	19.489	19.40
n=4	20.915	20.83	n=6	169.70	169.38	n=2	25.166	24.96
n=5	37.030	36.96	n=7	173.20	172.77	n=4	36.901	36.83
n=1	59.308	59.22	n=3	181.15	181.14	n=5	59.297	59.21
n=6	86.717	86.57	n=5	187.92	187.62	n=3	70.124	69.89

从表中可以看出，本文计算结果与有限元计算结果基本一致，证明本文中复合材料层合圆锥-圆柱壳计算模型与计算方法正确。

3 结 论

本文基于层合薄壳理论，推导了圆锥壳全局坐标系中的动刚度矩阵，提出了一种基于谱元法的振动分析计算方法，用于分析正交层合圆锥壳及其组合壳体结构的自由和受迫振动特性。与有限元模拟的计算结果比较，验证了本文的方法和模型。并通过人工弹簧实现了层合圆锥壳的任意弹性边界条件。通过算例分析，可以得出以下结论：

(1) 通过有限元方法验证了基于谱元法构建的层合圆锥壳动力学模型的准确性，本文提出方法在固有频率与振动响应分析中表现出与有限元结果高度一致，且计算效率显著提升(从 2 小时提高至 5 分钟)，为复杂边界条件下复合材料壳体的高效振动分析提供了可靠工具。

(2) 层合圆锥壳轴向和径向振动位移共振峰之间存在相互耦合，弹性边界刚度、层合铺设角度及锥顶角对振动特性具有显著影响。边界刚度增强导致固有频率升高；层合角度差异改变模态顺序与频率分布；锥顶角增大促使共振峰向低频迁移，响应幅值随之增大。

(3) 研究成果可直接应用于航行器等工程结构的参数化设计，避免其共振风险。通过调整锥顶角构建的组合壳(如圆锥-圆柱结构)验证了方法的普适性，为复杂组合壳的振动预测与优化提供了理论支撑。

(4)本文中层合圆锥壳的振动响应与圆锥壳解中的周向模态数和幂阶数相关，因此随着计算频率上限的提高，必须要取更多的周向模态数和幂阶数截断，从而增加计算所消耗的资源。且文中提出的组合壳体结构仅适用于圆锥、圆柱和圆环板三种规则结构壳体的组装，而实际工程则可能存在铺板、基座等更多不规则的子结构。

参考文献：

[1] 吴江海，苏明珠，尹志勇，等. 复合材料充液管路流固耦合特性分析 [J]. 振动与冲击，2023，42(7)：99-105.
WU Jianghai，SU Mingzhu，YIN Zhiyong，et al. Fluid-structure interaction characteristics analysis of composite liquid-filled pipeline[J]. Journal of Vibration and Shock，2023，42(7)：99-105.

[2] 缪硕. 复合材料艉部结构振声及声散射特性研究 [D]. 武汉：华中科技大学，2022
MIAO Shuo. Simulation and experimental study of vibration and acoustic characteristics of composite conical structure[D]. Wuhan：Huazhong University of Science and Technology，2022

[3] 吴江海，尹志勇，王纬波，等. 船用复合材料管路振动特性试验研究 [J]. 舰船科学技术，2020，42(7)：85-89.
WU Jianghai，YIN Zhiyong，WANG Weibo，et al. Experiment analysis on the vibration characteristic of composite pipe[J]. Ship Science and Technology，2020，42(7)：85-89.

[4] 田宏业，刘朋，胡志宽，等. 基于半解析法的功能梯度圆锥板自由振动特性 [J]. 船舶力学，2021，25(3)：351-359.
TIAN Hongye，LIU Peng，HU Zhikuan，et al. Free vibration characteristics of functionally graded conical panels with complex boundary conditions[J]. Journal of Ship Mechanics，2021，25(3)：351-359.

[5] ZHANG C Y，JIN G Y，WANG Z H，et al. Dynamic stiffness formulation for free vibration of truncated conical shell and its combinations with uniform boundary restraints[J]. Shock and Vibration，2021，2021(1)：6655035.

[6] 张春雨. 一般边界条件下板壳组合结构动刚度建模方法及振动特性研究 [D]. 哈尔滨：哈尔滨工程大学，2020.
ZHANG Chunyu. Dynamic stiffness modeling method and vibration behavior analysis for plate-shell-coupled structures with general boundary conditions[D]. Harbin：Harbin Engineering University，2020.

[7] 史冬岩，张颖. 复合材料双层锥壳与环板耦合结构振动特性研究 [J]. 振动与冲击，2023，42(12)：317-325.
SHI Dongyan，ZHANG Ying. A study on vibration characteristics of a composite double-layer conical shell and annular plate coupling structure[J]. Journal of Vibration and Shock，2023，42(12)：317-325.

[8] ZHU H Z，WU J H. Free vibration of partially fluid-filled or fluid-surrounded composite shells using the dynamic stiffness method[J]. Acta Mechanica，2020，231(9)：3961-3978.

[9] 张宇航，刘文光，刘超. 任意边界条件下旋转功能梯度锥-

柱连接壳行波模态分析 [J]. 船舶力学，2024，28(1)：154-168.
ZHANG Yuhang，LIU Wenguang，LIU Chao. Analysis of traveling wave mode of a rotating functionally graded joined conical-cylindrical shell with the general boundary condition[J]. Journal of Ship Mechanics，2024，28(1)：154-168.

[10] 张宇航，刘文光，刘超, 等. 圆锥角对功能梯度壳非线性振动响应的影响 [J]. 应用数学和力学，2022，43(8)：857-868.
ZHANG Yuhang，LIU Wenguang，LIU Chao，et al. Effects of cone angles on nonlinear vibration responses of functionally graded shells[J]. Applied Mathematics and Mechanics，2022，43(8)：857-868.

[11] 伊海铭，王春旭. 基于幂级数法的环肋圆锥壳振动特性分析 [J]. 中国舰船研究，2023，18(2)：140-148.
YI Haiming，WANG Chunxu. Vibration characteristics analysis of ring-stiffened conical shells based on power series method[J]. Chinese Journal of Ship Research，2023，18(2)：140-148.

[12] 张帅，李天匀，朱翔，等. 改进傅里叶级数法求解封口锥柱球组合壳的自由振动 [J]. 振动工程学报，2021，34(3)：601-609.
ZHANG Shuai，LI Tianyun，ZHU Xiang，et al. Modified Fourier series method to solve the free vibration of the coupled conical-cylindrical-spherical shell with closed ends[J]. Journal of Vibration Engineering，2021，34(3)：601-609.

[13] 张帅，李天匀，郭文杰，等. 水下环肋圆锥壳临界压力—频率特性分析 [J]. 中国舰船研究，2019，14(2)：77-82.
ZHANG Shuai，LI Tianyun，GUO Wenjie，et al. Critical pressure-frequency characteristics analysis for ring-stiffened submerged conical shells[J]. Chinese Journal of Ship Research，2019，14(2)：77-82.

[14] THINH T I，NGUYEN M C. Dynamic Stiffness Method for free vibration of composite cylindrical shells containing fluid[J]. Applied Mathematical Modelling，2016，40(21-22)：9286-9301.

[15] PATEL B P，GANAPATHI M，KAMAT S. Free vibration characteristics of laminated composite joined conical-cylindrical shells[J]. Journal of Sound and Vibration，2000，237(5)：920-930.

[16] KOUCHAKZADEH M A，SHAKOURI M. Free vibration analysis of joined cross-ply laminated conical shells[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2014，78：118-125.

[17] JAVED S，AL MUKAHAL F H H，SALAMA M A. Free vibration analysis of composite conical shells with variable thickness[J]. Shock and Vibration，2020，2020(1)：4028607.

[18] KIM K，KWAK S，PANG C，et al. Free vibration analysis of combined composite laminated conical-cylindrical shells with varying thickness using the Haar wavelet method[J]. Acta Mechanica，2022，233(4)：1567-1597.

[19] 沈观林，胡更开. 复合材料力学 [M]. 北京：清华大学出版社，2006.
SHEN Guanlin，HU Gengkai. Mechanics of Composite Materials[M]. Beijing：Tsinghua University Press，2006.

[20] LEISSA A W. Vibration of Shells[M]. Acoustical Society of America，1993.

[21] 吴江海. 空间管路与壳体耦合振动及声辐射研究 [D]. 北京：中国舰船研究院，2023.
WU Jianghai. Research on vibration and sound radiation of pipe-shell coupled structures[D]. Beijing：China Ship Research and Development Academy，2023.

[22] WU J H，ZHU H Z，DUAN Y. Free- and forced-vibration characteristic analysis of a double-layered cylindrical shell with general boundary conditions[J]. Journal of Marine Science and Engineering，2025，13(4)：641.

通信作者：吴江海(1989—)，男，博士，高级工程师。
E-mail：wjh702@cssrc.com.cn

应变梯度双层微梁的动力学建模与振动特性研究

黄宁川[1]，张 波[1]，文鹏军[1]，李 成[2]，张 旭[1]

（1. 西南交通大学力学与航空航天学院，四川 成都 610031；2. 常州工学院汽车工程学院，江苏 常州 213032）

摘要： 融合修正应变梯度理论与精化高阶剪切变形理论，提出了由 Winkler-Pasternak 弹性夹层连接的双层微梁动力学模型，并推导了其控制微分方程及边界条件。针对上下层均为两端简支的情形，利用 Navier 法求解了系统自由振动的解析解。为有效求解复杂边值问题，发展了一种结合 Gauss-Lobatto 求积准则与微分求积法的 3 节点弱形式求积单元，该单元具备 C^2 连续性。在充分验证模型有效性的基础上，引入能量参与准则与模态置信准则，深入探究了材料尺度参数及弹性夹层刚度对系统振动频率与模态振型的影响规律。研究表明：剪切变形效应对高阶振型的影响显著，且随长细比的增大而减弱；边界约束较弱的层通常率先主导系统振动，随后与约束较强的层呈现交替主导特性；弹性夹层在系统呈现异步振动模态时作用显著，其刚度变化可诱发模态跃迁现象；模态置信准则能够有效表征夹层刚度与材料尺度参数对系统模态局部化及跃迁行为的影响机制。本文结果有望为微机电系统中多层微梁器件的动力学行为预测提供有效的理论支撑和数据积累。

关键词： 修正应变梯度理论；精化高阶剪切变形理论；双层微梁；弱形式求积元；模态置信准则

中图分类号： O326 **文献标志码：** A DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202508043

Dynamic modeling and vibration characteristics of strain gradient double-layered microbeam

HUANG Ningchuan[1], ZHANG Bo[1], WEN Pengjun[1], LI Cheng[2], ZHANG Xu[1]

（1.School of Mechanics and Aerospace Engineering，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China；
2.School of Automotive Engineering，Changzhou Institute of Technology，Changzhou 213032，China）

Abstract: By integrating the modified strain gradient theory (MSGT) and the refined higher-order shear deformation theory (RHSDT)，this study proposes a dynamic model for a double-layered microbeam connected by a Winkler-Pasternak elastic interlayer. The governing differential equations and boundary conditions were derived. For the case where both upper and lower beams are simply supported at both ends，the analytical solution for the system's free vibration was obtained using Navier's method. To efficiently solve complex boundary value problems，a 3-node weak-form quadrature element based on the Gauss-Lobatto quadrature and the differential quadrature method was developed，featuring C^2 continuity. Following rigorous validation of the model's effectiveness，the energy participation criterion (EPC) and the modal assurance criterion (MAC) were introduced to investigate the influence of material scale parameters and elastic interlayer stiffness on the system's vibration frequencies and mode shapes. It is revealed that shear deformation effects significantly impact higher-order modes，with this influence diminishing as the slenderness ratio increases；the layer with weaker boundary constraints typically dominates the vibration initially，followed by an alternating dominance pattern with the more constrained layer；the elastic interlayer plays a critical role during asynchronous vibration modes, and changes in its stiffness can induce mode transition phenomena. The MAC quantitatively characterizes the mechanisms by which interlayer stiffness and material scale parameters influence system mode localization and transition behavior. The developed model and methodology provide an effective theoretical framework and benchmark data for predicting and analyzing the dynamic behavior of multi-layer microbeam devices in micro-electro-mechanical systems (MEMS)，offering valuable insights for their optimized design.

Keywords: modified strain gradient theory; refined higher-order shear deformation theory; double-layered microbeam; weak-form quadrature element; modal assurance criterion

在工程结构力学领域，梁/板/壳以其轻质高刚度与优异承载效率成为机械、土木及航空航天等工程领域不可或缺的核心承力构件。随着工程应用需求的日益复杂化与多样化，传统单层结构已难以满足新型功能要求。为此，多层梁/板/壳结构因其独特的优势，在传感器、执行器和谐振器等前沿领域获得

收稿日期： 2025-08-14；**修订日期：** 2025-09-10

基金项目： 国家自然科学基金资助项目（12272064, 11602204, 12222209）；四川省自然科学基金面上项目（23NSFSC0042）

了广泛应用。其层间作用、受载模式、预应力以及边界条件等参数的可控性, 为结构设计提供了丰富的调控维度, 进而诱导出多样化的动力学响应。目前, 宏观尺度下多层梁/板/壳的振动行为研究已较为完善[1-5]。

近年来, 多层梁/板结构的应用进一步延伸至新概念微纳传感器与可延展柔性电子等新兴领域。然而, 相关试验证实[6-9], 当结构特征尺寸减小至微纳米尺度时, 其动力学特性呈现出显著的尺度依赖性。经典连续介质力学理论因缺乏表征材料内禀特征尺度的关键本构参数, 在描述此类微尺度力学行为时存在根本性局限。为克服这一挑战, 学者们提出了非经典连续介质力学理论, 如偶应力理论[10]、非局部理论[11]和应变梯度理论等[8,12-14]。其中, 应变梯度理论通过引入位移场的高阶导数作为附加动力学变量, 表征材料内部微缺陷的影响, 为刻画尺度效应提供了有力工具。然而, CORDERO 等[14]指出, 即使是 Mindlin 一阶应变梯度理论, 其本构方程也需引入 5 个附加材料尺度参数, 这给试验测定带来显著困难, 并极大地限制了工程应用。为此, LAM 等[8]提出了修正应变梯度理论。该理论通过对全应变梯度张量进行正交分解, 并施加高阶力偶矩平衡方程, 最终仅需使用膨胀梯度、拉伸梯度偏斜部分和旋转梯度对称部分这 3 个高阶变形度量, 从而将材料尺度参数减少至 3 个。目前, 各类非经典连续介质力学理论已成功应用于多层微梁或微板结构的静/动力学分析。

YE 等[15]基于修正的偶应力理论研究了双层微梁的热弯曲效应, 研究了给定边界条件下横向剪切和尺度参数的影响。RAHMANIAN 等[16]结合 Gurtin-Murdoch 表面效应与卡西米尔作用域, 应用 Galerkin 法求解静电-压电驱动下修正偶应力双层黏弹性纳米谐振器的尺度相关谐振响应。LIU 等[17]推导了对称三层压电微谐振器中热弹性阻尼的解析模型, 该模型考虑了电-机-热耦合效应, 并通过试验对比及模型简化验证了其准确性。SOLTANI 等[18]基于 Eringen 非局部理论, 构建了变截面双层微梁复合模型, 其夹层采用 Kerr 型三参数弹性材料连接; 利用广义微分求积法求解轴向临界屈曲荷载并进行参数分析, 重点比较了不同夹层构型的力学性能。XIE 等[9]结合声学激励器与激光多普勒振动测量系统研究了由钛基底(厚度为 1.996 μm)和镍涂层(厚度介于 106.6~362.6 nm)组成的三明治微梁自由振动的尺度效应, 并采用修正偶应力理论和修正应变梯度理论进行了参数匹配。SIBTAIN 等[19]应用修正偶应力理论和假设模态法, 分析了多层 Reddy 型剪切变形微梁的尺度相关耦合动力学行为, 该模型包含轴向功能梯度芯层、非均匀质量分布及弹簧支撑。

候东昌等[20]基于移动 Kriging 插值的无网格法, 建立了多层二硫化钼纳米板的动力学模型, 同时考虑层内拉伸、层间剪切和单层弯曲效应, 探讨了层数与尺寸对振动频率的影响。张立民等[21-22]结合修正偶应力理论和精化高阶剪切变形理论, 构建了双层微板的自由振动与特征失稳模型; 针对四边简支边界条件, 利用 Navier 法求得两类边值问题的解析解; 同时开发了一种 C^1 型 4 节点弱形式求积元法, 用于求解复杂边界下的自由振动问题。文鹏军等[23]提出了一种 C^2 型 4 节点弱形式求积元法求解三层应变梯度微板的自由振动问题, 并引入模态置信准则以量化各因素对系统模态局部化及跃迁特性的影响。WEN 等[24]针对三层应变梯度微板的特征屈曲模型, 发展了一种 C^1 型 9 节点弱形式求积元法求解其屈曲模态的局部化及阶次跃迁特性。

以上研究表明, 双层微梁/微板的静/动力学问题已获得广泛关注。然而, 当前针对双层微梁的自由振动分析多集中于定性层面, 其在参数影响规律的定量化研究方面仍显不足。为此, 本文基于修正应变梯度理论和精化高阶剪切变形理论, 建立双层微梁的自由振动模型。针对各层简支的边界条件, 利用 Navier 法推导系统自由振动的解析解; 同时, 针对复杂边界问题, 构建相应的弱形式求积元法进行求解。此外, 采用能量参与准则和模态置信准则, 量化材料尺度参数、弹性夹层刚度及长细比等因素对系统自由振动频率及模态振型的影响。

1　应变梯度双层微梁的动力学建模

图 1 为长度为 L、宽度为 B、高度为 H、杨氏模量为 E、泊松比为 ν、密度为 ρ 的各向同性双层微梁。双层微梁的变形分别由笛卡尔坐标系 XO_1Z 和 XO_2Z 描述, O_1、O_2 分别处于上、下层梁横截面形心, X 轴为沿着梁的轴线方向, K_p 为弹性夹层剪切刚度, K_w 为弹性夹层拉压刚度。本文采用修正应变梯度理论、Winkler-Pasternak 弹性夹层模型和精化高阶剪切变形理论, 分别描述材料的尺度效应、层间相互作用行为和结构的位移场。

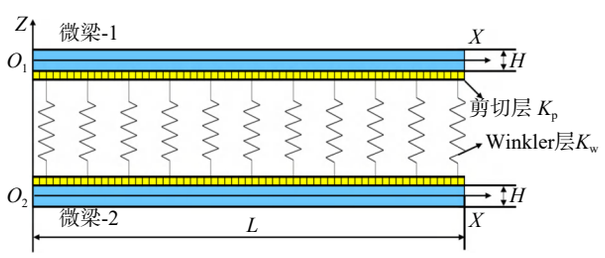


图 1　双层微梁示意图

Fig. 1　Schematic diagram of double-layered microbeam

在修正应变梯度理论下，图 1 所示双层微梁的应变能为[8]：

$$\Pi_{\mathrm{S}}=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+p_i\gamma_i+m_{ij}^{(s)}\chi_{ij}^{(s)}+\tau_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{1}$$

式中，Ω 表示弹性体所占据空间；σ_{ij} 为应力张量分量；p_i、$m_{ij}^{(s)}$ 和 $\tau_{ijk}^{(1)}$ 均为高阶应力张量分量；ε_{ij}、γ_i、$\chi_{ij}^{(s)}$ 和 $\eta_{ijk}^{(1)}$ 分别表示应变张量、膨胀梯度张量、对称旋转梯度张量和偏拉伸梯度张量，可表示为：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(U_{i,j}+U_{j,i}\right) \tag{2a}$$

$$\gamma_i=\frac{\partial\varepsilon_{mm}}{\partial X_i} \tag{2b}$$

$$\chi_{ij}^{(s)}=\frac{1}{4}\left(e_{imn}\frac{\partial^2U_n}{\partial X_m\partial X_j}+e_{jmn}\frac{\partial^2U_n}{\partial X_m\partial X_i}\right) \tag{2c}$$

$$\begin{aligned}\eta_{ijk}^{(1)}=&\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\varepsilon_{jk}}{\partial X_i}+\frac{\partial\varepsilon_{ki}}{\partial X_j}+\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial X_k}\right)-\frac{\delta_{ij}}{15}\left(\frac{\partial\varepsilon_{mm}}{\partial X_k}+\frac{\partial\varepsilon_{mk}}{\partial X_m}\right)-\\&\frac{\delta_{jk}}{15}\left(\frac{\partial\varepsilon_{mm}}{\partial X_i}+\frac{\partial\varepsilon_{mi}}{\partial X_m}\right)-\frac{\delta_{ki}}{15}\left(\frac{\partial\varepsilon_{mm}}{\partial X_j}+\frac{\partial\varepsilon_{mj}}{\partial X_m}\right)\end{aligned} \tag{2d}$$

式中，U_i 为位移分量；X_i 为微梁轴线上一点的位置；δ_{ij} 和 e_{imn} 分别为 Kronecker 符号和置换符号。本构关系如下：

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ij}+2G\varepsilon_{ij},\quad p_i=2Gl_0^2\gamma_i \tag{3a}$$

$$\tau_{ijk}^{(1)}=2Gl_1^2\eta_{ijk}^{(1)},\quad m_{ij}^{(s)}=2Gl_2^2\chi_{ij}^{(s)} \tag{3b}$$

式中，l_0、l_1 和 l_2 为三个独立的材料尺度参数，在实际建模中仅采用一个等效材料尺度参数 l 即可描述修正应变梯度理论下的尺度效应，当 l_0 与 l_1 为 0 时则退化为修正的偶应力理论；λ 和 G 为拉梅常数，定义如下：

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4}$$

在精化高阶剪切变形理论下，双层微梁第 i 层位移场可表示为[25]：

$$\begin{aligned}&W^{(i)}=W_{\mathrm{b}}^{(i)}(X,t)+W_{\mathrm{s}}^{(i)}(X,t),\\&U^{(i)}=-Z\frac{\partial W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X}+\left(\frac{Z}{4}-\frac{5Z^3}{3H^2}\right)\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X},\quad V^{(i)}=0\end{aligned} \tag{5}$$

式中，t 表示时间；$U^{(i)}$、$V^{(i)}$ 和 $W^{(i)}$ 分别为第 i 层梁沿 X、Y 和 Z 方向的位移分量；$W_{\mathrm{b}}^{(i)}$ 和 $W_{\mathrm{s}}^{(i)}$ 分别为中面纯弯曲和纯剪切引起的挠度。

利用式 (2) 和 (5) 可得微梁的应变张量和应变梯度张量的非零分量：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{XX}^{(i)}&=\left(\frac{Z}{4}-\frac{5Z^3}{3H^2}\right)\frac{\partial^2W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}-Z\frac{\partial^2W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2},\\\varepsilon_{XZ}^{(i)}&=\varepsilon_{ZX}^{(i)}=\left(\frac{5}{8}-\frac{5Z^2}{2H^2}\right)\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\gamma_X^{(i)}&=\left(\frac{Z}{4}-\frac{5Z^3}{3H^2}\right)\frac{\partial^3W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^3}-Z\frac{\partial^3W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^3},\\\gamma_Z^{(i)}&=\left(\frac{1}{4}-\frac{5Z^2}{H^2}\right)\frac{\partial^2W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}-\frac{\partial^2W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\chi_{YX}^{(s)(i)}=\chi_{XY}^{(s)(i)}&=-\left(\frac{3}{16}+\frac{5Z^2}{4H^2}\right)\frac{\partial^2W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2},\\\chi_{ZY}^{(s)(i)}=\chi_{YZ}^{(s)(i)}&=-\frac{5Z}{2H^2}\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\eta_{XXX}^{(1)(i)}&=\left(\frac{Z}{10}-\frac{2Z^3}{3H^2}\right)\frac{\partial^3W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^3}+\frac{2Z}{H^2}\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}-\frac{2Z}{5}\frac{\partial^3W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^3},\\\eta_{XXZ}^{(1)(i)}&=\left(\frac{2}{5}-\frac{8Z^2}{3H^2}\right)\frac{\partial^2W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}-\frac{4}{15}\frac{\partial^2W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2},\\\eta_{YYX}^{(1)(i)}&=\left(\frac{Z^3}{3H^2}-\frac{Z}{20}\right)\frac{\partial^3W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^3}+\frac{Z}{5}\frac{\partial^3W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^3}+\frac{2Z}{3H^2}\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X},\\\eta_{ZZX}^{(1)(i)}&=\left(\frac{Z^3}{3H^2}-\frac{Z}{20}\right)\frac{\partial^3W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^3}+\frac{Z}{5}\frac{\partial^3W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^3}-\frac{8Z}{3H^2}\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X},\\\eta_{ZYY}^{(1)(i)}&=\left(\frac{2Z^2}{3H^2}-\frac{1}{10}\right)\frac{\partial^2W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}+\frac{1}{15}\frac{\partial^2W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2},\\\eta_{ZZZ}^{(1)(i)}&=\frac{1}{5}\frac{\partial^2W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2}+\left(\frac{2Z^2}{H^2}-\frac{3}{10}\right)\frac{\partial^2W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}\end{aligned} \tag{9}$$

拉伸梯度张量具有二重对称性，其非零分量满足：$\eta_{ZXX}^{(1)(i)}=\eta_{XZX}^{(1)(i)}=\eta_{XXZ}^{(1)(i)}$，$\eta_{XZZ}^{(1)(i)}=\eta_{ZXZ}^{(1)(i)}=\eta_{ZZX}^{(1)(i)}$，$\eta_{XYY}^{(1)(i)}=\eta_{YXY}^{(1)(i)}=\eta_{YYX}^{(1)(i)}$，$\eta_{YYZ}^{(1)(i)}=\eta_{YZY}^{(1)(i)}=\eta_{ZYY}^{(1)(i)}$。

利用式 (5) 可得双层微梁的动能如下：

$$\Pi_{\mathrm{k}}=\sum_{i=1}^{2}\int_0^L\left[M_1\left(\frac{\partial^2W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X\partial t}\right)^2+M_2\left(\frac{\partial^2W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X\partial t}\right)^2+M_3\left(\frac{\partial W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial t}+\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}X \tag{10}$$

将式 (6)~(9) 代入式 (3)，同时引入弹性夹层势能，得到双层微梁的总势能泛函如下：

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{p}}=&\sum_{i=1}^{2}\int_0^L\left[\Lambda_1\left(\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}\right)^2+\Lambda_2\left(\frac{\partial^2W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}\right)^2+\Lambda_3\left(\frac{\partial^3W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^3}\right)^2+\Lambda_4\left(\frac{\partial^2W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2}\right)^2+\Lambda_5\left(\frac{\partial^3W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^3}\right)^2+\Lambda_6\frac{\partial^2W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}\frac{\partial^2W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2}+\Lambda_7\frac{\partial^3W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^3}\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}\right]\mathrm{d}X+\\&\frac{1}{2}\int_0^L\left[K_{\mathrm{w}}\left(W^{(1)}-W^{(2)}\right)^2+K_{\mathrm{p}}\left(\frac{\partial\left(W^{(1)}-W^{(2)}\right)}{\partial X}\right)^2\right]\mathrm{d}X\end{aligned} \tag{11}$$

其中：

$$\Lambda_1=GA\left(\frac{5}{12}+\frac{20l_1^2}{9H^2}+\frac{25l_2^2}{24H^2}\right),\quad\Lambda_3=GJ\left(\frac{l_0^2}{84}+\frac{l_1^2}{210}\right),$$

$$\Lambda_2=GA\left(\frac{l_0^2}{6}+\frac{4l_1^2}{15}+\frac{3l_2^2}{16}\right)+\frac{EJ}{168},\quad\Lambda_5=GJ\left(l_0^2+\frac{2l_1^2}{5}\right),$$

$$\Lambda_4=GA\left(l_0^2+\frac{4l_1^2}{15}+\frac{l_2^2}{2}\right)+\frac{EJ}{2},\quad\Lambda_7=-\frac{GAl_1^2}{3},$$

$$\Lambda_6=GA\left(\frac{l_0^2}{3}-\frac{16l_1^2}{45}+\frac{7l_2^2}{12}\right),\quad M_1=\frac{\rho J}{168},M_2=\frac{\rho J}{2},$$

$$M_3=\frac{\rho A}{2},\quad J=\frac{BH^3}{12} \tag{12}$$

式中，A 为微梁的横截面面积。

根据哈密顿原理，$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\Pi_{\mathrm{k}}-\delta\Pi_{\mathrm{p}}\right)\mathrm{d}t=0$，其中 t_1 和 t_2 分别表示初始时刻和最终时刻，可得双层微梁的控制微分方程如下：

$$\delta W_{\mathrm{b}}^{(i)}:2\Lambda_5\frac{\partial^6 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^6}+6\frac{\partial\Lambda_5}{\partial X}\frac{\partial^5 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^5}+(\Lambda_7-\Lambda_6)\frac{\partial^4 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^4}+2\left(3\frac{\partial^2\Lambda_5}{\partial X^2}-\Lambda_4\right)\frac{\partial^4 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^4}+\left(3\frac{\partial\Lambda_7}{\partial X}-2\frac{\partial\Lambda_6}{\partial X}\right)\frac{\partial^3 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^3}+2\left(\frac{\partial^3\Lambda_5}{\partial X^3}-2\frac{\partial\Lambda_4}{\partial X}\right)\frac{\partial^3 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^3}+\left(3\frac{\partial^2\Lambda_7}{\partial X^2}-\frac{\partial^2\Lambda_6}{\partial X^2}\right)\frac{\partial^2 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}-2\frac{\partial^2\Lambda_4}{\partial X^2}\frac{\partial^2 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2}+2M_2\frac{\partial^4 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2\partial t^2}+2\frac{\partial M_2}{\partial X}\frac{\partial^3 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X\partial t^2}+\frac{\partial^3\Lambda_7}{\partial X^3}\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}-(-1)^i K_{\mathrm{p}}\frac{\partial^2(W^{(1)}-W^{(2)})}{\partial X^2}-2M_3\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial t^2}+(-1)^i K_{\mathrm{w}}\left(W^{(1)}-W^{(2)}\right)=0 \tag{13}$$

$$\delta W_{\mathrm{s}}^{(i)}:2\Lambda_3\frac{\partial^6 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^6}+6\frac{\partial\Lambda_3}{\partial X}\frac{\partial^5 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^5}+(\Lambda_7-\Lambda_6)\frac{\partial^4 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^4}+2\left(3\frac{\partial^2\Lambda_3}{\partial X^2}-\Lambda_2\right)\frac{\partial^4 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^4}+\frac{\partial(\Lambda_7-2\Lambda_6)}{\partial X}\frac{\partial^3 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^3}+\left(2\frac{\partial^3\Lambda_3}{\partial X^3}-4\frac{\partial\Lambda_2}{\partial X}\right)\frac{\partial^3 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^3}-\frac{\partial^2\Lambda_6}{\partial X^2}\frac{\partial^2 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2}+2\frac{\partial\Lambda_1}{\partial X}\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}+2\left(\Lambda_1-\frac{\partial^2\Lambda_2}{\partial X^2}\right)\frac{\partial^2 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}+2M_1\frac{\partial^4 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2\partial t^2}+2\frac{\partial M_1}{\partial X}\frac{\partial^3 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X\partial t^2}-2M_3\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2}-(-1)^i K_{\mathrm{p}}\frac{\partial^2(W^{(1)}-W^{(2)})}{\partial X^2}+(-1)^i K_{\mathrm{w}}\left(W^{(1)}-W^{(2)}\right)=0 \tag{14}$$

对于各层均为简支的情形, 其位移场可以展开为如下傅里叶级数:

$$W_{\mathrm{b}}^{(i)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(i)}\sin(\alpha_n X)\mathrm{e}^{\mathrm{I}\omega t},\ W_{\mathrm{s}}^{(i)}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{(i)}\sin(\alpha_n X)\mathrm{e}^{\mathrm{I}\omega t} \tag{15}$$

式中, $\alpha_n=n\pi/L$; $A_n^{(i)}$和$B_n^{(i)}$为挠度分量幅值; I 为虚数单位; ω 为微梁自由振动频率。

将式 (15) 代入式 (13) 和 (14), 可得如下代数方程组:

$$\begin{bmatrix}K_{11}-\omega^2M_{11} & K_{12}-\omega^2M_{12} & K_{13} & K_{14}\\ K_{12}-\omega^2M_{12} & K_{22}-\omega^2M_{22} & K_{23} & K_{24}\\ K_{13} & K_{23} & K_{33}-\omega^2M_{33} & K_{34}-\omega^2M_{34}\\ K_{14} & K_{24} & K_{34}-\omega^2M_{34} & K_{44}-\omega^2M_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_n^{(1)}\\A_n^{(2)}\\B_n^{(1)}\\B_n^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{16}$$

其中:

$$\begin{aligned}&K_{11}=K_{33}=K_{\mathrm{w}}+K_{\mathrm{p}}\alpha_n^2+2\Lambda_4\alpha_n^4+2\Lambda_5\alpha_n^6,\\&K_{12}=K_{34}=K_{\mathrm{w}}+K_{\mathrm{p}}\alpha_n^2+(\Lambda_6-\Lambda_7)\alpha_n^4,\\&K_{22}=K_{44}=K_{\mathrm{w}}+K_{\mathrm{p}}\alpha_n^2+2\Lambda_1\alpha_n^2+2\Lambda_2\alpha_n^4+2\Lambda_3\alpha_n^6,\\&K_{13}=K_{14}=K_{23}=K_{24}=-K_{\mathrm{w}}-K_{\mathrm{p}}\alpha_n^2,\\&M_{11}=M_{33}=2M_3+2M_2\alpha_n^2,\ \ M_{12}=M_{34}=2M_3,\\&M_{22}=M_{44}=2M_3+2M_1\alpha_n^2\end{aligned} \tag{17}$$

求解式 (16) 对应的特征值问题, 可得各层简支情形下双层微梁的振动频率。

2　C^2 型弱形式求积元求解

如式 (11) 所示, 双层微梁的势能泛函涉及位移场的三阶导数, 这就要求$W_{\mathrm{b}}^{(i)}$和$W_{\mathrm{s}}^{(i)}$满足C^2连续性, 从而对离散方法的形函数有高阶连续性要求。近年来, ZHANG 等[26-29]通过构造四阶和六阶微分求积几何映射策略, 分别满足位移场的C^1和C^2连续性要求, 提出了应变梯度 Euler-Bernoulli 梁、Timoshenko 梁、Reddy 梁、Mindlin 板和 Kirchhoff 板的弱形式求积元法, 研究表明, 在相同的节点位移参数配置下, 弱形式求积元法较标准有限元法具有更优秀的收敛性。值得注意的是, 现有的应变梯度弱形式求积元梁单元均未包含中间节点。本文将在已有研究基础上进行拓展, 提出一种位移场C^2连续性要求的 7 阶微分求积几何映射策略, 该策略包含了单元中点的挠度。图 2 给出了单元求积点处局部坐标及权系数, 同时展示了单元求积点处挠度参数与单元结点处产生的映射关系。首先在 Gauss-Lobatto 求积点处对挠度值进行拉格朗日插值。其次通过在单元端点处引入包含挠度本身及其一阶、二阶导数的位移参数。最后采用图 2 所示的微分求积几何映射策略, 消除除中间点外的内部求积, 从而满足单元的C^2连续性要求。

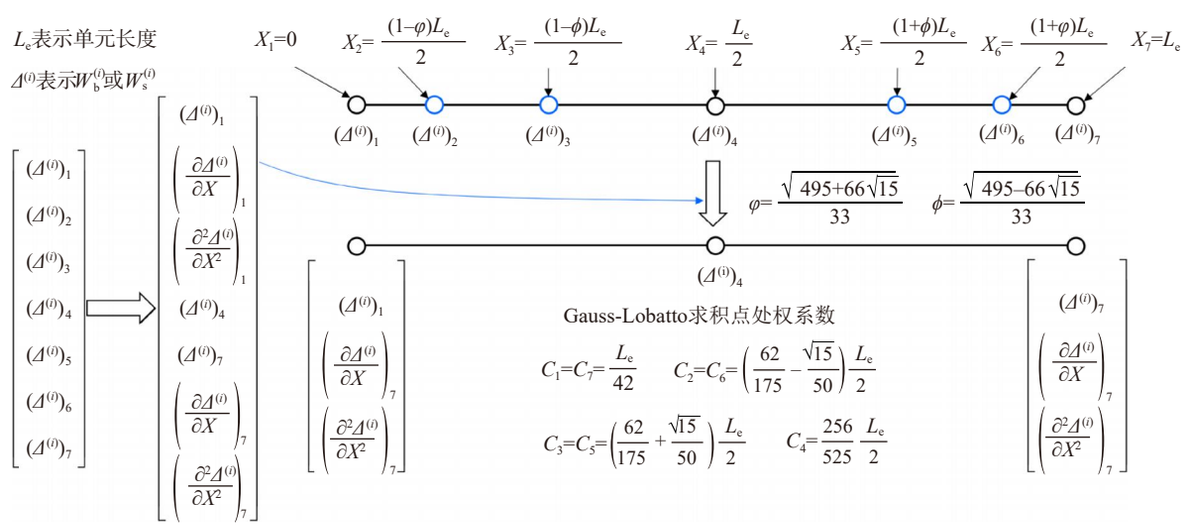


图 2　7 阶弱形式求积几何映射策略

Fig. 2　Seven-order weak-form quadrature geometric mapping scheme

单元位移场可由拉格朗日插值多项式构建为：$\Delta^{(i)}=\sum_{p=1}^{7} l_p(X)\Delta_p^{(i)}$。利用微分求积准则可得单元求积点处各阶导数：

$$\left[\frac{\partial^m \Delta^{(i)}}{\partial X^m}\right]=\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{\Delta}_G^{(i)} \tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{A}_m$为第 m 阶微分求积权系数矩阵，具体表达式见附录 A；$\boldsymbol{\Delta}_G^{(i)}=\left[\begin{array}{ccccc}\Delta_1^{(i)} & \Delta_2^{(i)} & \cdots & \Delta_7^{(i)}\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$为求积点处挠度向量。为保证$\Delta^{(i)}$的 C^2 连续性要求，需要利用图 2 所示 7 阶弱形式求积几何映射策略将$\boldsymbol{\Delta}_G^{(i)}$变换为单元结点位移向量$\boldsymbol{\Delta}_N^{(i)}$：

$$\boldsymbol{\Delta}_N^{(i)}=\left[\begin{array}{ccccccc}\Delta_1^{(i)} & \left(\dfrac{\partial\Delta^{(i)}}{\partial X}\right)_1 & \left(\dfrac{\partial^2\Delta^{(i)}}{\partial X^2}\right)_1 & \cdots & \Delta_4^{(i)} & \Delta_7^{(i)} & \left(\dfrac{\partial\Delta^{(i)}}{\partial X}\right)_7 & \left(\dfrac{\partial^2\Delta^{(i)}}{\partial X^2}\right)_7\end{array}\right]^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

$\boldsymbol{\Delta}_G^{(i)}$和$\boldsymbol{\Delta}_N^{(i)}$满足关系$\boldsymbol{\Delta}_G^{(i)}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Delta}_N^{(i)}$，转换矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的具体表达式见附录 B。$\boldsymbol{\Delta}_N^{(i)}$具体为：

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{bN}}^{(i)}\left[\left(W_{\mathrm{b}}^{(i)}\right)_1,\left(\frac{\partial W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X}\right)_1,\left(\frac{\partial^2 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2}\right)_1,\left(W_{\mathrm{b}}^{(i)}\right)_4,\left(W_{\mathrm{b}}^{(i)}\right)_7,\left(\frac{\partial W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X}\right)_7,\left(\frac{\partial^2 W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X^2}\right)_7\right]^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{sN}}^{(i)}=\left[\left(W_{\mathrm{s}}^{(i)}\right)_1,\left(\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}\right)_1,\left(\frac{\partial^2 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}\right)_1,\left(W_{\mathrm{s}}^{(i)}\right)_4,\left(W_{\mathrm{s}}^{(i)}\right)_7,\left(\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}\right)_7,\left(\frac{\partial^2 W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X^2}\right)_7\right]^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

利用式 (18)~(22) 可得Π_{p}和Π_{k}的离散形式：

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{p}}=&\sum_{i=1}^{2}\left(\boldsymbol{W}_{\mathrm{sN}}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\left(\Lambda_1\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1+\Lambda_2\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_2+\Lambda_3\boldsymbol{A}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{C}_G+\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1\right)\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{W}_{\mathrm{sN}}^{(i)}+\left(\boldsymbol{W}_{\mathrm{bN}}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\\&\left(\Lambda_4\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_2+\Lambda_5\boldsymbol{A}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{C}_G+\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1\right)\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{W}_{\mathrm{bN}}^{(i)}+\left(\boldsymbol{W}_{\mathrm{sN}}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\\&\left(\Lambda_6\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_2+\Lambda_7\boldsymbol{A}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1+2\boldsymbol{C}_G+2\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1\right)\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{W}_{\mathrm{bN}}^{(i)}-\\&2\left(\boldsymbol{W}_{\mathrm{bN}}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{C}_G+\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1\right)\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{W}_{\mathrm{bN}}^{(2)}-2\left(\boldsymbol{W}_{\mathrm{bN}}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{C}_G+\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1\right)\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{W}_{\mathrm{sN}}^{(2)}-\\&2\left(\boldsymbol{W}_{\mathrm{bN}}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{C}_G+\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1\right)\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{W}_{\mathrm{sN}}^{(1)}-2\left(\boldsymbol{W}_{\mathrm{sN}}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{C}_G+\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1\right)\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{W}_{\mathrm{sN}}^{(2)}\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{k}}=&\sum_{i=1}^{2}\left(\dot{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{bN}}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\left(M_2\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1+M_3\boldsymbol{C}_G\right)\boldsymbol{D}^{-1}\dot{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{bN}}^{(i)}+\\&\left(\dot{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{sN}}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(M_1\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{A}_1+M_3\boldsymbol{C}_G\right)\cdot\boldsymbol{D}^{-1}\dot{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{sN}}^{(i)}+\\&2M_3\left(\dot{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{bN}}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_G\boldsymbol{D}^{-1}\dot{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{sN}}^{(i)}\end{aligned} \tag{23}$$

式中，$\boldsymbol{C}_G$为单元求积点处权系数形成的对角矩阵。

利用哈密顿原理，即可获得相应的单元刚度矩阵和质量矩阵。

3 结果与讨论

针对前文建立的双层微梁模型，本节通过数值算例验证理论建模与求解方法的有效性，进而分析各因素对系统自由振动频率与模态振型的影响规律。需要指出的是，即使对于环氧树脂，通过试验确定l_0、l_1和l_2的具体值也很困难。文献 [8] 中假定 $l_0=l_1=l_2=l$。然而，在重构的应变梯度 Euler-Bernoulli 梁模型中，ZHANG 等[30] 采用$l_{\mathrm{s}}=1.2l_{\mathrm{m}}$（$l_{\mathrm{s}}$和 l_{m}为文献 [30] 中所设置的材料内禀尺度参数），材料也为环氧树脂。本文中采用了文献 [30] 中的假定，材料杨氏模量 $E=1.44$ GPa，密度$\rho=1220$ kg/m^3，泊松比$\nu=0.38$。双层微梁的常见边界约束如下，其中自由端（F）无位移约束。

固支（C）：

$$W_{\mathrm{b}}^{(i)}=W_{\mathrm{s}}^{(i)}=\frac{\partial W_{\mathrm{b}}^{(i)}}{\partial X}=\frac{\partial W_{\mathrm{s}}^{(i)}}{\partial X}\bigg|_{X=0,L}=0 \tag{24}$$

简支（S）：

$$W_{\mathrm{b}}^{(i)}=W_{\mathrm{s}}^{(i)}\big|_{X=0,L}=0 \tag{25}$$

为便于后续的研究，引入以下无量纲参数：

$$\beta_nL=L\left(\frac{\rho A\omega_n^2}{EJ}\right)^{0.25},\quad k_{\mathrm{w}}=\frac{K_{\mathrm{w}}L^4}{EJ},\quad k_{\mathrm{p}}=\frac{K_{\mathrm{p}}L^2}{EJ} \tag{26}$$

式中，ω_n为第 n 阶频率。

3.1 有效性验证

关于 C^1 和 C^2 型应变梯度弱形式求积元的收敛性与正确性，文献 [26-29] 已开展过详细研究，但文献中的单元节点未包含中点。为不失一般性，本节将理论模型简化为单层情形，并简要讨论单元的收敛性。参数设置为 $L/H=10$，$l/H=0.5$。当单元数量达到 10 个时，前 5 阶频率已迅速收敛至稳定值，而高阶模态的形变模式更为复杂，对计算误差更为敏感，因此其收敛过程更能严格地检验数值方法的稳定性和精度。图 3 展示了不同边界条件下，微梁第 6 阶无量纲频率的相对误差（定义为$e_{\mathrm{r}}=\left|\dfrac{(\beta_6L)_{i+1}-(\beta_6L)_i}{(\beta_6L)_i-(\beta_6L)_{i-1}}\right|$）随单元数量 N_{e} 的变化规律。结果表明，当 $N_{\mathrm{e}}>15$ 时，第 6 阶无量纲频率的相对误差趋于稳定，且其数值在小数点后四位保持不变，表明计算结果收敛。因此，后续计算中统一采用 15 个单元。

表 1 列出了不同边界条件和长细比下微梁的前 3 阶无量纲频率，并与文献计算结果进行对比验证，参数设置为 $l/H=0.5$。由于 Navier 法构造的正弦级数解仅能满足两端简支边界条件，故不存在其他约束。表 1 显示，微梁的弱形式求积元法计算结果略小于 Navier 近似解，原因在于 Navier 法采用正弦函数的无

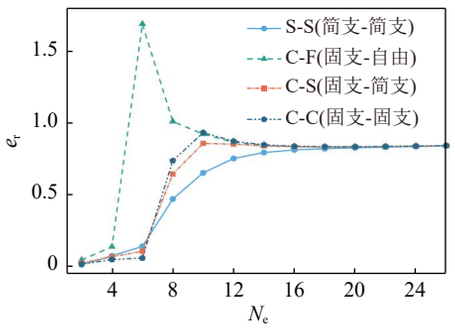


图 3　不同边界条件下第 6 阶无量纲频率的收敛性

Fig. 3　Convergence of the sixth order dimensionless frequencies under different boundary conditions

表 1　不同边界条件和长细比下前 3 阶无量纲频率

Tab. 1　The first three order dimensionless frequencies under different boundary conditions and slenderness ratios

边界条件	L/H	方法	无量纲频率		
			$\beta_1 L$	$\beta_2 L$	$\beta_3 L$
S-S（简支-简支）	5	Navier	4.5322	8.5708	12.1910
		QEM	4.5280	8.5480	12.1399
		文献[26]	4.5070	8.5120	12.1005
	10	Navier	4.6245	9.0644	13.2338
		QEM	4.6239	9.0601	13.2213
		文献[26]	4.6029	9.0225	13.1738
C-F（固支-自由）	5	QEM	2.7451	6.4781	10.2594
		文献[26]	2.7334	6.4613	10.2438
	10	QEM	2.7715	6.8070	11.1063
		文献[26]	2.7588	6.7803	11.0713
C-S（固支-简支）	5	QEM	5.5417	9.3896	12.8963
		文献[26]	5.4957	9.3481	12.8740
	10	QEM	5.7402	10.0778	14.1365
		文献[26]	5.7051	10.0297	14.0895
C-C（固支-固支）	5	QEM	6.4774	10.2757	13.6493
		文献[26]	6.4661	10.1560	13.6455
	10	QEM	6.8323	11.0993	15.0110
		文献[26]	6.8081	11.0044	14.9829

穷级数作为试函数，精确满足控制方程和边界条件，代表了理论上最“硬”的模型；而本文采用的弱形式求积元法离散过程引入位移试函数，对真实变形构成了约束，导致数值模型表现出“软”的特性。单层微梁的前 3 阶无量纲频率与文献 [26] 的计算结果对比略大，误差随长细比的增加逐渐减小。原因在于文献 [26] 和本文分别采用 Reddy三阶剪切变形理论和精化高阶剪切变形理论，文献 [31]中指出了后者存在的缺陷。此外，文献 [26] 和本文分别采用 6 阶和 7 阶弱形式求积元法，在单元数量相同的情况下，前者的自由度小于后者。

3.2　参数研究

图 4 展示了弹性夹层刚度对 SS-SS（上层简支简支-下层简支简支）双层微梁第 2 阶和第 4 阶异步振动无量纲频率的影响，参数设置为 $L/H=10$。结果表明，弹性夹层仅在双层微梁发生异步振动时发挥作用；增大弹性夹层刚度使系统异步振动频率增大。此外，相较于 Winkler 层刚度，Pasternak 层刚度对无量纲频率的影响更为显著。

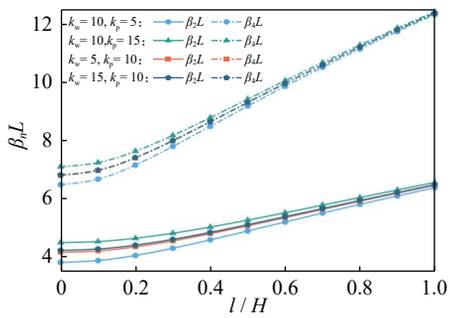


图 4　弹性夹层刚度对 SS-SS 双层微梁异步振动无量纲频率的影响

Fig. 4　Effects of elastic interlayer stiffnesses on dimensionless frequency of asynchronous vibration for SS-SS double-layered microbeam

由弱形式求积元法所得的整体位移向量中分别提取关于 $W_b^{(i)}$ 和 $W_s^{(i)}$ 的位移向量，随后进行归一化处理即可得到弯曲分量与剪切分量。表 2 描述了不同长细比下 CS-SC（上层固支简支-下层简支固支）双层微梁前 6 阶模态振型中弯曲分量与剪切分量的分布情况，参数设置为 $k_w=10$, $k_p=5$, $l/H=0.5$。结果表明，系统振动时剪切效应与弯曲效应共同发生作用；当长细比 $L/H\geqslant 20$ 时，微梁视为细长梁，弯曲分量在振动中占主导，此时剪切分量几乎为 0；随着长细比的减小，剪切效应逐渐增大，剪切效应在短梁的振动中变得不可忽视，并且这一现象在高阶模态中体现得更为显著。

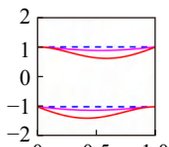
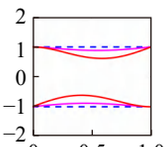
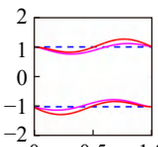
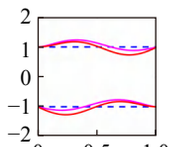
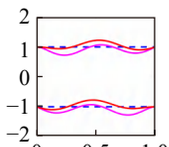
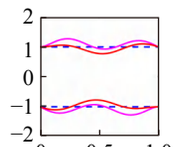
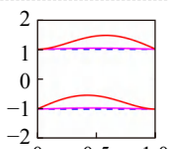
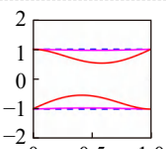
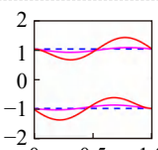
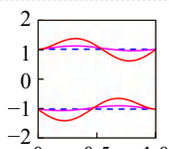
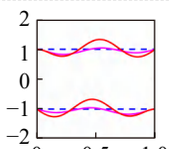
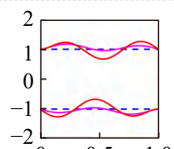
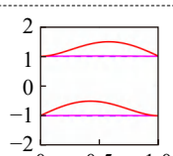
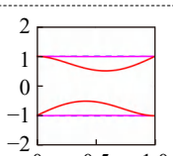
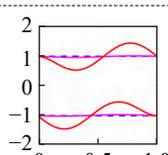
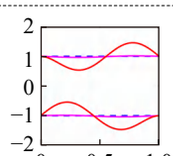
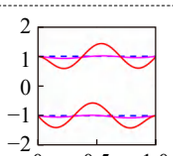
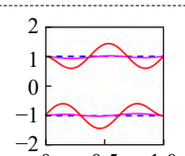
对于各层边界条件不同的双层微梁，自由振动时各层微梁对整体模态的贡献量也不同，且各层贡献量会随着参数和阶次而变化。为定量描述双层微梁中各层梁对整体模态的贡献，本文提出能量参与准则，即双层微梁的各层微梁应变能占整体能量的比例。

图 5 展示了不同尺度参数下，SS-CS（上层简支简支-下层固支简支）与 CS-CF（上层固支简支-下层固支自由）双层微梁各层应变能在前 6 阶整体能量中的占比分布，参数设置为 $L/H=10$, $k_w=20$, $k_p=10$。结果表明，双层微梁的上层与下层微梁交替主导整体振动，且边界约束较弱层优先主导振动；随着阶次的升高和尺度参数的增大，主导层微梁应变能占比逐渐升高，夹层弹性势能逐渐减小，表明弹性夹层对系统高阶频率影响较小。

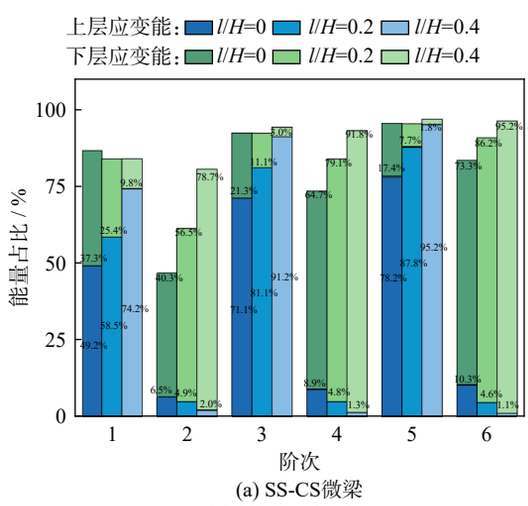
图 6 描述了不同弹性夹层刚度下，SS-CS（上层简支简支-下层固支简支）与 CS-CF（上层固支简支-下层固支自由）双层微梁各层应变能在前 6 阶整体能量中的占比分布，参数设置为 $L/H=10$, $l/H=0.2$。结果表明，夹层刚度的增大使得主导振型层的微梁应变能占比减小，夹层弹性势能以及另一层微梁的应变能相应增大。并且 Pasternak 层刚度与 Winkler

表 2 不同长细比下 CS-SC 双层微梁前 6 阶振动模态及频率

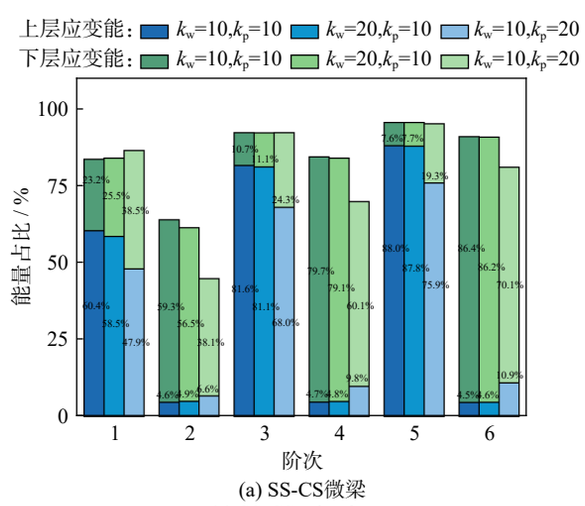
Tab. 2 The first six order vibration modes and frequencies of CS-SC double-layered microbeam with different slenderness ratios

L/*H*	振动模态					
	1阶	2阶	3阶	4阶	5阶	6阶
5	 5.5648	 5.7017	 9.4053	 9.4992	 12.9097	 12.9865
10	 5.7628	 5.8869	 10.0914	 10.1687	 14.1466	 14.2065
20	 5.8250	 5.9450	 10.3805	 10.4517	 14.8305	 14.8827

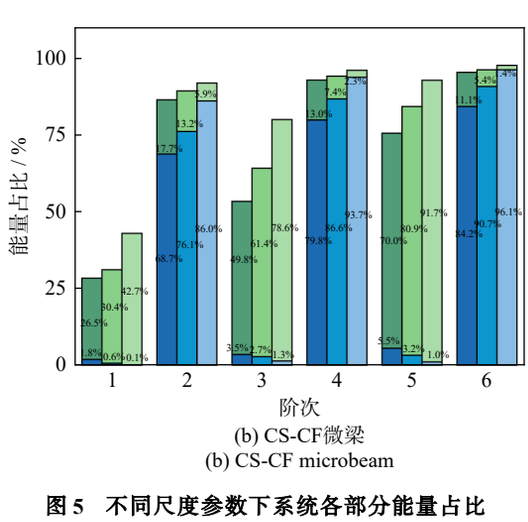
注：图中横坐标为归一化微梁长度，纵坐标为归一化微梁振动幅值，红色曲线为弯曲分量，粉色曲线为剪切分量，图片下方数字为微梁无量纲振动频率。



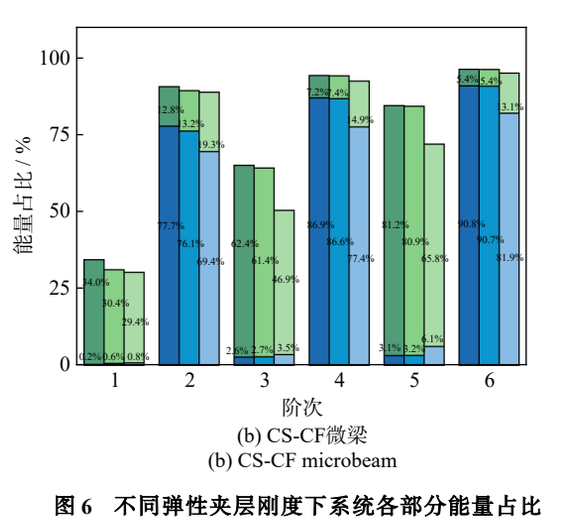
(a) SS-CS微梁
(a) SS-CS microbeam



(a) SS-CS微梁
(a) SS-CS microbeam



(b) CS-CF微梁
(b) CS-CF microbeam



(b) CS-CF微梁
(b) CS-CF microbeam

图 5 不同尺度参数下系统各部分能量占比

Fig. 5 The percentage of energy in each part of system under different scale parameters

图 6 不同弹性夹层刚度下系统各部分能量占比

Fig. 6 The percentage of energy in each part of system under different elastic interlayer stiffnesses

层刚度相比对微梁应变能影响更大，弹性夹层刚度的改变对能量的影响随阶次的升高而减弱。

为定量描述不同参数对双层微梁模态的影响，采用模态置信准则（MAC）分析不同参数下的模态矢量相关性。参数变化前的第 i 阶模态向量 $\boldsymbol{P}_i$ 与参数变化后的第 j 阶模态向量 $\boldsymbol{Q}_j$ 的 MAC 系数 $R_{i,j}$ 定义如下[32]：

$$R_{i,j}=\left|\frac{N\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j-N^2\bar{P}_i\bar{Q}_j}{\sqrt{\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i-N^2\bar{P}_i^2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j-N^2\bar{Q}_j^2}}\right| \tag{27}$$

式中，$\bar{P}_i$ 和 $\bar{Q}_j$ 分别为其对应均值；N 为向量长度。计算各阶 MAC 系数可得 MAC 矩阵。

表 3 展示了不同弹性夹层刚度下 SS-CC（上层简支简支-下层固支固支）双层微梁前 6 阶振动模态及频率，参数设置为 $L/H=10$，$l/H=0.2$。结果表明，系统振动时两端简支微梁优先主导振动，随后两端固支微梁主导振动；相较于初始状态，Pasternak 层刚度的增大对系统模态与频率的影响程度高于 Winkler 层。高阶模态对应的模态刚度大于低阶模态。当弹性夹层刚度增大时，夹层刚度与低阶模态刚度的比值也随之增大，因此对低阶频率的提升作用更为显著，而对高阶频率的影响则相对较小。

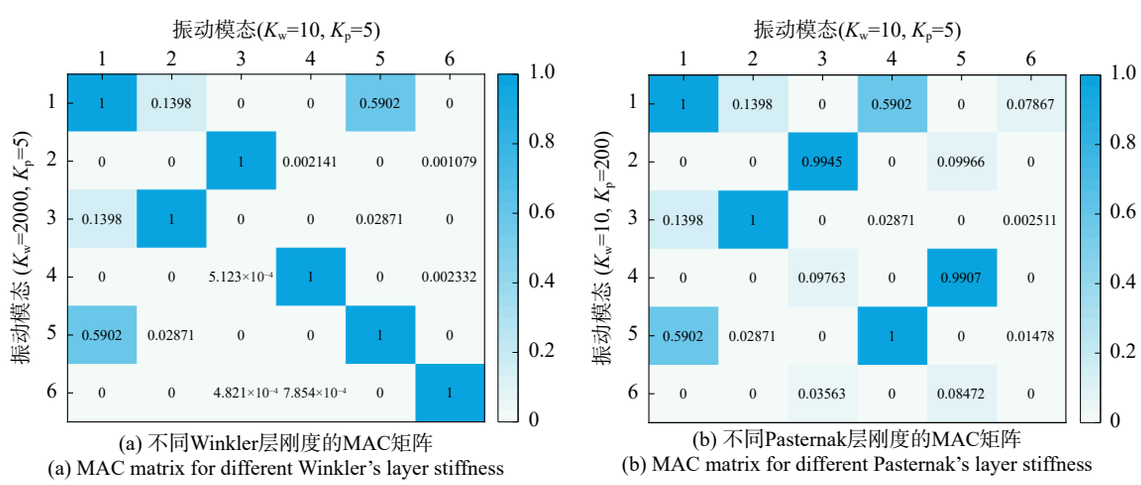
图 7 为基于表 3 中不同弹性夹层刚度下 SS-CC（上层简支简支-下层固支固支）双层微梁前 6 阶振动模态的定量表示，分别展示仅增大 Winker 层刚度和 Pasternak 层刚度与初始状态对比的 MAC 矩阵。

表 3　不同弹性夹层刚度下 SS-CC 双层微梁前 6 阶振动模态及频率

Tab. 3　The first six order vibration modes and frequencies of SS-CC double-layered microbeam with different elastic interlayer stiffnesses

k_w, k_p	振动模态					
	1阶	2阶	3阶	4阶	5阶	6阶
(10, 5)	3.7853	5.3075	7.0127	8.4861	10.0980	11.3593
(2000, 5)	4.5729	7.5378	8.1858	9.5285	10.3779	11.7821
(10, 200)	4.6893	7.8089	8.1542	10.7605	11.7356	13.5973

注：图中横坐标为无量纲长度，纵坐标为无量纲模态位移，图片下方数字为无量纲频率。



(a) 不同Winkler层刚度的MAC矩阵
(a) MAC matrix for different Winkler's layer stiffness

(b) 不同Pasternak层刚度的MAC矩阵
(b) MAC matrix for different Pasternak's layer stiffness

图 7　不同弹性夹层刚度下系统的 MAC 矩阵

Fig. 7　MAC mactrices of system under different elastic interlayer stiffnesses

图 7(a) 表明 Winker 层刚度增大仅使得第 2~3 阶模态发生跃迁，图 7(b) 则表明增大 Pasternak 层刚度使得第 2~3 阶以及第 4~5 阶模态发生跃迁。结合表 3 中的模态振型图与图 7 可说明 Pasternak 层刚度变化对高阶模态的影响显著高于 Winker 层。

图 8 展示了不同尺度参数对 CS-CF(上层固支简支-下层固支自由)双层微梁的 MAC 系数的影响，参数设置为 $L/H=10$，$k_w=200$，$k_p=50$。结果表明，CS-CF 双层微梁的 MAC 系数随着尺度参数的增大发生剧烈变化，其中对 1 阶的影响最显著，表明在此边界条件下，尺度参数增大对 1 阶模态的影响更剧烈。

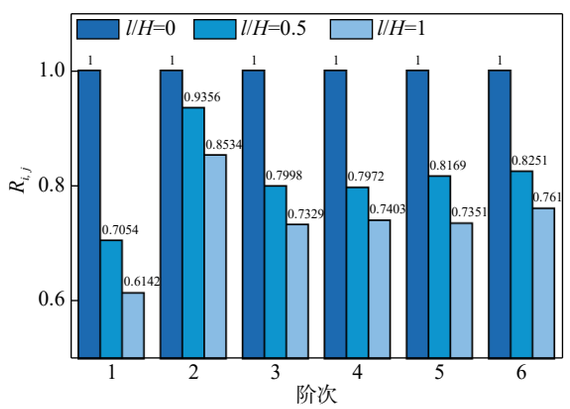


图 8 不同尺度参数下 CS-CF 双层微梁 MAC 系数

Fig. 8 MAC coefficients of CS-CF double-layered microbeam under different scale parameters

4 结 论

本文基于修正应变梯度理论与精化高阶剪切变形理论，建立了由 Winkler-Pasternak 弹性夹层连接的双层微梁自由振动分析模型。针对复杂边界问题，构造具有 C^2 连续性的 3 节点 28 自由度弱形式求积元。通过典型数值算例验证了该方法的良好收敛性，并探讨了关键参数对双层微梁振动特性的影响规律。主要结论如下：

(1)剪切变形效应的影响：剪切变形分量对振动特性的影响在高阶模态和短粗梁(小长细比)中尤为显著；随着长细比的增大，该影响逐渐减弱并可忽略。

(2) 层间主导机制与能量分布：系统振动时，边界约束较弱的层首先主导振动行为，随后与约束较强的层交替主导。能量参与准则定量分析了各层应变能对系统总响应的贡献度，印证了上述主导机制的动态特性。

(3)弹性夹层的作用与模态跃迁：弹性夹层刚度(特别是 Pasternak 层刚度)的变化是诱发系统模态跃迁的关键因素，其对固有频率和模态振型的影响显著强于 Winkler 层；夹层的作用主要体现于系统的异步振动模态。

(4)模态表征与参数影响：模态置信准则成功定量表征了弹性夹层刚度及材料尺度参数对模态振型(包括局部化特征)及跃迁行为的调控机制。

本研究建立的模型与求解方法为分析复杂约束下双层微梁系统的动力学行为提供了有效工具，所得结论对微机电系统(MEMS)中相关器件的设计与振动性能优化具有重要的理论指导意义。

参考文献：

[1] 韩飞，淡丹辉，赵磊，等. 一类浅垂度倾斜双梁系统动力特性研究 [J]. 振动工程学报，2019，32(1)：140-150.
HAN Fei，DAN Danhui，ZHAO Lei，et al. Dynamic characteristic research on the double-beam system with shallow sag and inclination[J]. Journal of Vibration Engineering，2019，32(1)：140-150.

[2] 史冬岩，张颖，何东泽. 复合材料双层球壳与环板耦合结构振动特性研究 [J]. 振动工程学报，2024，37(2)：258-266.
SHI Dongyan，ZHANG Ying，HE Dongze. Vibration characteristics analysis of composite double-layer spherical shell and annular plate coupled structure[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(2)：258-266.

[3] HAN F，DENG Z C，DAN D H. A unified method for in-plane vibration analysis of double-beam systems with translational springs[J]. Journal of Sound and Vibration，2022，534：117042.

[4] 蒋佳卿，王云，陈伟球，等. 一种多层组合梁自由振动分析的混合有限元法 [J]. 振动工程学报，2024，37(5)：856-863.
JIANG Jiaqing，WANG Yun，CHEN Weiqiu，et al. A mixed finite element method for free vibration analysis of multilayer composite beams[J]. Journal of Vibration Engineering，2024，37(5)：856-863.

[5] ZHAO X，MENG S Y，ZHU W D，et al. A closed-form solution of forced vibration of a double-curved-beam system by means of the Green's function method[J]. Journal of Sound and Vibration，2023，561：117812.

[6] LI J A，WANG T J，LIU X，et al. Double-beam modeling and experiments of resonance behaviors of AFM-based nanowires[J]. International Journal of Mechanical Sciences，2022，213：106867.

[7] LI Z K，HE Y M，ZHANG B，et al. Experimental investigation and theoretical modelling on nonlinear dynamics of cantilevered microbeams[J]. European Journal of Mechanics - A/Solids，2019，78：103834.

[8] LAM D C C，YANG F，CHONG A C M，et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids，2003，51(8)：1477-1508.

[9] XIE Y Y，LEI J，GUO S，et al. Size-dependent vibration of multi-scale sandwich micro-beams：an experimental study and theoretical analysis[J]. Thin-Walled Structures，2022，

175：109115.

[10] MINDLIN R D，TIERSTEN H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis，1962，11(1)：415-448.

[11] ERINGEN A C，EDELEN D G B. On nonlocal elasticity[J]. International Journal of Engineering Science，1972，10(3)：233-248.

[12] MINDLIN R D，ESHEL N N. On first strain-gradient theories in linear elasticity[J]. International Journal of Solids and Structures，1968，4(1)：109-124.

[13] KHAKALO S，NIIRANEN J. Form Ⅱ of Mindlin's second strain gradient theory of elasticity with a simplification：for materials and structures from nano- to macro-scales[J]. European Journal of Mechanics - A/Solids，2018，71：292-319.

[14] CORDERO N M，FOREST S，BUSSO E P. Second strain gradient elasticity of nano-objects[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids，2016，97：92-124.

[15] YE X，MA H S，LIU X M，et al. Size-dependent thermal bending of bilayer microbeam based on modified couple stress theory and Timoshenko beam theory[J]. European Journal of Mechanics - A/Solids，2023，100：105029.

[16] RAHMANIAN S，HOSSEINI-HASHEMI S. Size-dependent resonant response of a double-layered viscoelastic nanoresonator under electrostatic and piezoelectric actuations incorporating surface effects and Casimir regime[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics，2019，109：118-131.

[17] LIU N N，ZUO W L，LIU X. Thermoelastic damping in symmetrical three-layer piezoelectric microbeam resonators[J]. Thin-Walled Structures，2024，202：112088.

[18] SOLTANI M，MOMENIAN M H，CIVALEK O. Stability analysis of sandwich double nanobeam-system with varying cross-section interconnected by Kerr-type three-parameter elastic layer[J]. Thin-Walled Structures，2024，204：112249.

[19] SIBTAIN M，YEE K，ONG O Z S，et al. Dynamics of size-dependent multilayered shear deformable microbeams with axially functionally graded core and non-uniform mass supported by an intermediate elastic support[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2023，146：263-283.

[20] 侯东昌，张吉成，王立峰. 基于移动 Kriging 插值无网格法的多层纳米板振动特性研究 [J]. 振动工程学报，2025，38(3)：623-630.
HOU Dongchang，ZHANG Jicheng，WANG Lifeng. Vibration characteristics of multilayer nanoplates via meshfree moving Kriging interpolation method[J]. Journal of Vibration Engineering，2025，38(3)：623-630.

[21] 张立民，张波，张旭，等. 面内压缩荷载作用下双层微板系统的同步/异步屈曲 [J]. 应用数学和力学，2023，44(2)：160-167.
ZHANG Limin，ZHANG Bo，ZHANG Xu，et al. Synchronous/asynchronous buckling of double-layered microplate systems[J]. Applied Mathematics and Mechanics，2023，44(2)：160-167.

[22] 张立民，张波，张旭，等. 基于微分求积有限元法的双层微板系统振动特性研究 [J]. 计算力学学报，2023，40(6)：893-901.
ZHANG Limin，ZHANG Bo，ZHANG Xu，et al. Application of differential quadrature finite element method to the free vibration analysis of double-layered microplate system[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics，2023，40(6)：893-901.

[23] 文鹏军，张波，李成，等. 三层应变梯度微板系统的耦合振动特性 [J]. 动力学与控制学报，2024，22(10)：84-93.
WEN Pengjun，ZHANG Bo，LI Cheng，et al. Coupled vibration characteristics of the triple-layered strain gradient microplate system[J]. Journal of Dynamics and Control，2024，22(10)：84-93.

[24] WEN P J，ZHANG B，LI C，et al. Modeling and prediction of buckling mode transitions in double-layered microplate systems with couple stress effects and interlayer interactions [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures，2025：1-23.

[25] SHIMPI R P. Refined plate theory and its variants[J]. AIAA Journal，2002，40(1)：137-146.

[26] ZHANG B，LI H，KONG L L，et al. Size-dependent static and dynamic analysis of Reddy-type micro-beams by strain gradient differential quadrature finite element method[J]. Thin-Walled Structures，2020，148：106496.

[27] ZHANG B，LI H，KONG L L，et al. Variational formulation and differential quadrature finite element for freely vibrating strain gradient Kirchhoff plates[J]. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik，2021，101(6)：e202000046.

[28] ZHANG B，LI H，KONG L L，et al. Strain gradient differential quadrature beam finite elements[J]. Computers & Structures，2019，218：170-189.

[29] ZHANG B，LI H，KONG L L，et al. Strain gradient differential quadrature finite element for moderately thick microplates[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2020，121(24)：5600-5646.

[30] ZHANG G Y，GAO X L. A new Bernoulli-Euler beam model based on a reformulated strain gradient elasticity theory[J]. Mathematics and Mechanics of Solids，2020，25(3)：630-643.

[31] ROHWER K. Remarks on "a simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates"[J]. Composite Structures，2014，107：748.

[32] DENG T，ZHANG B，LIU J，et al. Vibration frequency and mode localization characteristics of strain gradient variable-thickness microplates[J]. Thin-Walled Structures，2024，199：111779.

第一作者：黄宁川(2001—)，男，硕士研究生。
E-mail：117978417@qq.com

通信作者：张　波(1984—)，男，博士，副教授。
E-mail：zhangbo2008@swjtu.edu.cn

附录 A

微分求积权系数矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} -a_2 & -a_{16} & a_{19} & a_{14} & -a_{12} & a_{15} & -a_1 \\ -a_{11} & 0 & -a_9 & a_{21} & -a_8 & a_4 & -a_{10} \\ -a_{20} & a_{18} & 0 & -a_{22} & -a_6 & -a_{17} & -a_{13} \\ -a_3 & a_5 & -a_7 & 0 & a_7 & -a_5 & a_3 \\ a_{13} & a_{17} & a_6 & a_{22} & 0 & -a_{18} & a_{20} \\ a_{10} & -a_4 & a_8 & -a_{21} & a_9 & 0 & a_{11} \\ a_1 & -a_{15} & a_{12} & -a_{14} & -a_{19} & a_{16} & a_2 \end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{A}_1 \tag{A1}$$

其中：

$$a_1=\frac{1}{L_e},a_2=\frac{21}{L_e},a_3=\frac{5}{8L_e},a_4=\frac{3\phi(11\phi^2-11\varphi^2-10)}{10L_e},a_5=\frac{3\phi(1221\phi^2-1221\varphi^2-340)}{320L_e},$$
$$a_6=\frac{3\varphi(11\phi^2-11\varphi^2+10)}{10L_e},a_7=\frac{3\varphi(1221\phi^2-1221\varphi^2+340)}{320L_e},a_8=\frac{3(\phi^2-1)(\phi-\varphi)(1221\phi^2-1221\varphi^2+340)}{160L_e},$$
$$a_9=\frac{3(\phi^2-1)(\phi+\varphi)(1221\phi^2-1221\varphi^2+340)}{160L_e},a_{10}=\frac{3(\phi-1)(\phi^2-\varphi^2)(11\phi^2-11\varphi^2+10)}{8L_e},$$
$$a_{11}=\frac{3(\phi+1)(11\phi^2-11\varphi^2+10)(\phi^2-\varphi^2)}{8L_e},a_{12}=\frac{99(\varphi-1)(\phi^2-1)(77\phi^2-77\varphi^2+4)}{160L_e},$$
$$a_{13}=\frac{3(\varphi-1)(\phi^2-\varphi^2)(11\phi^2-11\varphi^2-10)}{8L_e},a_{14}=\frac{132(\varphi^2-1)(\phi^2-1)}{5L_e},$$
$$a_{15}=\frac{99(\varphi^2-1)(\phi-1)(77\phi^2-77\varphi^2-4)}{160L_e},a_{16}=\frac{99(\varphi^2-1)(\phi+1)(77\phi^2-77\varphi^2-4)}{160L_e},$$
$$a_{17}=\frac{3(\varphi^2-1)(\phi-\varphi)(1221\phi^2-1221\varphi^2-340)}{160L_e},a_{18}=\frac{3(\varphi^2-1)(\phi+\varphi)(1221\phi^2-1221\varphi^2-340)}{160L_e},$$
$$a_{19}=\frac{99(\varphi+1)(\phi^2-1)(77\phi^2-77\varphi^2+4)}{160L_e},a_{20}=\frac{3(\varphi+1)(\phi^2-\varphi^2)(11\phi^2-11\varphi^2-10)}{8L_e},$$
$$a_{21}=\frac{132\phi(\phi^2-1)(\phi^2-\varphi^2)}{5L_e},a_{22}=\frac{132\varphi(\varphi^2-1)(\phi^2-\varphi^2)}{5L_e},\varphi=\frac{\sqrt{495+66\sqrt{15}}}{33},\phi=\frac{\sqrt{495-66\sqrt{15}}}{33} \tag{A2}$$

附录 B

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_3 & -d_{13} & d_{14} & d_{11} & -d_{10} & d_{12} & -d_1 \\ d_2 & -d_6 & d_4 & -d_9 & -d_5 & d_7 & d_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_1 & -d_{12} & d_{10} & -d_{11} & -d_{14} & d_{13} & d_3 \\ d_8 & d_7 & -d_5 & -d_9 & d_4 & -d_6 & d_2 \end{bmatrix} \tag{B1}$$

其中：

$$d_1=\frac{1}{L_e},d_2=\frac{280}{L_e^2},d_3=\frac{21}{L_e},d_8=\frac{165(\varphi^2-1)(\phi^2-1)}{L_e^2},d_9=\frac{5016(\varphi^2-1)(\phi^2-1)}{5L_e^2},d_{11}=\frac{132(\varphi^2-1)(\phi^2-1)}{5L_e},$$
$$d_{10}=\frac{99(\varphi-1)(\phi^2-1)(77\phi^2-77\varphi^2+4)}{160L_e},d_{12}=\frac{99(\varphi^2-1)(\phi-1)(77\phi^2-77\varphi^2-4)}{160L_e},$$
$$d_{13}=\frac{99(\varphi^2-1)(\phi+1)(77\phi^2-77\varphi^2-4)}{160L_e},d_{14}=\frac{99(\varphi+1)(\phi^2-1)(77\phi^2-77\varphi^2+4)}{160L_e},$$
$$d_4=\frac{99(\phi^2-1)(1551\varphi^3\phi^2-1551\varphi^5-8800\varphi\phi^2+11750\varphi^3-11110\phi^2+11110\varphi^2-3050\varphi-1960)}{800L_e^2},$$
$$d_5=\frac{99(\phi^2-1)(1551\varphi^3\phi^2-1551\varphi^5-8800\varphi\phi^2+11750\varphi^3+11110\phi^2-11110\varphi^2-3050\varphi+1960)}{800L_e^2},$$
$$d_6=\frac{99(\phi^2-1)(1551\phi^5-1551\phi^3\varphi^2-11750\phi^3+8800\phi\varphi^2-11110\phi^2+11110\varphi^2+3050\phi+1960)}{800L_e^2},$$
$$d_7=\frac{99(\varphi^2-1)(1551\phi^5-1551\phi^3\varphi^2-11750\phi^3+8800\phi\varphi^2+11110\phi^2-11110\varphi^2+3050\phi-1960)}{800L_e^2} \tag{B2}$$

投稿指南

《振动工程学报》是由中国振动工程学会主办，反映振动工程研究成果的学术刊物，面向国内外公开发行。本刊为月刊，被《振动工程领域高质量科技期刊分级目录》《机械工程领域高质量科技期刊分级目录》列为 T1 级，欢迎国内外作者投稿。

一、刊登内容

本刊主要刊登以下主题的综合评述、研究论文：振动理论与应用、非线性振动、随机振动、模态分析与试验、结构动力学、转子动力学、故障诊断、振动与噪声控制、冲击与防护、振动利用、动力稳定性、流固耦合振动、动态测试、动态信号分析、机械动力学、土动力学、包装动力学、结构振动控制与健康监测、人因振动、磁悬浮技术与振动控制等。

二、写作要求

1、文章要有独创性，要求主题突出、背景清楚、立论有据，文字力求简练、明了。

2、文章应含中英文标题、作者及单位、摘要等。摘要应阐述研究目的、创新试验方法、研究成果和最终结论等，重点是方法创新和成果结论，字数以 300 字左右为宜。为促进学术成果国际交流，推荐撰写英文长摘要（不强制要求），字数以 500～600 字符为宜。此外，文章还需注明中图分类号和 3 个以上中英文关键词。

3、所用的量、单位一律采用法定计量单位 (GB 3100—93、GB 3101—93、GB 3102.1—93～GB 3102.13—93)，外文字符要分清大小写、正斜体，不要使用量的名称或多字缩略术语表示变量。

4、图表应提供中英文对照的图题和表题，图表中除特定的英文缩写、单位外应全部使用中文。

5、公式按先后顺序统一编号，编号用（ ）写在右侧行末，中间不加虚线。因排版需要，请使用 MathType 进行编辑。

6、引用文献应遵循最新、关键、必要和亲自阅读过的原则，在正文中顺次引述。非公开出版的资料请勿引用。参考文献要求用双语标注，无双语的不标。各类型参考文献的著录格式如下：

①期刊中析出的文献　[序号] 作者 . 题名 [J]. 刊名 , 年 , 卷 (期): 起止页码 .

②论文集中的析出文献　[序号] 作者 . 题名 [C] // 论文集名 . 出版地 : 出版者 , 出版年 : 起止页码 .

③专著　[序号] 作者 . 书名 [M]. 版本 (首版免著). 出版地 : 出版者 , 出版年 : 起止页码 .

④学位论文　[序号] 作者 . 题名 [D]. 出版地 : 学位授予单位 , 出版年 .

⑤标准　[序号] 标准起草者 . 标准名称 : 标准编号 [S]. 出版地 : 出版者 , 出版年 .

⑥科技报告　[序号] 作者 . 题名 : 编号 [R]. 出版地 : 出版者 , 出版年 : 起止页码 .

⑦专利　[序号] 专利申请者或所有者 . 题名 : 申请 (专利) 号 [P]. 公开日期 .

⑧电子文献　[序号] 作者 . 题名 [EB/OL]. (发表或更新日期)[引用日期]. 电子文献获取和访问路径 .

三、版权及其他说明

为保证网络首发时效，本刊自 2025 年起在中国知网首发“录用定稿”，请作者严格按照本刊论文样本（详见官网下载专区）和投稿指南撰写论文，避免因排版不规范造成网络首发时滞过长。

作者在投稿时需与编辑部签署论文著作权转让协议，所登论文在向国内外数据库、检索机构 (包括印刷版、光盘版、网络版) 报送时，不再征求作者意见。

本刊为《全国性学会科技期刊道德公约》签署单位，不得一稿多投。来稿文责自负（包括政治、保密、作者纠纷等），编辑部有权对录用文章进行删改。稿件一经刊用，即赠当期期刊两本，并按规定酌致稿酬。

本刊被以下数据库收录：

EI 工程索引

北京大学《中文核心期刊要目总览》

中国科学引文数据库 (CSCD)

中国科技论文与引文数据库 (CSTPCD)

Scopus 文摘与引文数据库

WJCI 科技期刊世界影响力指数报告

高质量科技期刊分级目录：

《振动工程领域高质量科技期刊分级目录》T1 级

《机械工程领域高质量科技期刊分级目录》T1 级

振动工程学报

ZHENDONG GONGCHENG XUEBAO

（月刊）

主编：翟婉明　　1987 年 11 月创刊

第 38 卷第 11 期　　2025 年 11 月出版

JOURNAL OF VIBRATION ENGINEERING

(Monthly)

Editor-in-chief: ZHAI Wanming

First Issue: November 1987

Vol. 38 No. 11 Nov. 2025

主　　管：中国科学技术协会

主　　办：中国振动工程学会

编辑出版：《振动工程学报》编辑部

（南京市御道街 29 号，210016）

印　　刷：南京百花彩色印刷广告制作有限责任公司

国内发行：江苏省报刊发行局

国外发行：中国国际图书贸易总公司

（北京 399 信箱）

Supervisor: China Association for Science and Technology

Sponsor: Chinese Society for Vibration Engineering

Editing and Publishing: Editorial Board of Journal of Vibration Engineering

(No.29 Yudao Street, Nanjing 210016)

Printing: Nanjing Baihua Print Advertising Limited Liability Company

Domestic Distributor: Jiangsu Bureau for Distribution of Newspapers and Journals

Abroad Distributor: China International Book Trading Corp.

(P. O. Box 399 Beijing, China)

国内邮发代号：28-249

国外发行代号：4819Q

编辑部电话：(025)84895885

电 子 邮 箱：zdgcxb@nuaa.edu.cn

ISSN 1004-4523

9 771004 452256 11>

定价：50.00 元