

基于L1-范数和弹性网约束的鲁棒稀疏块PCA算法

唐肝翌¹, 王勇^{1,2}, 范莉莉¹, 卢桂馥¹

¹安徽工程大学 计算机与信息学院 芜湖 241000, ²计算机软件国家重点实验室(南京大学) 南京 210000

摘要

块主成份分析(Block Principal Component Analysis, BPCA)是一种重要的子空间学习方法,能更好地利用图像矩阵像素间的关联。基于L1-范数的块PCA方法(BPCA-L1)是近年来图像分析领域发展起来的一种鲁棒降维技术。在此基础上,我们提出了一种特征稀疏的鲁棒BPCA-L1方法(BPCAL1-S)。该方法基于L1-范数,对于噪声更加鲁棒。为了建立稀疏模型,在目标函数中引入弹性网,联合使用Lasso与Ridge惩罚因子。提出了一种迭代的贪心算法逐个提取特征向量,对迭代过程的单调性做了理论证明,实验结果验证了该方法的有效性。

1 引言

主成份分析(PCA)是降维和特征提取的经典方法,广泛应用于计算机视觉与模式识别领域。传统PCA方法需要将二维图像转化为一维向量,破坏了原始图像内在结构。PCA需要构造图像库的协方差矩阵并求得特征值和特征向量,当图像数量不断增加时,容易出现协方差矩阵过大的维度灾难问题。二维主成份分析(2DPCA)能够很好的保留图像空间结构并避免协方差矩阵过大。

如果把图像矩阵的行向量看成一个计算单元,2DPCA与PCA本质上是等价的。更一般的,块PCA(BPCA)将每一个图像矩阵分成若干个具有相同像素的块,把每一个块作为一个计算单元并应用于PCA框架。基于这一视角,2DPCA和PCA都是BPCA的特例。

经典的PCA/2DPCA/BPCA方法获取的特征向量是非稀疏的(即存在大量非零元),这样可能存在冗余信息并很难解释。从大量特征中寻找最相关或者最突出的元素是非常有意义的。

我们提出一种基于L1-范数和弹性网约束的鲁棒稀疏的块PCA方法,将其命名为BPCAL1-S(BPCA-L1 with sparsity)。BPCAL1-S有以下优点:

- 1) 计算单元为更加一般的块,块中包含行和列的像素,该方法能充分利用图像的像素关联;
- 2) 用L1-范数代替L2-范数,所提取的特征更加鲁棒;
- 3) 引入弹性网约束,所提取的特征具有稀疏性,有更好的语义解释性,也有助于进一步提升性能。

2 BPCAL1-S基本思路

BPCAL1-S源于对PCA-L1/2DPCA-L1的推广,在BPCA-L1基础上添加了稀疏约束。

先分析BPCA-L1的迭代特征提方法。BPCA-L1寻求最优的特征(投影向量) ω^* ,使得基于L1-范数的目标函数最大化,即:

$$\omega^* = \arg \max_{\omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\omega^T x_j^{(i)}| \quad (1)$$

ω^* 的迭代求取如式(2),

$$\omega(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) x_j^{(i)}}{\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) x_j^{(i)} \right\|_2} \quad (2)$$

其中, $x_j^{(i)}$ 为第j个图像中的第i个块向量化(如图1)转置而成的列向量。

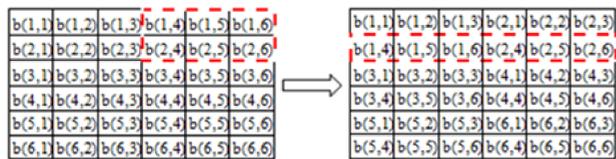


图1 图像矩阵划分为的小块并完成向量化

$p_{ij}(t)$ 为极性函数,定义如下,

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \omega(t)^T x_j^{(i)} \geq 0 \\ -1, & \omega(t)^T x_j^{(i)} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

图像通常拥有很多特征,其中有些是相关或者冗余的,从中抽取显著特征非常意义,这些显著特征可能对应了诸如人脸图像中的嘴巴或眼睛等的特定区域。稀疏特征去除了冗余信息,更加典型且解释性更好。弹性网(Elastic Net)联合使用L1-范数和L2-范数约束,结合了Lasso回归和岭回归(Ridge Regression)的优点,在BPCAL1-S中引入弹性网约束可用于稀疏特征提取,如式(4),

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\omega^T x_j^{(i)}| - \frac{\eta}{2} \|\omega\|_2 - \lambda \|\omega\|_1 \quad (4)$$

3 BPCAL1-S 特征提取

BPCAL1-S通过最大化目标函数提取稀疏特征 ω^* ,如式(5)

$$\omega^* = \arg \max_{\omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\omega^T x_j^{(i)}| - \frac{\eta}{2} \|\omega\|_2 - \lambda \|\omega\|_1 \quad (5)$$

ω^* 的迭代求取如式(6),

$$\omega(t+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) x_j^{(i)} \circ \left(\frac{|\omega(t)|}{\lambda + \eta |\omega(t)|} \right) \quad (6)$$

其中运算符 \circ 表示向量点乘。

众所周知,同时提取多个稀疏特征是非常困难的,所以先获取一个特征,然后使用贪心策略逐个提取其余特征。

算法 $r(r > 0)$ 个特征提取的BPCAL1-S算法

1. 令 $\tau = 1$
2. 计算特征向量 ω_τ
 - 1) 初始化: $t=0$, 随机生成 ω 使得 $\omega^T \omega = 1$
 - 2) 计算 $a(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) x_j^{(i)}$
 - 3) 计算 $b(t) = |a(t)| / (\eta + \lambda |a(t)|)$
 - 4) $\omega(t+1) = a(t) \circ b(t)$
 - 5) $\alpha(t+1) = \omega(t+1) / \|\omega(t+1)\|_2$
 - 6) 收敛条件: 如果 $\|\alpha(t+1) - \alpha(t)\|_2 > \varepsilon$ 则转到 2)
3. 使用贪心策略更新样本: $x^{(\tau)} = x^{(\tau-1)} - \sum_{k=1}^{\tau-1} \alpha_k \alpha_k^T x^{(\tau)}$
4. 如果 $\tau < r$, 则 $\tau = \tau + 1$ 并转到 2

4 实验与结果

为了评价BPCAL1-S的性能表现,我们将其应用于图像识别与重构。

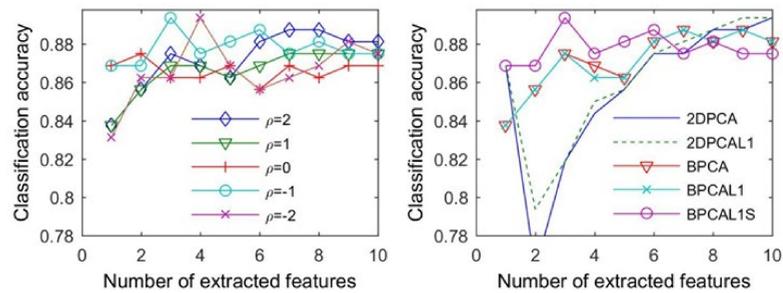


图2 BPCAL1-S与2DPCA, 2DPCA-L1, BPCA, BPCAL1分类准确率对比(ORL库)

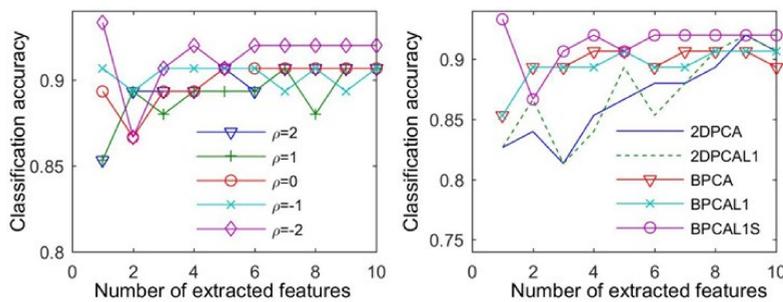


图3 BPCAL1-S与2DPCA, 2DPCA-L1, BPCA, BPCAL1分类准确率对比(Yale库)

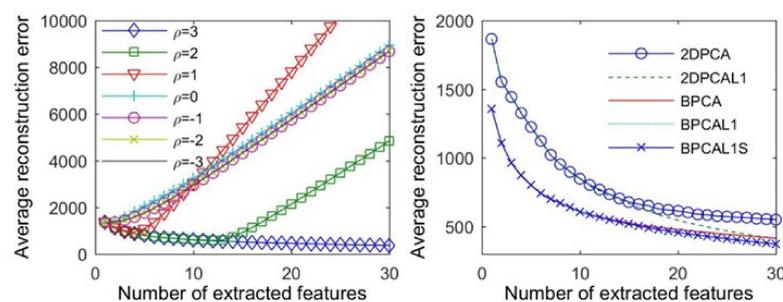


图4 Feret库平均重构误差

5 结论

我们提出了一种鲁棒、稀疏的块PCA方法BPCAL1-S,这种方法能更好地利用原始图像的空间信息关联,对噪声更加鲁棒。目标函数使用L1-范数并整合了稀疏约束的弹性网,所提取的稀疏特征更加典型,对图像的识别与重构有更好的性能表现。

投稿人 姓名: 唐肝翌¹, 王勇^{1,2}, 范莉莉¹, 卢桂馥¹

单位: 1. 安徽工程大学 计算机与信息学院

2. 计算机软件国家重点实验室(南京大学)